MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

Depuis 1666. jusqu'à 1699.

TOME VI.



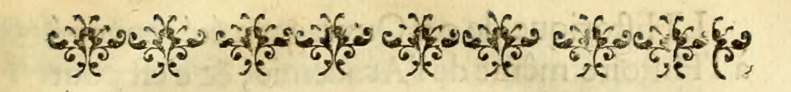
A PARIS,
PAR LA COMPAGNIE DES LIBRAIRES.

M. DCCXXX.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

A PARIS,

Chez { GABRIEL MARTIN, ruë Saint Jacques à l'Etoile.
FRANÇOIS MONTALANT, Quay des Auguſtins.
JEAN-BAPTISTE COIGNARD Fils, Imprimeur du Roy & de l'Academie Françoiſe, ruë Saint Jacques.
HYPPOLITE-LOUIS GUERIN, ruë Saint Jacques, à Saint Thomas d'Aquin



AVERTISSEMENT.

ON a rassemblé dans ce Sixiéme Tome les divers Ouvrages de M. de Roberval & de M. l'Abbé Picard, autres que ceux qui regardent l'Astronomie & qui se trouvent dans le Tome VII.

Ce Volume contient la plus grande partie de celui qui fut imprimé *in-folio* au Louvre en 1693. On en a séparé les Oeuvres de M. Frenicle qui composent en partie le Tome V. & différens Traitez de MM. Huyghens & Mariotte, qui ont été rassemblez dans les éditions complettes que l'on a fait des Ouvrages de ces deux Academiciens. Il étoit inutile de remettre ici sous les yeux du Public ce qu'il possede ailleurs dans un ordre plus naturel; & tous ces Traitez ensemble auroient composé un second Volume aussi gros que celui que nous donnons.

Parmi les divers Traitez de M. Picard on a inseré celui du Nivellement qui avoit paru *in-douze* en 1684. & qu'on avoit réimprimé de même forme en 1728.

L'Hiſtorique de ces Ouvrages a été renvoyé à l'Hiſtoire même de l'Academie, & c'eſt pour cette raiſon qu'on a obmis ici les Prefaces que M. DE LA HIRE avoit miſes au Recueil *in-folio* & au Traité du Nivellement.

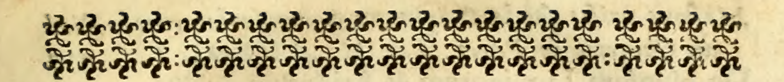


TABLE DES MATIERES

contenuës dans ce Volume.

Divers Ouvrages de M. DE ROBERVAL.

Divers Ouvrages de M. l'Abbé PICARD.

De M. ROEMER.

Fin de la Table des Matieres.

DIVERS OUVRAGES

DE

M. PERSONIER DE ROBERVAL.



OBSERVATIONS
SUR LA COMPOSITION
DES MOUVEMENS,
ET SUR LE MOYEN DE TROUVER
LES TOUCHANTES
DES LIGNES COURBES.

POUR ne perdre aucune des pensées que nous croirons pouvoir servir à l'intelligence de ce sujet, nous ne nous attacherons à aucun ordre ou suite de propositions déterminées, il faudra même le plus souvent ou supposer l'intelligence de quelques définitions & principes que nous n'aurons pas expliquez, ou bien les inserer avec nos propositions.

Définitions

NOUS appellons ligne ſimple celle qui étant ſur un plan, eſt telle que chacune de ſes parties peut convenir avec toutes les autres parties de la même ligne. Telle eſt la ligne droite & la circonférence du cercle.

Ligne composée eſt celle dont les parties n'ont point cette proprieté de s'ajuſter & convenir avec chacune des autres parties.

Mouvement uniforme eſt celui par lequel un mobile eſt porté d'une viteſſe toûjours égale à elle-même.

Mouvement irrégulier ou difforme, au contraire.

Puiſſance eſt une force mouvante.

Impreſſion eſt l'action de cette puiſſance.

La ligne de direction de l'impreſſion eſt celle par laquelle la puiſſance meut le mobile.

Nous appellons les impreſſions ſemblables, ou diverſes, ſuivant que leurs lignes de direction ſont entre-elles paralleles, ou ne le ſont pas, &c.

Or il ne faut pas croire que nous appellions une ligne, ligne ſimple, d'autant qu'elle eſt décrite par un mouvement ſimple : car, comme nous verrons dans la ſuite, non-ſeulement la circonférence du cercle, mais encore la ligne droite peut être entenduë avoir été décrite par un mouvement composé de tant de mouvemens qu'on voûdra.

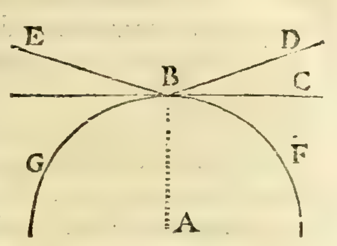
Nous avons encore défini la puiſſance en tant qu'elle nous peut ſervir conſidérant les diverſités des mouvemens, ce qui n'empêche pas que dans d'autres ſpéculations, nous n'entendions par le mot de puiſſance une force capable de ſoutenir un poids, ou de quelque autre effet.

Généralement en ce Traité nous conſidérerons deux choſes dans les mouvemens, leur direction, & leur viteſſe.

Axiomes.

LA direction d'une puiſſance mouvant un mobile, lequel par ſon mouvement décrit une circonférence de cercle, eſt la ligne perpendiculaire à l'extrémité du diamétre, au bout duquel le mobile ſe trouve.

Soit le mobile B, (qui par ſon mouvement décrit la circonférence G B F) au point B, à l'extrémité du demi-diamétre A B, auquel ſoit perpendiculaire la ligne B C. Je poſe pour fondement que B C eſt la ligne de direction par laquelle ſe meut le mobile B en ce point-là. Et on en peut rendre une raiſon naturelle, qui eſt que l'on ne ſçauroit prendre quelque autre ligne que ce puiſſe être, comme B D, ſans tomber dans une abſurdité : car puiſque la nature ne ſouffre rien d'indéterminé, & qu'on ne ſauroit prendre la ligne B D, qui fait l'angle oblique DBA, avec le demi-diamétre, que par la même raiſon l'on ne fût auſſi obligé de prendre de l'autre part la ligne BE qui fait l'angle E B A, égal à D B A, (ce qui eſt abſurde) il s'enſuit que la ſeule ligne qui puiſſe être priſe pour la direction d'un tel mouvement ſera la perpendiculaire BC, qui eſt la ſeule qui faſſe angles droits avec le même demi-diamétre A B.



Ce raiſonnement ne peut quadrer qu'à la circonférence d'un cercle.

D'où il s'enſuit que cette direction change à chaque point de la circonférence.

D'où il s'enſuit encore que ſi un mobile porté de G. vers B venoit à ſe détacher de la circonférence du cercle, comme ſi le demi-diamétre l'ayant porté de G en B, le lâchoit au point B, le mobile ſeroit porté avec

cette impreſſion par la ligne B C.

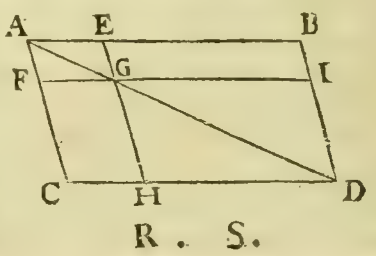
Et d'autant qu'il ſe rencontre que cette même ligne BC eſt la touchante du cercle au point B, nous prendrons pour principe d'invention qu'en toutes les autres lignes courbes, quelles qu'elles puiſſent être, leur touchante, en quelque point que ce ſoit, eſt la ligne de direction du mouvement qu'a en ce même point le mobile qui les décrit. En ſorte que compoſant des mouvemens en diverſes façons, & venant à connoître la direction du mouvement compoſé en quelque point que ce ſoit, d'une ligne courbe, nous connoîtrons par même moïen ſa touchante.

Or nous entendons qu'un mouvement eſt compoſé de pluſieurs mouvemens, lors que le mobile duquel il eſt le mouvement, eſt meû par diverſes impreſſions.

THE'OREME I.

Propoſition premiére.

SI un mobile eſt porté par deux divers mouvemens chacun droit & uniforme, le mouvement compoſé de ces deux ſera un mouvement droit & uniforme différent de chacun d'eux, mais toutefois en même plan, en ſorte que la ligne droite que d'écrira le mobile ſera le diamétre d'un parallelogramme, les côtés duquel ſeront entre-eux comme les viteſſes de ces deux mouvemens; & la viteſſe du compoſé ſera à chacun des compoſans comme le diamétre à chacun des côtés.



Soit le mobile A porté par deux divers mouvemens deſquels les lignes de direction ſoient A B, A C, faiſant l'angle B A C, & que les mouvemens droits & uniformes ſoient tel

qu'en même temps que l'impreſſion AB auroit porté le mobile en B, en même temps l'impreſſion AC l'eût porté en C. Je dis que le mobile porté par le mouvement composé de ces deux, ſera porté le long du diamétre AD du parallelogramme AD, duquel les deux lignes AB, AC, ſont les deux côtés, & que le mouvement qu'il aura ſur le diamétre AD ſera uniforme.

Ce que nous comprendrons, ſi nous nous imaginons que la ligne AB deſcendant toûjours uniformément & parallelement à la ligne CD, juſqu'à ce qu'elle ne ſoit qu'une même ligne avec la ligne CD; & la ligne AC ſe mouvant vers la ligne BD en la même façon, notre mobile A ne fait autre choſe que ſe rencontrer à tout moment en la commune ſection de ces deux lignes.

Or il eſt aſſez clair que les points de cette commune ſection ſont tous dans le diamétre AD; ce que nous démontrerons encore mieux par cette conſidération. Imaginons-nous que le mobile A ſe mouvant uniformément ſur l'une des lignes AB ou AC, la même ligne ſe meut toûjours parallelement à ſoi-même. En cette ſorte ſi le mobile eſt meû ſur AB de A en B en même temps que AB deſcend juſques en CD; & poſons le cas qu'en un certain temps le mobile ſoit arrivé en E, & qu'en ce même temps le côté AB ſoit deſcendu en ſorte qu'il faſſe une même ligne avec FI, dans laquelle prenons FG égale à AE (par notre ſuppoſition elle lui eſt auſſi parallele) donc le mobile A ſera en G: je dis que le point G eſt dans le diamétre AD du paralellogramme ABCD. Car par le point G ſoit tiré la ligne EGH qui achevera le petit parallelogramme AG. Puis donc que les deux mouvemens que nous conſiderons ſont uniformes, comme AB eſt à AE, ainſi AC eſt à AF; & en changeant, AE eſt à AF comme AB à AC, & l'angle BAC eſt commun; partant les deux parallelogrammes AD &

A G sont semblables & à l'entour d'un même diamétre; & par consequent le point G est dans le diamétre A D, ce qu'il falloit démontrer. Le reste de notre proposition n'est qu'un corollaire de ce que nous avons dit: c'est pourquoi nous ne nous y arresterons pas plus long-temps.

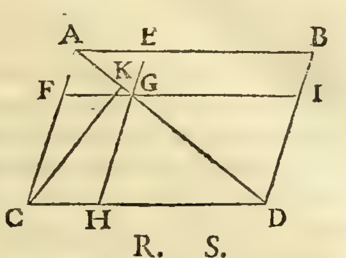
Mais nous remarquerons qu'en cette premiére composition de mouvemens & généralement en toutes les autres, nous pouvons considerer six choses. Sçavoir trois directions qui sont les deux simples, & la composée, & trois impressions qui sont les deux simples & la composée.

Or si les trois directions nous sont données, les trois impressions sont aussi données, c'est à dire les proportions de vitesses des trois mouvemens; car A B, A C & A D, étant données, nous n'aurons qu'à prendre un point D dans A D, ligne de direction du mouvement composé, & par le point D tirer D B & D C parallele à A B & A C; & le parallelogramme étant ainsi achevé les proportions des mouvemens seront les mêmes que celles des deux côtés & du diamétre du parallelogramme.

Mais les trois impressions étant connuës, ou la proportion des trois lignes A B, A C, A D, nous ne connoîtrons aucune des directions, puis que pas une de ces lignes ne nous sera donnée de position, quoi-que les angles qu'elles feront à leur rencontre nous soient donnés en espece. Or en ce cas il faut que deux des puissances quelles qu'elles soient, soient ensemble plus grandes que la troisiéme, puis, que les lignes A B, A C, AD, qui sont en même raison que les puissances, peuvent être les côtés d'un triangle.

Que si l'on nous donne deux directions, l'une de l'un des mouvemens composans, & l'autre du composé, nous ne connoîtrons rien de la troisiéme, ni de la force des impressions, mais seulement nous aurons une raison

donnée telle que la raiſon de l'impreſſion ou de la puiſſance compoſante qui nous eſt donnée à l'autre puiſſance compoſante ne pourra pas être plus grande car A C & A D nous étant données, aiant pris dans A C un point comme C, & de C aiant abbaiſſé CK perpendiculaire ſur A D, la raiſon de A C à AB ne pourra pas être plus grande que la raiſon de la ligne AC à cette perpendiculaire C K, puiſque cette perpendiculaire eſt la moindre de toutes les lignes qui veut être le troiſiéme côté d'un triangle, l'un des deux autres étant A C, & le ſecond une portion de la ligne A D.



Que ſi l'on nous eut donné deux mouvemens entiers, c'eſt-à-dire leurs directions & leurs viteſſes, l'on nous eut auſſi donné la direction & la viteſſe du troiſiéme ; car aiant deux côtés d'un triangle & l'angle qu'ils contiennent, tout le reſte nous eſt donné.

Pareillement nous étant donné deux directions telles qu'on voudra de deux mouvemens, & la raiſon de la viteſſe du troiſiéme à la viteſſe de l'un des deux deſquels nous avons la direction, nous connoiſſons les trois mouvemens, comme ſi l'on nous donne les directions A B, A C, des deux compoſans, & la raiſon de la viteſſe du compoſé à A B comme de R à S, prenant dans la direction A B un point comme B, & faiſant que comme S eſt à R, ainſi A B ſoit à un autre, nous trouverons la ligne A D. Donc ſi du centre A & de l'intervalle AD nous décrivons un arc de cercle qui rencontre la ligne B I D parallele à A F C en D. nous aurons les viteſſes des trois mouvemens A B, A D, B D ou A C, &c. Les choſes

étant ainsi expliquées, nous énoncerons notre proposition plus généralement en cette sorte.

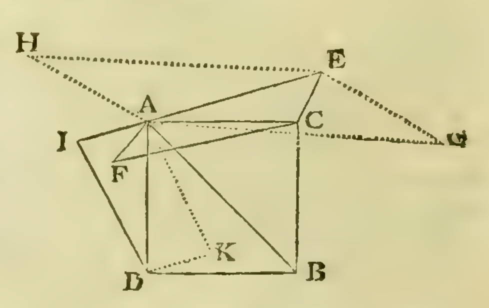
Proposition seconde.

UN mouvement composé de tant de mouvemens droits & uniformes qu'on voudra se fera par une ligne droite, & sera uniforme.

Ce qui est encore assez clair par ce que nous venons de dire; car prenant deux de ces mouvemens j'en composerai un seul, puis que par la précédente ces deux se doivent réduire en un, puis de ce composé consideré comme simple (car il n'importe, puis que les deux directions qui le composent ne font pas plus qu'une simple que nous pouvons concevoir) & d'un autre, j'en composerai un second, qui par ce moïen sera composé de trois; & ainsi en continuant je viendrai à en composer un seul de tant qu'il me plaira d'où il resulte.

Que tout mouvement uniforme & droit peut être entendu, ou comme simple, ou comme composé de tant d'autres mouvemens qu'on voudra.

Où il faut remarquer que nous pouvons concevoir ce mouvement comme composé de divers autres, lesquels se feront en des plans différens, en sorte pourtant que le plus composé de tous soit dans le plan des deux que nous considérons comme les derniers qui le composent. Ainsi le mouvement A B peut être composé des deux A C & A D, dont l'un AC est composé de deux autres AE, AF, l'un

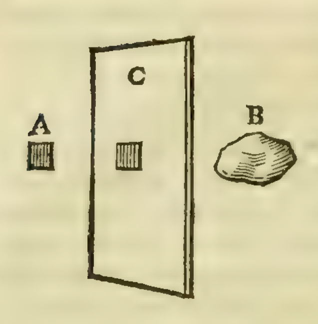


l'un desquels comme AE sera composé de deux autres A G & AH, & ainsi de tant qu'on voudra ; & le second des deux AD, que nous avons dit qui composoient le mouvement AB, peut être entendu comme composé de deux autres AI, AK, & encore chacun de ceux-là de deux autres, &c. en sorte que le mouvement AB sera composé de tant que l'on voudra, & même desquels les impressions seront données : car qui m'empêchera de décrire des parallelogrammes si différens qu'il me plaira, desquels les diagonales soient AB, AD, AC, AE, AH, A G, &c.

Et c'est ici un champ d'une infinité de belles spéculations, comme si aiant supposé que le mouvement A B est composé de cinq autres mouvemens, la vitesse de chacun desquels nous est donnée, l'on nous demande combien il est nécessaire de connoître de leurs directions pour déterminer chacun d'eux & les donner de position, & ainsi d'une infinité d'autres qui pourroient être telles que la recherche excédant la capacité de notre esprit, nous n'en pourrions pas donner les solutions.

Mais pour tirer de cette proposition des connoissances encores plus belles, nous allons expliquer par son moïen la nature des réfléxions & de la réfraction, aïant premiérement posé pour principe, qu'un mouvement pour composé qu'il soit de diverses impressions, aura le même effet qu'un autre causé par une seule impression, de laquelle la direction soit la même que de la composée, si l'un est aussi fort que l'autre.

Ceci étant posé, nous considérons dans les corps deux sortes d'impressions qui les peuvent faire mouvoir ; l'une qui les chasse d'un lieu vers un autre par violence : telle est celle que la raquette donne à la bale, la corde d'un arc à la fléche, &c. L'autre qui se fait par attraction des corps soit que cette attraction soit réciproque, ou non ; & cette derniére est de telle nature qu'elle ne peut jamais causer



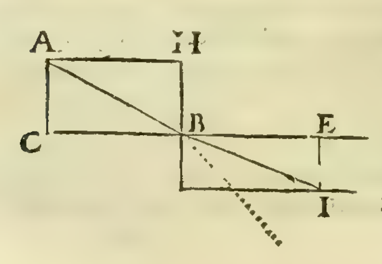
de réfléxion, comme ſi l'aiman B attirant le fer A, le fer s'approchant vient à rencontrer le corps C qui l'empêche de continuer ſon mouvement de A vers B, il s'arrêtera contre le corps C, le preſſant continuellement, d'autant que l'attraction ſe faiſant au travers de C, la vertu de l'aiman empêche le fer de rejaillir vers A; mais la nature de la premiére ſorte d'impreſſion eſt telle qu'un corps étant meû en cette façon, s'il vient à rencontrer un obſtacle auquel il ne puiſſe pas communiquer ſon impreſſion, l'obſtacle la lui rend, ou pour mieux dire le détermine à retourner vers une autre part; & nous prendrons pour principe, que ſi un mobile rencontre un obſtacle étant meû par une ligne perpendiculaire au même obſtacle, il retournera vers le lieu duquel il étoit meû. Ainſi A. ſe mouvant vers D. par une ligne perpendiculaire à l'obſtacle B C, & venant à rencontrer cét obſtacle, auquel nous ſuppoſons qu'il ne puiſſe pas communiquer toute ou preſque toute l'impreſſion qui l'a fait mouvoir, il ſera réfléchi par la même ligne DA, par laquelle il s'étoit meû mais en telle ſorte que s'il n'a communiqué rien du tout de ſon impreſſion à BC, & que BC ne lui en ait pas donné une nouvelle, il retournera avec autant de viteſſe qu'il en avoit en D; que s'il a communiqué une partie de ſon impreſſion à BC il ne retournera pas avec autant de viteſſe qu'il en avoit en D. & enfin ſi l'ob-

ſtacle BC ne lui a pas ſeulement rendu l'impreſſion qu'il lui vouloit donner, mais encore l'a augmentée, comme ſi en D il a trouvé un reſſort, ou autre choſe, alors le mobile retournera de D avec plus de viteſſe qu'il n'en avoit, quand il eſt premierement parvenu au même point D.

Ce principe étant ainſi expliqué, nous n'aurons point de peine à entendre la nature de la réflexion. Car ſi nous penſons qu'une bale eſtant pouſſée d'A vers B, rencontre au point B la ſuperficie de la terre que nous ſuppoſons parfaitement plate & dure, pour ne nous point embarraſſer dans de nouvelles difficultez, laquelle l'empêchant de paſſer outre eſt cauſe qu'elle ſe détourne, & pour entendre de quel côté, puiſque ſon mouvement peut être diviſé en toutes les parties deſquelles l'on peut concevoir qu'il eſt compoſé, imaginons-nous qu'il le ſoit des deux A C & A H, ou C B, deſquels le premier fait deſcendre la bale de A en C, & le ſecond la porte de la gauche A C, vers la droite; & parce que la rencontre de la terre eſt tout-à-fait contraire à l'un de ces mouvemens A C, & qu'elle n'eſt point oppoſée à celui qui l'a fait aller de la gauche vers la droite, il eſt certain que ſi le mobile eût été meû ſeulement par ſon propre poids ſur un plan incliné, comme AB, étant arrivé en B, ou il ſe fût arrêté tout court, ou ſuivant ſa figure & les degrez d'impreſſion qu'il auroit, il eut roulé le long de B E, mais parce que le mouvement de la bale eſt un mouvement violent, & que par notre principe ſi elle eût été portée le long de H B, elle ſeroit remontée de B, en H: au lieu que nous avons compoſé le mouvement A B des deux C B & H B, puis que le mouvement H B eſt changé en B H,

composons un mouvement de deux, dont l'un soit CB ou BE que nous prenons égal à CB & l'autre EF & aïant décrit le parallelogramme HE, tirons la diagonale du point B, où se fait la refléxion en montant vers F, nous trouverons que la bale remontera en autant de temps par la ligne BF, qu'elle en aura mis à descendre par la ligne AB; en sorte que l'angle de réfléxion sera égal à celui d'incidence, car supposant que la bale n'ait rien perdu de son impression, & n'en ait point aquis de nouvelle, son mouvement n'a fait que changer de direction: mais si elle eût rencontré un corps qui lui eût cedé, en sorte que lui communiquant de son impression elle en eût tout autant perdu, il eût fallu composer un mouvement de BE, & d'un autre moindre que EF, comme EG; auquel cas l'angle de réflexion auroit été moindre que celui d'incidence. Et posé que la bale eût rencontré un corps capable d'augmenter son impression, comme une raquette, ou un ressort, son mouvement auroit été composé de BE, & d'un autre comme EI plus grand qu'EF en montant, auquel cas l'angle de réfléxion auroit été plus grand que celui d'incidence.

Et ce même raisonnement se peut aussi-bien accommoder à l'opinion de ceux qui tiennent que la bale ou tout autre missile aïant communiqué toute son impression à l'obstacle, elle réjaillit ou par la force du ressort qu'elle rencontre dans l'obstacle ou parcelle du ressort qui est en elle-même, ou par toutes les deux.



Venons à la réfraction, & supposons que la bale rencontre en B, non plus la superficie de la terre, mais une toile si déliée qu'elle ait la force de la rompre en perdant seule-

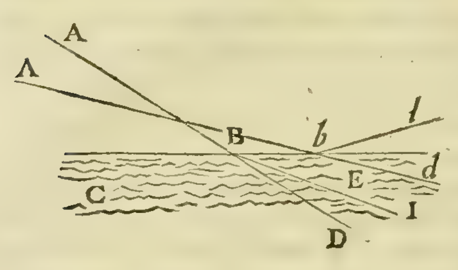
ment une partie de ſon impreſſion ; & parce qu'elle ne doit rien perdre de celle qui la fait aller de la gauche vers la droite, d'autant que la toile ne lui eſt point oppoſée en ce ſens-là, ſuppoſons qu'elle perd la moitié de l'impreſſion qui la fait deſcendre, en ce cas il faudra continuer B E égale à C B, & prendre E I égale à la moitié de A C, de ſorte que la diagonale B I ſera le chemin que ſuivra le mobile après ſa réfraction ; & pareillement ſi la viteſſe A C eut été augmentée, par éxemple, de la moitié, comme ſi le mobile paſſant de l'air eût entré dans un autre milieu de telle nature qu'il eût pû s'y mouvoir une fois auſſi vîte, en ce cas nous aurions fait E I double de A C, B E demeurant égale à B C, &c. ce que l'on voit expliqué bien au long dans les Auteurs.

Or il faut remarquer avec ſoin cette façon de compoſer, & méler les mouvemens, puis que nous voïons que des perſonnes le plus exercées dans la recherche des vérités Mathématiques ſe ſont trompées en cét endroit : ainſi *M. Des Cartes* pour expliquer la réflexion, décrit un cercle du centre B, qui paſſe par A, & trouve que le point de la circonférence auquel le mobile retournera en autant de tems qu'il a mis à aller de A vers B doit être F ; au lieu que d'un raiſonnement ſemblable au nôtre il devoit en tirer comme une conſequence, que le point F dans cette hypotheſe ſe rencontrera dans la circonférence du cercle d'écrit du centre B par A.

Secondement, expliquant la réfraction de la bale dans l'eau, il a confondu les termes d'impreſſion ou viteſſe, & de détermination, leſquels pourtant il avoit diſtinguez peu auparavant ; car en la page 17. ligne derniére, il dit *& puis qu'elle ne perd rien du tout de la détermination*, &c. *Diſc. 2. de la Dioptr.*

Troiſiémement, il ſemble qu'il explique mal dans la page 19. la réflexion de la bale ſur la ſuperficie de l'eau : car il eſt vraiſemblable que lors que la bale

AB entre dans l'eau, & que la réfraction se fait vers I, c'est à cause que la bale entrant dans l'eau au point B, & voulant continuer son chemin vers D, rencontre d'un côté l'angle CBD obtus, & de l'autre côté l'angle EBD aigu, & trouve plus de

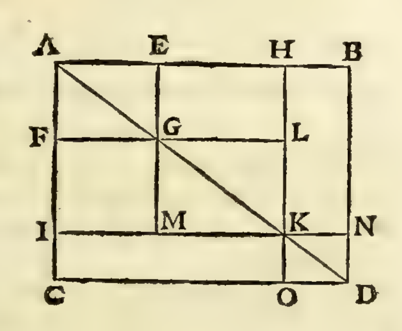


corps, & partant plus de résistance du côté de l'angle obtus que du côté de l'aigu: ainsi elle se détourne par un chemin un peu courbe vers I, lequel elle ne quite plus lors qu'elle est assez enfoncée dans l'eau: car bien qu'il y ait toûjours plus d'eau au dessous de BI, que non pas au dessus, néanmoins à cause de son enfoncement, elle trouve la résistance d'une part aussi forte que de l'autre, ce qui fait qu'elle continuë à se mouvoir vers I.

Mais lors qu'elle entre dans l'eau par la ligne A *b* trop inclinée, d'autant qu'avant d'être parvenuë dans l'eau en un endroit auquel la différence de la résistance des deux parties de l'eau lui fut insensible, il faudroit qu'elle eut (pour ainsi dire) labouré un long sillon d'eau, & agi pendant trop long-temps contre la résistance de l'eau du côté inferieur; de sorte que par cette action elle perd l'impression de s'enfoncer davantage; & sa figure que nous supposons être ronde, quoi qu'elle tienne de la nature & des propriétés d'un coin qui fendroit l'eau, la porte vers la partie la plus foible, c'est-à-dire vers la superficie supérieure de l'eau, & quelquefois au dessus de la même superficie; ce qui est assez intelligible.

Voïez ce que dit *M. Des Cartes* sur ce sujet dans les pages 21, 22. & les suivantes.

L'on pourroit déduire un grand nombre de belles conclusions de cette propoſition du mouvement composé de deux droits : mais puiſque dans ce petit Traité notre but principal eſt de tirer du mélange des mouvemens une méthode générale pour trouver les touchantes des lignes courbes, nous ne nous arrêterons pas davantage à cette propoſition.

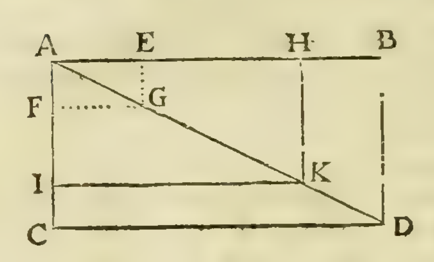


Mais avant que de paſſer outre, nous remarquerons deux choſes : la premiére, que le diamétre AD eut pû être décrit par un point porté de deux mouvémens droits AB, AC, deſquels ni l'un ni l'autre n'eût été uniforme. Il eut pourtant fallu qu'à meſure que l'un, comme A B, eût été augmenté ou diminué, la viteſſe de l'autre eût été changée à proportion, comme ſi le mobile eût été porté en A B d'un mouvement fort lent depuis A juſques à E, & d'un fort vîte depuis E, juſques en H, &c. pour lui faire décrire la ligne A D, il auroit fallu qu'aïant diviſé AC en même raiſon qu'A B dans les points F & I, la ligne AB eût deſcendu fort lentement d'A vers F, & fort vîte de F vers I ; ce que l'on pourra mieux conçevoir, ſi l'on conſidere le mobile en G, comme devant en même temps être porté de deux mouvemens uniformes, & deſquels les viteſſes ſont entre-elles, comme les lignes G L & G M le long des mêmes lignes G L & G M, &c.

Secondement, il nous ſera facile de voir que ſi le mo-

bile eût été porté sur les lignes A B, A C par deux mouvemens droits, mais differens l'un de l'autre, en telle sorte que les parties de l'un n'eussent pas eû toûjours même raison avec les parties de l'autre, en ce cas le mobile eût décrit une ligne courbe; comme si les deux mouvemens eussent été difformes ou disproportionnés, lors que le mobile étant en E dans la ligne A B, il eût été en F, dans la ligne AC, & qu'étant en H, il eût aussi été en I, la ligne décrite par le mouvement mêlé de ces deux auroit été la courbe A G K D, &c.

Mal expliqué, mais facile à entendre.



Et cette considération ne sera pas des moins utiles pour la recherche des touchantes des lignes courbes, comme l'usage le fera découvrir.

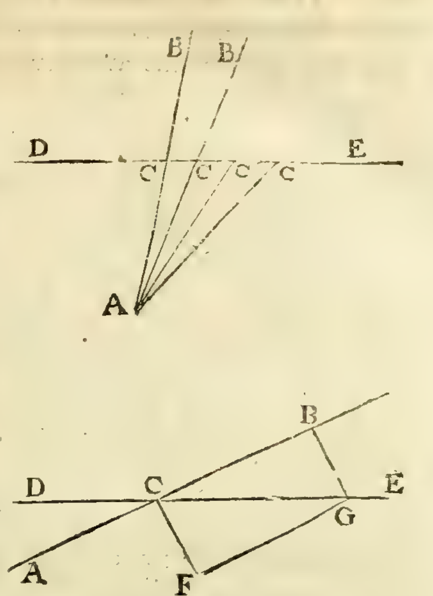
Proposition Troisiéme.

BIEN que ce que nous avons dit jusques ici des mouvemens mêlez pût suffire pour nous en faire comprendre la nature, néanmoins puis que leur connoissance est un principe d'invention pour quantité de belles vérités, il sera peut-être à propos d'en considérer ici divers autres mélanges, quoique tout ce que nous en dirons ait une grande étenduë, à cause que ce ne sont ici que les élemens de cette sçience.

Nous avons expliqué dans les propositions précédentes comment une ligne droite peut être entenduë décrite par un mouvement uniforme mêlé de deux droits & uniformes, ou par un mouvement inégal mêlé de deux droits & difformes, &c.

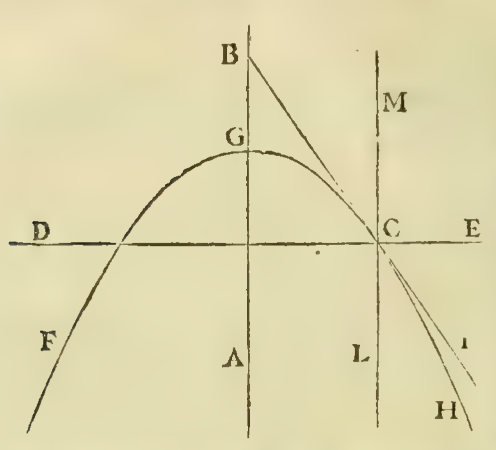
Or

Or la même ligne droite peut aussi être entenduë d'écrite par une infinité d'autres mouvemens, par exemple, par un mouvement droit & un circulaire, comme si la droite A C B se mouvant circulairement autour du centre A, un point, comme C, est porté dans la même ligne en sorte qu'il se trouve toûjours dans la commune section de la même ligne A B, & d'une autre D E: nous dirons que la ligne DE est décrite par un mouvement mêlé d'un droit qui se fait le long de la ligne AB, & d'un circulaire que la même ligne A B communique au mobile qui le décrit par son mouvement droit; & ces deux mouvemens sont tels, quoique bien difformes, que si l'on nous donne de position le point A & la ligne D E, quelque point que l'on prenne dans la ligne D E, la proportion de l'un de ces mouvemens à l'autre sera donné.



Car aïant prolongé la ligne A B par delà la ligne DE, comme en B si du point C auquel nous voulons connoître la proportion de ces deux mouvemens, nous tirons CF perpendiculaire à AB, nous aurons la direction du mouvement circulaire qui se fait en C; mais les deux autres directions sont données, A B du mouvement droit simple, & D E du mouvement composé. Donc les trois

impreſſion nous ſont données, ou la proportion de chacun des mouvemens aux deux autres.

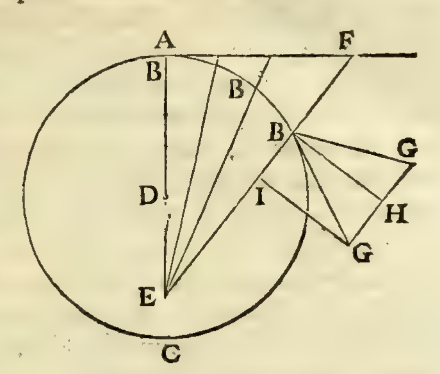


Nous pouvons encore imaginer que la même ligne eſt décrite par un mouvement mêlé de deux, l'un parabolique, l'autre droit, deſquels nous pourrons en comprendre, un uniforme comme ſi la parabole étant portée par un mouvement droit, en ſorte que l'un de ſes diamétres ſoit toûjours ſur la ligne AB, un point C ſe promene de telle ſorte dans la parabole, qu'il ſe maintienne toûjours dans la ligne DE; & en ce cas ſi la touchante de la parabole en C. nous eſt donnée; nous connoîtrons ces trois mouvemens, c'eſt-à-dire les viteſſes de chacun des trois comparé aux deux autres, puiſque leur trois directions nous ſont données, où vous remarquerez que la direction du mouvement droit ſimple eſt la ligne A B, c'eſt-à-dire, une ligne L C M parallele à A B.

Ce que nous avons dit de la parabole ſe doit encore entendre du cercle, de l'hyperbole, de l'ellipſe, & generalement de toute autre ligne; de ſorte que la ligne DE pouvant être entenduë décrite par un mouvement compoſé d'une infinité de mouvemens droits, & chacun de ceux-là d'un droit & d'un circulaire, ou d'un droit & d'un parabolique, &c. vous voyez que la même ligne pourra être décrite par une infinité de mouvemens, cha-

cun différens en espéce de tous les autres.

Et pour montrer que nous pouvons dire du cercle, de la parabole, & d'une infinité de lignes courbes, ce que nous avons dit de la droite; soit la circonférence du cercle ABC, le centre du cercle D, & un point E dans le cercle autre que le centre, & soit tirée la ligne EDA: vous voïez donc que si la ligne EDA tourne autour de E, & qu'en même temps un point B se promene sur la même ligne, en sorte qu'il se maintienne toûjours dans la circonférence ABC, cette circonférence sera décrite par le mélange d'un mouvement droit & d'un circulaire. Et vous voïez encore, que si l'on veut sçavoir la raison de ces deux mouvemens l'un à l'autre, la touchante de la circonférence nous étant donnée en un point, cette raison nous sera donnée en ce même point, comme si la touchante AF nous est donnée au point A, & la position de la ligne EDA, nous verrons que cette ligne étant perpendiculaire à AF, elle est la ligne de direction du mouvement circulaire simple, qui se fait à l'entour du point E; mais elle est aussi la direction du mouvement circulaire composé, puis qu'elle touche la circonférence ABC, par laquelle se doit faire ce même mouvement composé; d'où il s'ensuit que le mobile qui décrit la circonférence ABC par son mouvement, n'a au point A qu'un seul mouvement circulaire, duquel la direction est AF.



Mais si l'on donne la touchante B G en un autre point de la circonférence, comme en B, le point E étant encore donné, nous menerons la ligne E B, qui sera la direction du mouvement droit, & B H sa perpendiculaire sera la direction du mouvement circulaire simple à l'entour du point E; mais la direction du mouvement composé est aussi donnée, sçavoir la touchante B G, nous connoîtrons donc la vitesse de ces trois mouvemens, & nous comparerons chacun deux au deux autres.

Comme au contraire, si l'on nous eût donné les points E & B, & la raison du mouvement droit au mouvement circulaire simple, comme de G H à B H, nous aurions trouvé la touchante du cercle.

Il nous sera aussi facile de concevoir que la même circonférence peut être décrite par un mouvement droit & un parabolique, ou par un droit & un hyperbolique, &c. comme nous avons dit de la ligne droite.

Et pour finir en deux mots cette spéculation, nous pourrons dire de la parabole, de l'hyperbole, & des autres lignes courbes, ce que nous avons expliqué du cercle.

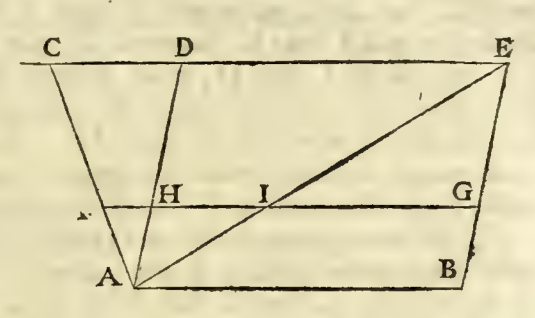
Proposition quatriéme.

Toute cette proposition est mal digerée, & il vaut mieux la passer que de s'y arrêter.

SI deux lignes droites faisant l'une avec l'autre tel angle qu'on voudra, viennent à se mouvoir parallelement chacune à soi-même, en telle sorte qu'elles se puissent toûjours couper l'une l'autre, & que la vitesse de la premiére soit donnée dans la seconde, & la vitesse de la seconde donnée dans une troisiéme, qui fasse tel angle qu'on voudra au point de leur départ: le point qui se rencontrera toûjours dans leur commune section sera porté par trois mouvemens, deux desquels étant réduits à un, l'on trouvera que le mouvement de ce point dans la seconde

ligne aura été hâté, quoique toûjours uniformement, en sorte que par le mouvement composé de ces trois, il aura décrit une ligne d'un mouvement uniforme, &c.

Cette proposition seroit extraordinairement longue, c'est pourquoi nous expliquerons le reste ci-après.



Supposons que la droite AB comprenant tel angle qu'on voudra en A avec la droite AD, l'une & l'autre de ces deux lignes viennent à se mouvoir parallelement à soi-même & uniformement, AB vers D, & AD vers B, & que la vitesse de la ligne DA soit donnée dans AB & la vitesse de AB, soit donnée dans une troisiéme ligne AC, en telle sorte que lors que le point A de la ligne DA sera arrivé en B, en même temps le point A de la ligne BA arrivera en C. Je dis que le point qui se rencontre toûjours en la commune section des deux lignes AB, AD sera porté par trois mouvemens droits, l'un par la ligne AD, & les deux autres par la ligne AB, en sorte que ladite ligne AB étant prolongée à l'infini, il parcourra une plus grande ligne sur AB, qu'il n'eût fait si la vitesse du point A de la ligne AB eût été donnée depuis A jusques en D, & que la ligne qu'il décrira par le mouvement mêlé de ces trois sera le diamétre AE du parallelogramme DB, & que son mouvement sur AE sera uniforme.

La premiére partie de cette proposition est assez intelligible de soi-même, car quand nous ne donnerions point de mouvement à la ligne DA, & que la ligne

A B ſe mouvant, en ſorte que ſon bout A décrivant la ligne A C, un point fût porté le long de AB, commençant ſon mouvement en A à telle condition qu'il dût toûjours être en la commune ſection des deux A B, A D; il eſt clair que ce point auroit deux mouvemens ſur la ligne A D, l'un A C, par lequel la ligne A B s'efforceroit de le porter d'A vers C. l'autre C D, par lequel il ſeroit ramené de C vers D, pour décrire la ligne A D. Mais ſi ces deux mouvemens étant ainſi prouvés, nous faiſons encore mouvoir la ligne AD vers B, ce point aura encore un mouvement par lequel il ſuivra la ligne A D: il eſt donc vrai qu'il a trois mouvemens, &c.

Ce que nous pouvons encore examiner en cette ſorte, poſé que le point A de A B dût parcourir A D, & que A de A D dût parcourir A B, il eſt certain que le point qui ſe rencontreroit toûjours ſur leur commune ſection ſeroit porté par deux divers mouvemens, comme nous avons démontré en notre premiere propoſition: mais faiſant que le point A de A B décrive A C, au lieu de A D, ce point a encore un mouvement par lequel la ligne A B s'efforce de le porter le long de A C, ainſi pour lui réſiſter il faut qu'il ſe hâte davantage ſur A B en ſorte qu'il y décrive une plus grande ligne qu'il n'eût fait, ſi A de A B eût parcouru A D: donc le point a trois mouvemens, &c.

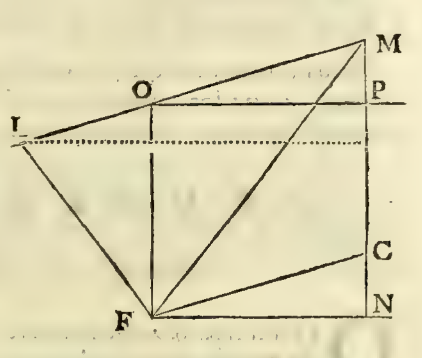
Or nous démontrerons en cette façon que le mouvement composé de ces trois eſt droit & uniforme, & le long du diamétre A E. Car aïant tiré la ligne F H I G parallele à A B coupant, &c. lors que le point A de A B ſera en F, ſi la ligne A D n'a pas changé de place, le point de la commune ſection aura eû deux mouvemens uniformes A F, F H, que nous réduirons à un ſeul AH, par la premiére propoſition, en ſorte que ce point ſera en H, de la ligne A H D. Mais en même temps le point

H de A H D a été porté en I par un mouvement uniforme H I : donc ce point de commune ſection a été porté par deux mouvemens uniforme A H, H I; & partant par la premiére propoſition il a décrit la ligne A I, &c.

Notez qu'il n'étoit pas beſoin de tirer F G, & que le même argument ſe pouvoit faire des lignes A C, C D, & les aïant réduites à A D, compoſer un mouvement des deux A D, & D E.

Cette propoſition ſe doit entendre tres-généralement.

Ainſi ſi la ligne FC ſe meût parallelement à ſoi-même & uniformement, en ſorte que ſon point F, décrive la ligne F L, & qu'en même temps la ligne F O ſe meuve parallelement à ſoi-même & uniformement, en ſorte que ſon bout F doive décrire la ligne F N, le point de commune ſection des deux lignes F C, F O, aura décrit la diagonale F M du parallelogramme O C. Quoique ce point ait été porté de quatre divers mouvemens, * car les deux mouvemens qu'il a en F O, l'un par lequel il court de F vers O, l'autre par lequel la ligne F O tâche de le reculer pour lui faire décrire F N, ces deux mouvemens, dis-je, se réduiſent à un ſeul FC, (car F C eſt le diamétre d'un paralelogramme F N C) & les deux mouvemens qu'il a en F C, l'un par lequel décrivant la ligne F C, il eſt porté de F vers C, l'autre par lequel la ligne F C tâche de lui faire décrire la ligne FL, ces deux mouvemens, dis-je, ſe réduiſent à un ſeul droit & uniforme F O. Donc tous



ces quatre mouvemens étant réduits aux deux FC, FO, par la premiére proposition, par la même proposition le point de commune section des deux lignes F C, F O, aura décrit la ligne F M, qui est ce qu'il falloit démontrer.

* *Je dirois ainsi : Le point* F *en* F C, *se mouvant vers* L M, *a deux mouvemens droits & uniformes*, F L, L O, *qui composent un mouvement droit* F O.

Semblablement le dit point F *en* F O, *se mouvant vers* N M, *a deux mouvemens* F N, N C, *qui composent* F C.

Donc des deux mouvemens F O, F C, *sera composé un mouvement* F M, *qui sera composé de tous ces quatre, &* F M *est diagonale, &c.*

Nous aurons besoin de cette proposition comme d'un lemme, pour les touchantes de la quadratrice, & peut-être de quantité d'autres lignes.

PROBLEME I.

Proposition cinquiéme.

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mêmes mêlez.

Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de propriétez spécifiques, qui nous fassent connoître les mouvemens qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

Le principe est assez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura consideré avec un peu d'attention.

Regle

Regle génerale.

PAR les propriétez ſpécifiques de la ligne courbe (qui vous ſeront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens composéz en un ſeul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonſtration eſt mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle eſt très-générale, & qu'elle peut ſervir à tous les éxemples que nous en donnerons, il ne ſera point à propos de la répéter.

Vous trouverez dans les exemples ſuivans les touchantes des ſections coniques, celles des autres lignes principales qu'ont connu les anciens, & celles de quelques-unes que l'on a décrit depuis peu, comme du Limaçon de Monſieur Paſchal, de la Roulette de Monſieur Rob. de la Parabole du ſecond genre de Monſieur Deſc. &c.

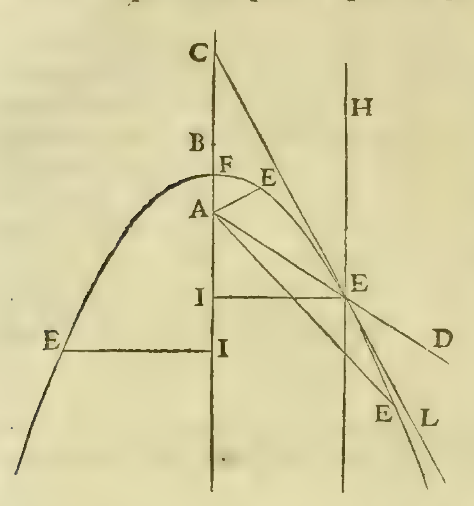
Premier éxemple des touchantes de la parabole.

SOIT que l'on nous ait donné la parabole EFE, & le moyen de le décrire par la cinquiéme méthode générale de Monſieur Mydorge livre ſecond, propoſition 25. qui eſt telle.

Le ſommet & le foyer de la parabole étant donnez de poſition, trouver dans le même plan tant de points qu'on voudra par leſquels la parabole eſt décrite.

Soit A le foyer, & F le ſommet: ſoit tirée la ligne AF & prolongée de F vers B, & ſoit FB égale à AF la même ligne BFA ſera l'axe de la parabole. Prenez dans FA autant de points I qu'il vous plaira, tirez par ces points des lignes perpendiculaires à FA; du

centre A & de l'intervale d'entre chaque perpendiculaire, & le point B comme BI, décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en E, la parabole paſſera par les points E.



Cela poſé ſi l'on demande la touchante de la Parabole au point E, ſoit tiré la ligne A E prolongée comme en D, & la ligne E I perpendiculaire à AB, & encore la ligne H E parallele à à l'axe FAI, alors il eſt clair par la deſcription ci-deſſus, que le mouvement du point E décrivant la Parabole, eſt composé de deux mouvemens droits égaux, dont l'un eſt la ligne A E, & l'autre eſt la ligne H E ſur laquelle il ſe meût de même viteſſe que le point I dans la ligne B A, laquelle viteſſe eſt pareille à celle de la ligne A E par la conſtruction, puiſque A E eſt toûjours égale à B I. Partant puiſque la direction de ces mouvemens égaux eſt connuë, ſçavoir ſuivant les lignes droites A E D, H E données de poſition, ſi vous diviſez l'angle A E H en deux également par la ligne L E C: qui eſt le diamétre d'un rhombe autour de l'angle A E H, (& par conſéquent la direction du mouvement composé des deux HE AE,) la ligne L E C ſera la touchante.

Avant que de paſſer outre, remarquez deux choſes.

La premiére, que nous n'avons pas voulu confidérer le point E comme commune fection de deux lignes, dont lignes, dont l'une A E infinie fe meut circulairement autour du point A; l'autre I E auffi infinie defcend parallement à foi-même, aïant toûjours fon extrémité I dans la ligne B A, puifqu'il a été plus facile de confidérer les mouvemens A E, H E du point E en chaque endroit de la fection de ces lignes. Secondement, nous avons dit que les mouvemens A E, H E fon égaux l'un à l'autre, ce qui fera vrai, quelque point de la parabole que nous prenions pour E. Mais il ne s'enfuit pas que tous les mouvemens d'un point E foient égaux à tous les mouvemens d'un autre point E de la parabole, chacun d'eux n'en aiant qu'un réciproque de l'autre côté de la parabole & également éloigné du fommet. Vous entendrez la même chofe en toutes les autres lignes courbes.

Pour montrer que notre façon de trouver les touchantes de la Parabole, s'accorde avec celle d'Apollonius livre 1. propofition 33, & pour le trouver en quelque façons analitiquement, pofons qu'il foit vrai que L E C touche la Parabole en E. Si donc nous abaiffons l'ordonnée E I, I F fera égale à F C, & ajoûtant F B à I F, & F A à C F, les toutes C A & I B feront égales (car les ajoûtées le font par la conftruction) mais I B eft égale à A E par notre conftruction, donc C A & A E font égales, & l'angle A C E égal à l'angle A E C; mais par notre conftruction nous avons divifé l'angle A E H en deux également, & par conféquent nous avons fait AEC, C E H égaux entr'eux, donc A C E eft égal à C E H fon alterne, ce qui eft vrai, car par la conftruction E H, eft paralelle à C I.

Ou fi vous aimez mieux, puifque CI, EH font paralleles, l'angle A C E eft égal à C E H; mais par la con-

ſtruction C E H eſt égal à A E C, donc A C E & AEC, ſont égaux, & le triangle A C E iſoſcéle, donc C A eſt égale à A E. Mais encore par la conſtruction A E eſt égale à B I, C A eſt donc égale à B I, & en ôtant les égales A F, B F, C F ſera égale à F I, & par conſequent la ligne CE touche la parabole, ce qu'il falloit démontrer.

Que ſi l'on nous eût donné la deſcription de la parabole par un point, comme E ſe promenant le long de la ligne I E du mouvement uniforme, en même temps que la ligne IE deſcend parallelement à ſoi-même, d'un mouvement très-inégal, mais tel que le quarré de I E eſt toûjours égal au rectangle ſous I F, & une ligne donnée nommée P, qui en ce cas eſt le côté droit de la Parabole, il auroit fallu démontrer ce problême.

La premiére (comme P) de trois lignes continuellement proportionnelles nous étant donnée, & un mouvement égal dans la ſeconde I E trouver le mouvement qui ſe fait dans la troiſiéme F I, ce qui eſt un peu plus long, &c.

L'on pourroit encore propoſer le moïen de décrire la Parabole par quelques autres de ſes propriétez, ce qui ſeroit plus difficile.

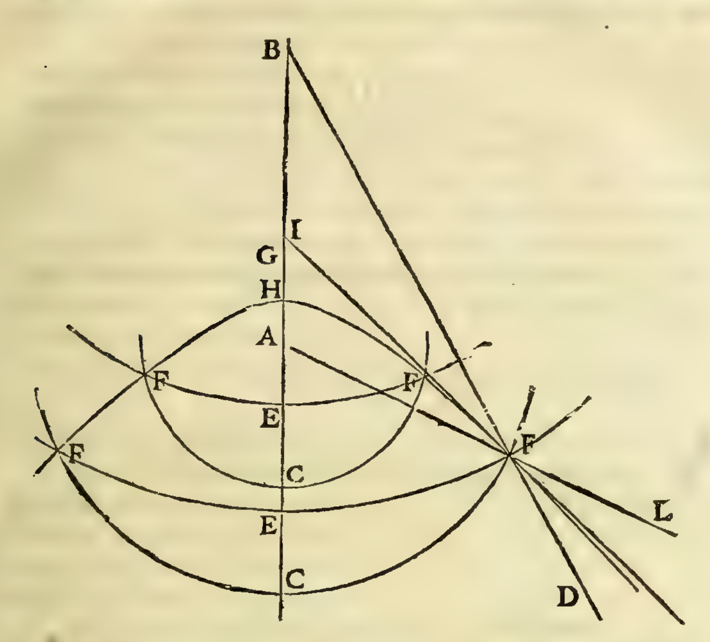
Second éxemple des touchantes de l'Hyperbole.

NOUS la décrirons avec M. Myd. liv. 2. prop. 26. en cette ſorte.

Le ſommet & le deux foyers ou points de comparaiſon de l'Hyperbole étant données de poſition, décrire l'Hyperbole par des points dans le même plan.

Soient les foyers A B, & H le ſommet, donc la ligne droite A B paſſera par H. Prenons H G égale à H A, & prenons dans H A, prolongée, s'il en eſt beſoin, tant de points que nous voudrons, comme E, par leſ-

quels de B comme centre décrivons des arcs de cercle



EF, & du centre A & de l'întervale, dont chaque point E est éloigné de G, d'écrivons d'autres arcs de cercle CF, qui coupent les premiers, comme en F, l'Hyperbole passera par tous les points F.

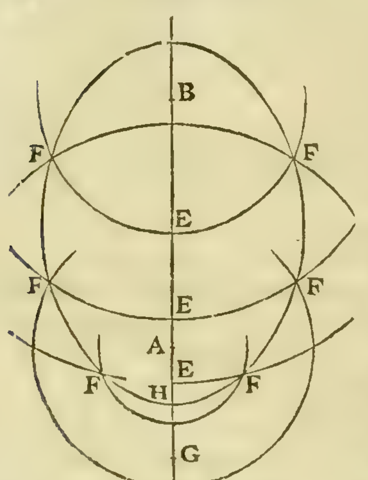
Cela posé, si je veux tirer la touchante de l'hyperbole, comme en F, aiant prolongé AF, comme en L, & BF, comme en D, sans m'amuser à considérer que l'hyperbole est décrite par le point F, qui est toûjours la commune section des deux lignes droites BFD, AFL, lesquelles se meuvent circulairement, la premiére autour du centre B l'autre au tour du centre A, je vois qu'en quel lieu que je prenne le point F, si je le considére décrivant l'hyperbole à commencer du som-

met, il a deux mouvemens ; l'un, par lequel il s'éloigne d'A, le long de la ligne A L ; l'autre par lequel il s'éloigne de B le long de la ligne BD. Puis donc qu'il s'éloigne également d'A & de B, & que les deux directions sont F L, F D, aiant fait un rhombe duquel l'angle soit D F L, c'est à sçavoir, aiant divisé l'angle D F L, en deux parties égales pour avoir le diamétre de ce rhombe, qui sera la direction du mouvement composé, la ligne MFI qui partage cet angle sera la touchante de l'hyperbole.

Apoll. démontre liv. 3. prop. 48. que l'angle I F A est égal à l'angle I F B.

Troisiéme exemple des touchantes de l'Ellipse.

VOICY comme M. Myd. la décrit par sa cinquiéme méthode générale, l. 2. prop. 27.

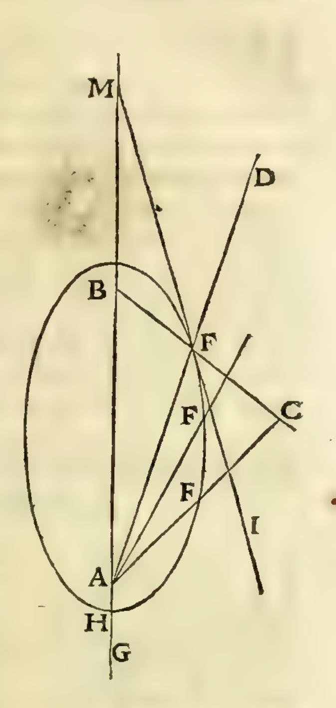


Les deux foyers, & l'un ou l'autre sommet de l'ellipse étant donnez de position, d'écrire l'Ellipse par des points touvez sur le même plan.

Soient les foyers ou points de comparaison A & B, & H le sommet.

Donc la droite A B prolongée passera par H, soit pris H G égale à AH, & du centre B de tant & de tels intervales qu'on voudra plus grands pourtant que A H, & moindres que B H, comme B E, décrivez des arcs de cercle, comme E F, & du centre A & de l'intervalle, qui est entre cha-

cun de ces arcs, & le point G décrivez d'autres arcs qui coupent chacun des premiers, comme en F, l'Ellipſe paſſera par les points F F.



L'Ellipſe étant ainſi d'écrite, s'il faut tirer ſa touchante comme en F, aiant tiré les lignes B F C & A F D, ſoit que je conſidére les deux mouvemens du point F en B C, & A D, ou comme s'éloignant de B dans F C, auquel cas il s'approche d'A dans F A, ou comme s'éloignant d'A dans F D, auquel cas il s'approche de B le long de F B, puiſque le point F s'éloigne autant de l'un des points A B, qu'il s'approche de l'autre, & que les directions de ces deux mouvemens ſont B F C, & A F D, je n'ai qu'à diviſer l'un des deux angles A F C, ou B F D en deux également par la ligne I F M, elle ſera la touchante de l'Ellipſe.

Apoll. dans la même 48. du troiſiéme veut que l'angle A F I ſoit égal à l'angle B F M, ce qui s'accorde à notre méthode, car les angles A F C, B F D (au ſommet l'un de l'autre) étant égaux, leurs moitiez A F I, B F M le ſeront auſſi, ce qu'il falloit démontrer.

J'oubliois de mettre en deux mots la conſtruction de ces trois éxemples, pour ſervir de régle générale.

Pour tirer les touchantes des ſections coniques.

POUR la Parabole, étant donné le ſommet & le foyer par le point où vous voulez la touchante, tirez une ligne parallele à l'axe, & une autre ligne juſques au foyer, diviſez en deux également des quatres angles que ces deux lignes font, les deux que le parabole coupe, la ligne qui fera cette diviſion ſera la touchante.

Pour l'Hyperbole & l'Ellipſe, les deux foyers étant donnez par le point où vous voulez la touchante, tirez deux lignes aux deux foyers des quatre angles que ces lignes feront en ce point, diviſez en deux égalément les deux oppoſez que la ſection conique coupe, la ligne qui fera cette diviſion ſera la touchante.

Quatriéme éxemple des touchantes de la Conchoïde de deſſus, de Nicomede.

BIEN que l'on puiſſe décrire une infinité de lignes courbes, chacune deſquelles ſera conchoïde & aſymptote à une même ligne droite, ſi eſt-ce que nous n'en conſidérons que de deux ſortes ou genres, ſuivant qu'elles ſont décrites, ou entre leur pole & la ligne droite, qui leur ſert de baſe, régle ou aſympote, ce que nous appellons la conchoïde de deſſous; ou que cette ligne droite ſoit entre le pole & la conchoïde, ce que nous appellons la conchoïde de deſſus, ou de Nicomede; parce que, quoique leurs courbures ſoient toutes différentes les unes des autres, n'éant moins la méthode pour en trouver les touchantes n'en conſidére que ces deux cas.

Vous remarquerez que le pole de la conchoïde ne peut pas être dans la ligne qui ſert de régle ou de baſe à la conchoïde, car la ligne qui ſeroit décrite de cette ſorte ſeroit

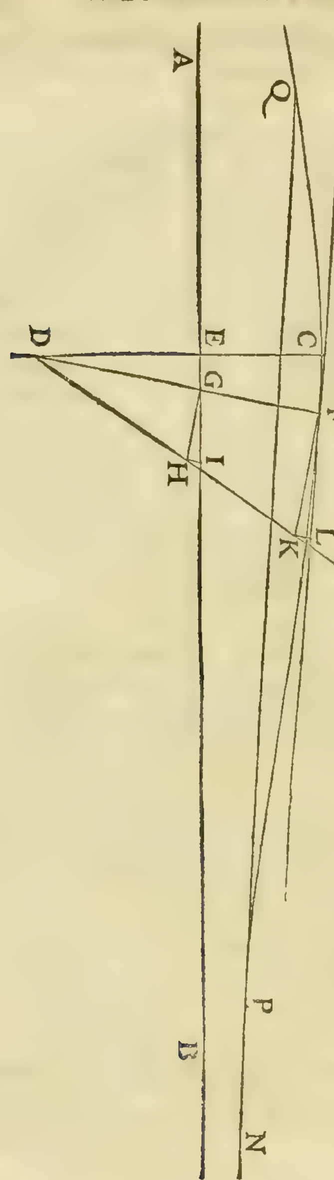
ſorte ſeroit un demi-cercle, dont la ligne droite qu'on auroit priſe pour baſe de la conchoïde, ſeroit le diamétre, &c.

La Conchoïde de deſſus ſe décrit en cette façon.

Soit la droite infinie AD à laquelle il faut tirer une conchoïde, de laquelle le ſommet ſoit C. Du point C tirez C D perpendiculaire à AB coupant A B en E, & dans C D prenez un point comme D, en ſorte que la ligne A B ſoit entre les deux points C & D, puis de D tirez quantité de lignes occultes, comme DGF, DIH, &c. vers la ligne A B qui la rencontrent en GIL &c. puis prenez les lignes G F, I H, L K, chacune égale à EC, la Conchoïde paſſera par les points F H K &c.

Aïant ainſi décrit la Conchoïde, il ſera facile d'en tirer les touchantes, par exemple au point F.

Conſidérons que la conchoïde eſt décrite par deux mouvemens du même point; l'un par lequel il monte le long de la ligne



D F ; l'autre par lequel la ligne D F se mouvant circulairement sur le centre D, emporte le même point de C par F vers K ; & bien que nous sachions que les directions de ces deux mouvemens sont l'une la ligne D F pour le mouvement droit, l'autre F K perpendiculaire à D F par notre principe, pour le mouvement circulaire, si est-ce que nous n'en sçaurions découvrir la raison ne le considérant que dans la conchoïde si nous connoissons la touchante de la conchoïde, qui est la direction du mouvement composé de ces deux. Cela nous oblige à éxaminer ou les mêmes mouvemens, ou d'autres qui leur soient proportionnez hors de la conchoïde.

Or il est très-facile de les examiner dans la ligne droite, qui est la régle ou base de la conchoïde, si nous conside-

rons qu'elles eſt décrite par un point G, qui monte dans la ligne D G F, autant que fait le point F dans la même ligne D G F; car puiſque les lignes E C, G F ſont égales par la conſtruction, l'excés de la ligne D F ſur la ligne D C eſt le même que l'excés de D G ſur D E. Donc le point E eſt autant monté allant de E juſqu'à G, que le point F allant de C juſqu'à F. Et pour le mouvement circulaire de G, non ſeulement nous ſçaurons la raiſon qu'il a avec le mouvement droit G, leurs deux directions & celle de leur mouvement composé nous étant données, mais auſſi nous ſçaurons la raiſon qu'il a avec le mouvement circulaire F en cette façon.

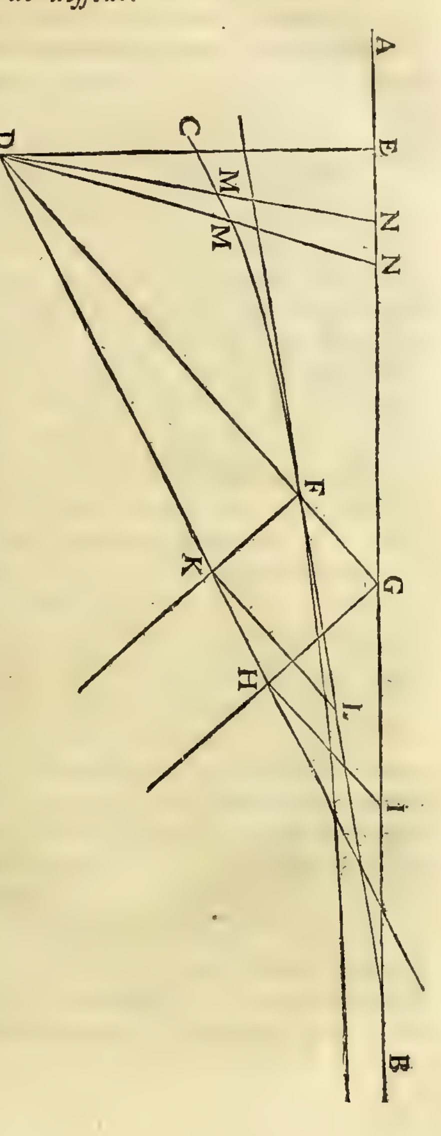
Tirez G H perpendiculaire à D G; d'un point de DH comme H, tirez H I paralelle à D G, qui couppe la regle E G B en I: vous avez donc la raiſon du mouvement circulaire G au mouvement droit G, comme de G H à H I; & puis que le mouvement droit G eſt égal au mouvement droit F, reſte d'avoir la raiſon du mouvemens circulaire F au mouvement circulaire G; & parce que ces mouvemens ſont entr'eux comme les circonférences de leurs cercles, c'eſt-à-dire en même raiſon que leurs demi-diamétres D F, D G, il faut donc faire que comme D G à D F, ainſi G H ſoit à une ligne priſe dans F K. Or la conſtructions en eſt très aiſée car vous n'avez qu'à tirea la ligne DHK rencontrant F K en K, d'autant que les triangles DGH, D F K ſeront ſemblables. Vous avez donc la raiſon du mouvement circulaire F au mouvement droit F, comme de F K à KL ou H I. Donc ſi par K vous tirez KL parallele à DF, & égale à H I; puiſque les deux FK, KL ſont les directions des deux mouvemens F, & en même raiſon que ces deux mouvemens, la droite L F étant menée, elle ſera la direction du mouvement composé de ces deux, c'eſt-à-dire, la touchante de la Conchoïde; ce qu'il falloit faire.

En deux mots le Pole D & la régle A B de la Conchoïde étant donnez de position, & un point de la Conchoïde F, tirez DF qui coupe A B en G, sur les points G & F, tirez G H & F K perpendiculaires à D F, faites l'angle F D K aigu *ad libitum*, tirant la ligne D K qui couppe G H en H, & F K en K, tirez H I paralelle à D F coupant A B en I, puis tirez K L égale & parallele à H I, le point L sera dans la touchante au point F.

Remarquez que d'autant que la Conchoïde change de courbure, le point L se peut rencontrer entre la Conchoïde & sa base ou régle A B, puis qu'en ce cas le convexe étant en dedans, la ligne L F la touche aussi en dedans entre la droite AB.

Remarquez encore qu'au lieu que les touchantes du Cercle, de la Parabole, de l'Hyperbole & de quantité d'autres lignes ne rencontrent ces mêmes lignes qu'au point de l'atouchement; en la Conchoïde tout au contraire la ligne FL étant prolongée vers L coupera la Conchoïde prolongée vers N, & la touchante d'un point du convexe en dedans, comme de P, étant prolongée du côté du sommet C de la Conchoïde, rencontra la conchoïde comme en Q, ce qui est évident, puisque ces touchantes (excepté celle du sommet C) n'étant point paralleles à la ligne AB, rencontrent nécessairement la même ligne ; & partant, puis que l'inclinaison de la touchante FL est vers L, & que la Conchoïde passe entre L & AB, elle rencontrera nécessairement la Conchoïde, & la coupera vers L comme en N, ce que la touchante du point P ne pourra pas faire, quoi qu'elle ait son inclinaison sur AB, de même côté que L : d'autant que vers cet endroit elle est plus proche de A B que n'est pas la Conchoïde, mais elle rencontrera la Conchoïde vers le sommet C, ou audelà, comme en Q, d'autant qu'elle s'éloigne de A B vers ce côté-là, où au contraire la Conchoïde commence en C de s'en approcher.

Cinquiéme éxemple des touchantes de la Conchoïde de dessous.



NOUS nous servirons mot à mot de la régle de l'éxemple précédent; & pour en faire l'application, il ne faut que sçavoir d'écrire cette ligne.

Soit en cette la figure la ligne droite & infinie A B, que nous prenons pour la régle ou base de notre Conchoïde de dessous, & d'un point de la même ligne comme E, soit la perpendiculaire E D à la même ligne, dans laquelle perpendiculaire prenons deux points C & D, le plus proche C pour le sommet de notre Conchoïde, & le plus éloigné D pour son Pole: alors aïant tiré au point D quantité de lignes occultes DMN, qui coupent AB en N, si en chacune de ces li-

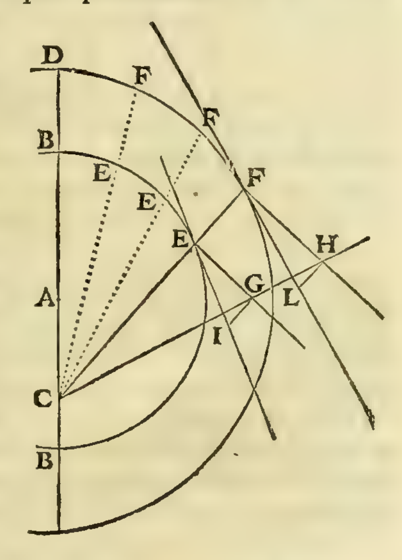
gnes D M N de son point N, nous prenons N M égale à C E, nous aurons dans chacune de ces lignes un point M, par lequel notre Conchoïde est décrite.

Cela posé, puis que la seule différence, que nous remarquons entre les deux mouvemens du point qui décrit cette ligne, & les deux qui décrivent sa base, d'une part; & les mouvemens semblables qui décrivent la premiére Conchoïde, & sa base n'est autre, sinon qu'en celle-ci le mouvement circulaire de la ligne est moindre que le mouvement circulaire de sa base; au lieu qu'en l'autre le mouvement circulaire qui décrivoit la ligne étoit le plus grand, & qu'en l'une & l'autre le mouvement droit de la ligne est égal au mouvement droit qui en décrit la base, & qu'encore en l'une & l'autre l'on peut comparer le mouvement circulaire de F au circulaire G par le moïen d'une ligne D K H, qui fait un angle aigu G D H arbitraire avec la ligne G D, & laquelle ligne D K H coupe les lignes G H, F K perpendiculaires à la ligne D G aux points H & K : voulant tirer la touchante de cette ligne en un point, comme en F, je tire la ligne D F, que je prolonge jusques à ce qu'elle rencontre la régle A B en G, & sur icelle des points F & G je tire deux perpendiculaires F K, G H, qu'une ligne arbitraire D H coupe en K & en H; du point H je tire H I parallele à D G coupant AB en I. J'ai donc, comme nous avons déja dit au précédent exemple, la raison du mouvement circulaire du point G de la ligne D G (posé que ce point doive décrire la régle A B) au mouvement droit du même point, comme G H à H I; mais ce mouvement étant G H, le mouvement circulaire du point F de la ligne D F G décrivant la Conchoïde sera F K, & le mouvement droit du point F est égal au mouvement droit du point G : je tire donc K L égale & parallele à H I; & puis que la Conchoïde, & par conséquent sa

touchante est décrite par un mouvement mêlé des deux F K, K L, la ligne L F sera sa touchante au point F; ce qu'il falloit faire.

Sixiéme éxemple de quelques autres Conchoïdes.

L'ON peut décrire des Conchoïdes aux lignes courbes aussi-bien qu'à la ligne droite; & pour en trouver les touchantes, il faut premiérement connoître la touchante de la ligne courbe, qui est comme la régle ou base de la Conchoïde: or nous n'avons pas eû besoin d'une touchante de la régle ou base aux deux éxemples précédens, parce qu'à proprement parler il n'y a que les lignes courbes qui aïent des touchantes; l'on peut néanmoins dire que la ligne droite n'aïant point d'autre touchante, elle peut être considérée comme se touchant soi-même, & que c'est en cette façon que nous l'avons considérée aux deux éxemples précédents.



Pour donner une éxemple de ces Conchoïdes, soit proposé un cercle duquel le rayon est AB, le centre A, & soit pris un point dans A B, prolongée, ou non, comme C, lequel nous prendrons pour le Pole de notre Conchoïde; puis aïant prolongé C A B hors le cercle, comme en D, soit pris B D arbitraire pour l'intervalle de notre Conchoïde; enfin du Pole C tirons quantité de lignes occultes C E F coupant

le cercle en E, & prenons du point E dans lesdites lignes les intervalles EF égaux à BD, & d'une même part que B D, c'est-à-dire, en dehors du cercle si nous avons pris D en dehors dans le diamétre prolongé, ou en dedans si le point D a été pris en dedans cette Conchoïde passera pars le point F F F &c.

Or il est fort facile de tirer la touchante de cette ligne si nous considérons qu'elle est décrite par un mouvement mêlé d'un droit & d'un circulaire, desquels la direction nous étant donnée, il est très-facile de trouver la raison de l'un à l'autre; car si nous voulons tirer une touchante de cette ligne en un point comme F, aïant tiré la ligne C F qui coupe la circonférence du cercle en E, & des points F E aïant tiré les perpendiculaires F H, E G sur la ligne C F; il est aisé de remarquer que la ligne C B D aïant tourné sur le centre C, & aïant changé la position par laquelle elle n'étoit qu'une même ligne avec C E F, son point B est descendu en E, pour décrire le cercle, & son point D est descendu en F, pour décrire la Conchoïde du cercle, & qu'il s'ensuit que la ligne C E F est la direction du mouvement droit de chacun de ces points & de celui qui décrit le cercle, & de celui qui en décrit la Conchoïde, & les lignes EG, F H sont les directions des mouvemens circulaires. Or les mouvemens droits sont égaux, puis que la différence des lignes C D & C F est égale à celle des lignes C B & C E, de sorte qu'il ne reste qu'à connoître la quantité de l'un de ces mouvemens droits, & la raison des mouvemens circulaires entr'eux. Pour cet effet tirez E I touchante du cercle, & C H qui fasse un angle aigu avec C F (comme nous avons fait en la Conchoïde ci-dessus) & qui coupe E G, F H en G H, les directions des trois mouvemens EC, EG, EI étant données trouvez-en les proportions, ce que vous ferez tirant

tant GI parallele à CF, le mouvement droit du point E ſera GI, & ſon mouvement circulaire ſera EG: mais le mouvement circulaire étant EG, le mouvement circulaire du point F eſt FH (à cauſe que ces deux mouvemens ſont entr'eux, à ſçavoir EG à FH, comme le demi-diamétre CE eſt à CF) vous n'avez donc qu'à prendre HL égale & parallele à GI, pour le mouvement droit du point F, & tirer la ligne de direction LF de celui que les deux FH & HL compoſent, & vous aurez la touchante de cette Conchoïde; ce qu'il falloit faire.

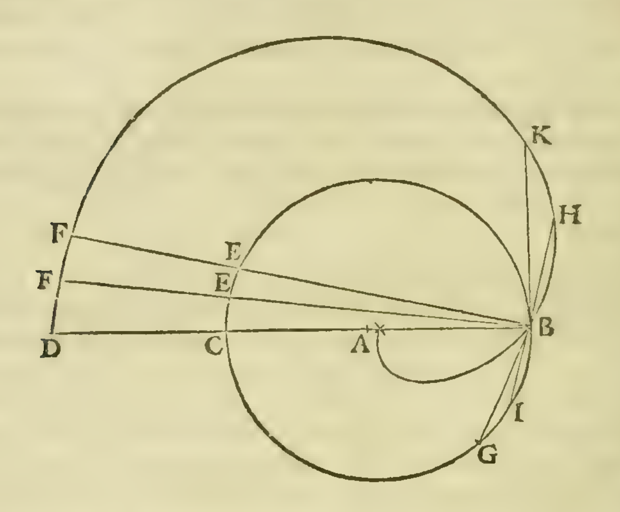
Dans la figure de cet exemple nous avons pris le point C au dedans du cercle, & le point D en dehors: nous euſſions pû les prendre ou tous deux en dedans, ou tous deux en dehors, ou le Pole en dehors, & le point de l'intervale en dedans. De plus nous pouvions prendre l'intervale plus grand ou plus petit, de ſorte que notre Conchoïde eût fort approché de la figure d'une Ellipſe. Enfin de quel intervale que nous euſſions décrit notre Conchoïde, ſi nous euſſions pris pour ſon Pole le point A centre du cercle, il eſt évident que notre ligne eût auſſi été un cercle: mais ces choſes étant très-faciles, la méthode d'en tirer les touchantes n'aïant en toutes ces lignes qu'une même application, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Mais nous remarquerons en paſſant, que l'on peut tirer des Conchoïdes par cette même méthode, & en tous ces divers cas à l'Ellipſe & aux autres ſections coniques, & généralement à toutes les lignes courbes, même aux Conchoïdes &c. & en tout ces cas l'application de notre mêthode de tirer les touchautes ſera toûjours la même, ſi nous ſuppoſons qu'on nous ait donné la touchante de la ligne principale, dont nous examinons la conchoïde, ou des propriétez ſpécifiques pour la trouver,

Septiéme exemple, du Limaçon de M. P.

C'est encore une espéce de Conchoïde de cercle, de laquelle voici la description.

SOIT proposé le cercle C G BE, duquel le centre est A, le diamétre B C prolongé autant qu'il sera besoin, comme en D soit pris B pour le Pole de notre

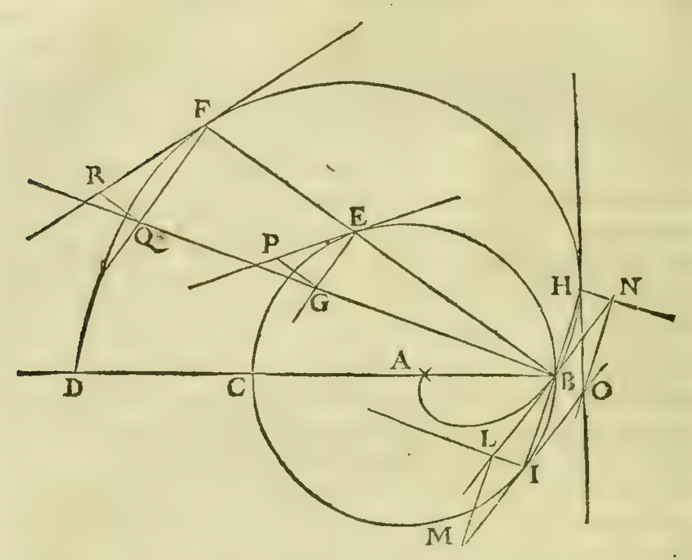


Limaçon, & C D pour l'intervale duquel on se doit servir pour le décrire, moindre que le diamétre. De B tirez quantité de lignes occultes BEF, qui coupent la circonférence du cercle en E, & prenez EF en chacune de ces lignes égale à CD, & de même côté, le Limaçon passera par tous ces points FF. Or il faut remarquer que l'on prend autant d'intervalles que l'on peut à commencer de la partie convexe du cercle, qui est d'un même côté que le Limaçon au regard de la ligne D C B, & que voulant

continuer cette ligne il faut prendre les points E dans l'autre demi-circonférence, qui a ſa concavité tournée vers le Limaçon, ainſi le point B du Limaçon eſt le réciproque du point G de la circonférence du cercle lors que B G eſt égale à C D; & le dernier point du Limaçon que nous avons marqué d'une petite * eſt le réciproque du point C, & les points du Limaçon d'entre B & * ſont les réciproques des points de la circonférence G C, comme les points les plus proches de B au-deſſus du diamétre CB dans le même Limaçon, ſont les réciproques des points de la circonférence G B, ainſi H eſt le réciproque du point I juſqu'au point K qui eſt le réciproque du point B, & vous voïez par là la vérité de ce que nous avions remarqué que l'intervalle C D ne doit pas être plus grand que le diamétre C B, car autrement l'on ne pourroit pas décrire la portion * B du Limaçon, même ſelon les divers intervales que l'on auroit pris, on n'auroit pas pû décrire la portion du même Limaçon la plus proche de B au deſſus du diamétre C B. Il eſt vrai que pour ce qui eſt de cette méthode des touchantes, il ne nous importe point que cette ligne ſoit grande ou petite, entiére & terminée en un point du demi-diamétre A B, ou tronquée &c. parce que les mouvemens de la deſcription de l'une & de l'autre de ces lignes étant par tout les mêmes, l'on en donne les touchantes de la même façon. Mais voulant examiner un autre moïen de décrire cette ligne, & dire quelque choſe de ſon uſage, ce que nous ferons ci-après, il y a fallu ajoûter cette reſtriction.

Il eſt auſſi facile de tirer les touchantes de cette ligne que des Conchoïdes prêcedentes, la méthode en eſt la même, & les deux mouvemens, l'un droit, l'autre circulaire, qui décrivent cette ligne, ſe doivent examiner de la même façon: car il faut conſidérer que la

ligne BEF se mouvant circulairement autour du Pole B jusqu'à ce qu'elle ait la position de BCD, les deux points E & F s'éloignant de B, montent dans la ligne

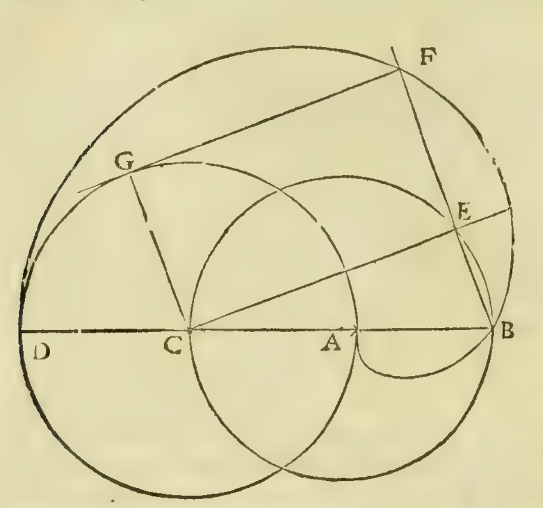


vers D: or puisque EF est égale à CD, la différence des lignes BE, BC est égale à la différence des lignes BF, BD; d'où il suit que le point E qui décrit le cercle a le même mouvement droit dans la ligne BEF, que le point F qui décrit le Limaçon, de sorte que connoissant le mouvement droit du point E nous connoîtrons aussi le mouvement droit du point F: il reste donc à examiner les mouvemens circulaires de ces deux points, desquels les directions sont perpendiculaires à la ligne BEF. Tirez donc les perpendiculaires EG & FQ, & prenez dans EG sa partie EG *ad libitum*, pour la quantité du mouvement circulaire du point E, tirez encore la ligne BGQ, puis faites que comme le demi diamétre BE est au demi-dia-

métre BF, ainſi EG ſoit à QF (ce qui ſe fera par le moïen de la ligne BGQ, faiſant un angle aigu *ad libitum* avec BF; & coupant EG en G, & FQ en Q) ſuppoſé donc que le mouvement circulaire E ſoit EG, la quantité du mouvement circulaire F ſera FQ; mais ſuppoſé EG pour la quantité du mouvement E, l'on trouve que le mouvement droit E eſt égal à GP (ce qui ſe fait, aïant tiré la touchante du cercle PE, par le moïen de la ligne GP parallele à BE, & coupant la touchante en P) comme nous avons rémarqué, & le mouvement droit de F eſt égal à celui de E, comme nous l'avons expliqué ci-devant. Suppoſé donc FQ pour la quantité du mouvement circulaire F, le mouvement droit ſera GP, c'eſt-à-dire QR égale & parallele à GP; le point R eſt donc donné, & par même moïen RF pour la direction & la quantité du mouvement mêlé des deux FQ, QR, c'eſt-à-dire, notre touchante; ce qu'il falloit faire. (*Voïez la Fig. préced.*)

Remarquez qu'on doit toûjours examiner les deux mouvemens dans le cercle au point réciproque de celui de la Conchoïde, pour lequel nous cherchons la touchante; comme par exemple, ſi l'on vouloit tirer la touchante du Limaçon au point H aſſez proche de B, aïant tiré la ligne HB, & l'aïant prolongée juſqu'à ce qu'elle coupe le cercle en I, qui ſera dans le cercle le point réciproque du point H, comme C eſt réciproque de D, car par la conſtruction HI eſt égale à CD, il faudra examiner les deux mouvemens du point I, & en aïant trouvé la raiſon, chercher la raiſon de ſon mouvement circulaire au mouvement circulaire de H &c. En deux mots imaginant que la ligne HI tourne ſur le point B, & que la partie BI eſt portée en dedans du cercle vers C, aïant tiré la perpendiculaire IL vers le côté de C, & par conſéquent la perpendiculaire HN vers l'autre côté, pour

les deux directions circulaires ; puis aïant trouvé la raison des deux mouvemens I, comme de IL à LM (par le moïen de MI touchante du cercle BIC) &c. il faudra faire que comme BI est à BH, ainsi IL soit à HN, puis aïant pris NO égale & parallele à IM, la ligne OH menée par le points O & H, sera la touchante de notre Limaçon.



L'on peut dire que cette ligne est décrite par le moïen d'une double équerre CEFB, de laquelle les côtez CE, EB sont prolongez autant qu'il est besoin. Or il n'est pas besoin que chacun d'eux soit plus grand que le diamétre CAB du cercle CEB, & l'autre côté EF est toûjours égal à l'intervale que l'on prend de chaque point du cercle jusqu'à son réciproque dans le Limaçon ; de sorte que faisant tourner l'angle droit CEB, en sorte que son point E décrive le demi-cercle CEB, ce qui se fait lui donnant diverses positions, & toutes dans un même plan, & à condition que la ligne CAB doive être toûjours l'hypotenuse des triangles rectangles qu'elle fera avec les parties de GE & EB, l'on n'a qu'à marquer dans le même plan tous les points que

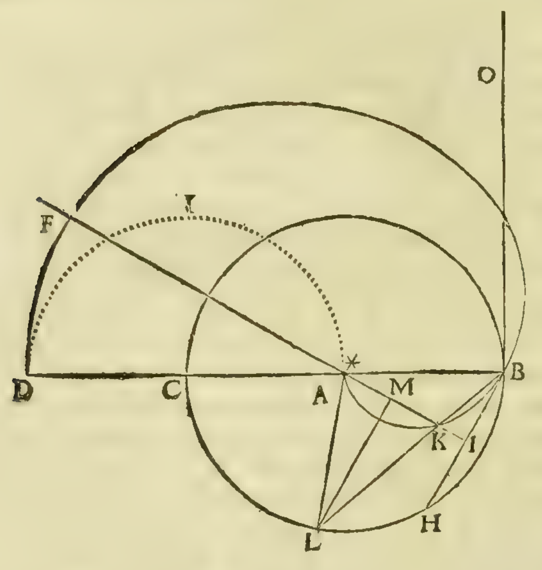
le point F de la double équerre aura décrit.

Or ſur cette ſuppoſition l'on trouvera les touchantes de cette ligne de la même façon que nous avons déja fait, parce qu'encore qu'on ne conſidére pas le point F, comme ſe promenant le long de la ligne BEF, & même que cette ligne tourne circulairement ſur le Pole B, l'on ne laiſſe pas de connoître les deux mouvemens que lui donne la ligne BEF, qui en cette ſeconde ſuppoſition tournant ſur le point B, s'éleve en même temps peu à peu pour conduire l'angle droit B E C de B en C ſur la circonférence du demi-cercle B E C.

Mais voici une des belles ſpéculations qui ſe puiſſe ſur la deſcription de cette ligne, & par le moïen de laquelle elle a été trouvée par le ſieur de Roberval.

Soit propoſé le cercle C E B, & l'intervalle C D comme aux figures précédente : du point C & de l'intervale C D ſoit décrit le cercle DG*; je dis que ſi ce dernier cercle D G* eſt la baſe d'un Cone ſcalene du ſommet duquel, que nous appellerons S, la perpendiculaire SB tombe en B ſur le plan du cercle DG*; aïant tiré des touchantes GF à ce cercle, & du point S tiré des lignes SF perpendiculaires à ces touchantes, que chacun des points F ſera dans notre Limaçon, ou ſi vous aimez mieux que la ligne qui paſſe par tous ces points FF eſt la même que le Limaçon du cercle C E B, dont le Pole eſt B, & l'intervale eſt C D. Car ſi du point B vous joinez la ligne BF, il eſt certain par un coroll. de la 6. du 11. qu'elle ſera perpendiculaire à G F. Du centre C tirez CE parallele à G F, & qui coupe BF en E; GE ſera donc un parallelogramme réctangle, & la ligne E F ſera égale à C G, c'eſt-à-dire à C D; mais l'angle C E B étant auſſi droit, il eſt dans un demi-cercle décrit ſur le diamétre C B. Il s'enſuit donc que nous trouverons toûjours un même point F, ſoit aïant décrit le cercle D G*, &

ayant tiré ſa touchante GF & de S ſommet du Cone aïant mené la ligne SF, ſoit aïant décrit un cercle CEB, & tiré la ligne BEF coupant le cercle en E, & pris EF égale à DC demi-diamétre du premier cercle: mais nous avons montré que trouvant des points F par cette ſeconde méthode, nous décrivons le Limaçon du cercle CEB, & partant trouvant les points F de la premiére façon, puiſqueces points ſont les mêmes, nous décrirons auſſi notre Limaçon; ce qu'il falloit démontrer.



Je dirai en paſſant une propriété de la petite portion de cette ligne qui eſt telle que ſi l'on prend l'intervale DC égale au demi-diamétre CA, du cercle auquel on décrit le Limaçon, & que de cet intervale l'on décrive le Limaçon, ſa petite portion * B ſervira à couper un angle rectiligne propoſé en trois parties égales. Cette propriété eſt du ſieur Paſchal.

Car ſoit propoſé l'angle DBH, dans l'une des deux lignes, qui le contient, comme DB, je prends le point *, duquel j'abaiſſe * I perpendiculaire ſur l'autre ligne BH,

BH, & qui coupe la partie * KB du Limaçon (décrit du Pole B au cercle dont le centre eſt *, le rayon * B & l'intervale du même Limaçon CD eſt égal à * B) en K, je tire la ligne BKL, je dis qu'elle fait avec la ligne BH l'angle KBH $\frac{1}{3}$ de l'angle propoſé CBH.

Pour le prouver ſoit décrit le cercle du Limaçon & la ligne BK prolongée juſqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence dudit cercle en L, tirez L *, & ayant diviſé * K *bifariam* en M, joignez LM, laquelle ſera perpendiculaire ſur * K; car à cauſe du Limaçon, le triangle *LK a les côtez L*, & LK égaux, étant égaux à un même CD. Puis donc que les triangles LMK, BIK ſont réctangles, & ont les angles oppoſez égaux, ils ſont ſemblables, & l'angle MLK égal à IBK, mais MLK n'eſt que la moitié de l'angle * LK (parce que le triangle *LK eſt iſoſcele, & ſa baſe * K diviſée *bif.* &c.) c'eſt-à-dire, de * BL, (car le triangle * LB eſt encore iſoſcele) & partant l'angle KBH n'eſt que $\frac{1}{2}$ de l'angle * BL, & partant $\frac{1}{3}$ du tout * BH; ce qu'il falloit démontrer.

Nota ſi l'on eût propoſé l'angle obtus HBO en ayant ôté l'angle droit DBO, & pris HBK $\frac{1}{3}$ du reſtant, il ne faut que luy ajoûter un angle de 30 degrez qui eſt $\frac{1}{3}$ de l'angle droit, pour avoir le tiers du total propoſé DBO.

Monſieur de Roberval démontre que l'eſpace contenu ſous la ligne droite DC * (ſoit que DC ſoit égale ou non à C *) & ſous la courbe * KBFFD eſt égal à l'aggregé du cercle BHC, duquel la ligne * KBFD eſt le Limaçon, & du demi-cercle duquel l'intervale de cette même ligne CD eſt le demi-diamétre, de ſorte que ſi du centre C & de l'intervale CD l'on décrit le demi-cercle DN * l'eſpace curviligne contenu entre cette demi-circonférence, & le Limaçon eſt égal au cercle BHC, dont cette ligne eſt la Conchoïde.

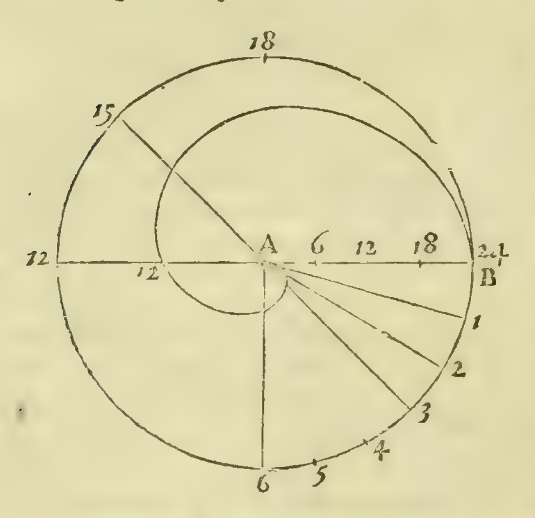
Si l'on continuoit cette ligne de l'autre côté du cercle,

elle repréſenteroit une ſorte de figure en cœur diviſé en deux ſuperficies curvilignes, deſquelles l'on pourroit faire un ſemblable examen, les comparant à des portions de cercles, &c.

De la Spirale ou Hélice.

LA premiére définition du Livre des Spirales d'Archiméde nous apprend le moyen de décrire cette ligne; voicy les termes d'Archiméde.

Si recta linea in plano, manente altero termino, æquè velociter circunducta rursùs reſtituatur in eum locum à quo primùm cœpit moveri; & unà cum lineà circumductà, punctum feratur æquè velociter ipſum ſibi ipſi, in eadem linea, incipiens à termino manente; ejuſmodi punctum ſpiralem lineam in plano deſcribet.

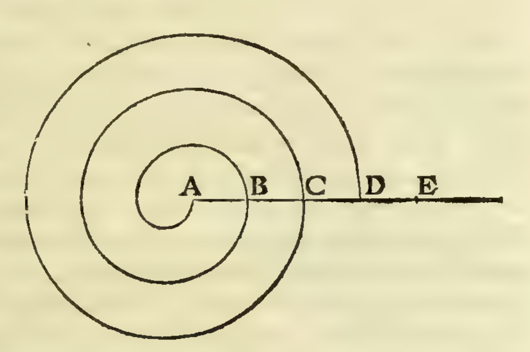


Soit propoſé la ligne A B égale à l'intervale duquel on veut décrire la Spirale du centre A & de l'intervale AB décrivez le cercle B 3, 6, 12, 18, 24, diviſez-en la circonférence en autant de parties égales que vous pourrez commodément, à commencer en B, & diviſez la ligne AB en tout autant

de parties égales ; tirez les rayons A1, A2, A3, &c. du point A sur le rayon A1 prenez une des parties aliquotes du rayon AB ; sur le rayon A 2 prenez deux des mêmes parties ; 3 sur A 3, 12 sur A 12, 15 sur A 15, & ainsi des autres, les points que vous aurez marquez sur les demi-diamétres seront dans la Spirale que vous voulez décrire.

Que si dans la même ligne AB vous prenez BC, CD, DE &c. tant que vous voudrez, chacune égale à AB, & que cependant qu'AB fera une seconde révolution du mouvement uniforme, le point qui étoit venu en B s'avance du mouvement uniforme sur la ligne ABCD jusques en C, ce point décrira l'Hélice de la seconde révolution à commencer en B & finir en C, & ainsi de suite pour les autres révolutions.

D'où il s'ensuit que la méthode est la même pour les autres révolutions que pour la premiére ; car voulant décrire la seconde révolution, il faudra



décrire du centre A de l'intervale AC une circonférence de cercle, & l'ayant divisée en autant de parties que la premiére circonférence du rayon AB, à quoi les mêmes rayons tirez du centre A aux points de la premiére circonférence serviront s'ils sont prolongez, & chacun pris égal à AC ; sur le rayon A 1 de cette seconde circonférence, vous prendrez depuis le centre A une ligne égale à AB+1 de ses parties aliquotes, sur A 2 vous prendrez une ligne égale à AB+2 de ses parties aliquotes &c. &

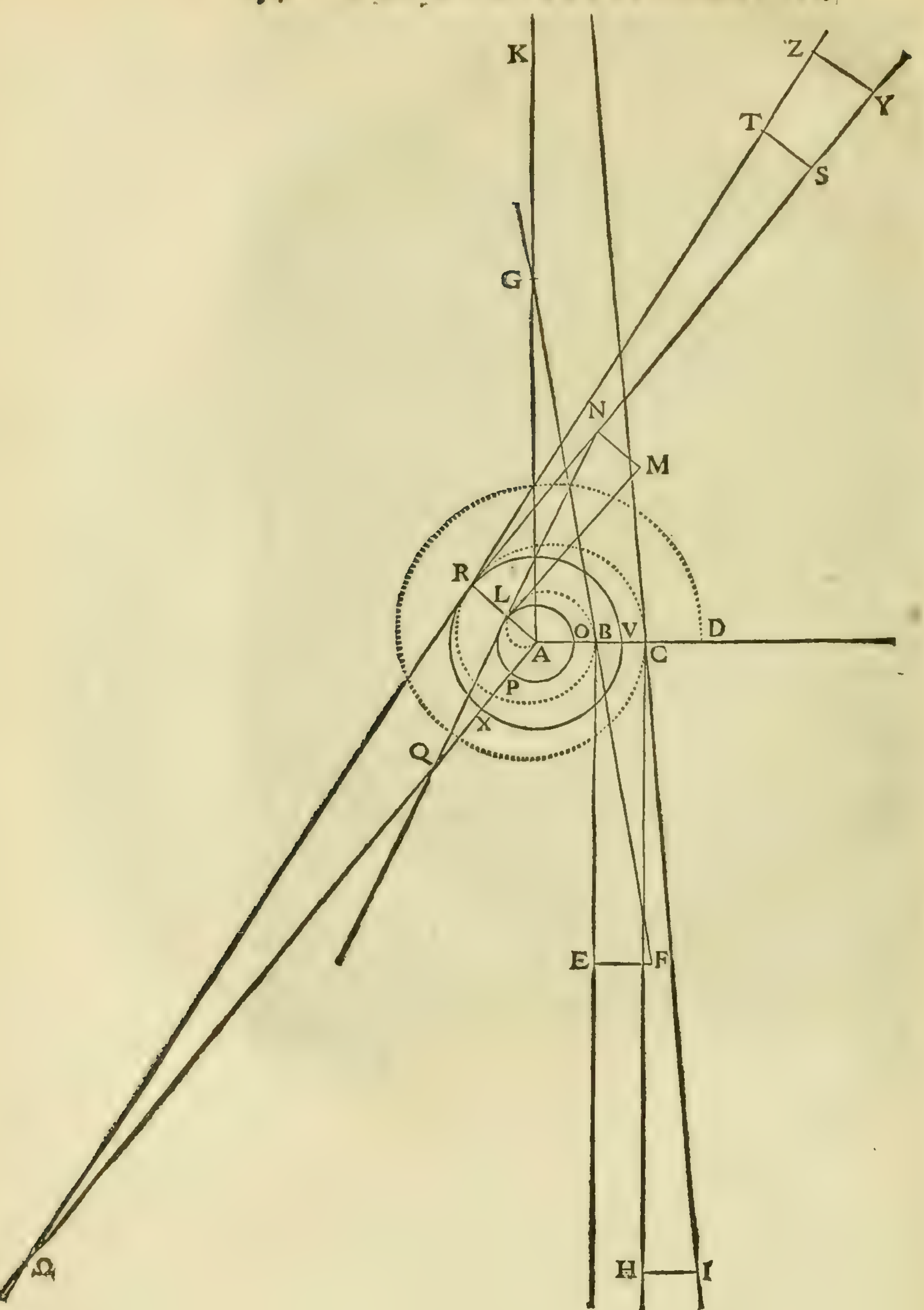
ainſi les points que vous aurez marquez ſur les demi-diamétres de ce ſecond cercle ſeront ceux par leſquels il faudra décrire la ſeconde révolution de l'Hélice.

Ceci poſé, il faut conſidérer que le point qui décrit la Spirale, en quelque part qu'il ſe trouve, a toûjours le même mouvement droit ſur la ligne ABCDE, & ce mouvement eſt tel par la nature de cette ligne, qu'en même temps que la ligne AB a fait une révolution, ce point doit en même temps avoir parcouru une ligne égale à AB, mais en chaque endroit il change de mouvement circulaire; de ſorte que la viteſſe de ſon mouvement circulaire s'augmente toûjours à meſure qu'il s'éloigne du centre A; car ſon mouvement circulaire eſt tel que ce point décriroit la circonférence dont la portion de la ligne ABCDE, depuis A juſqu'où ce point ſe rencontre, eſt le demi-diamétre pendant le temps d'une révolution, c'eſt à ſçavoir en autant de temps qu'il en employe à parcourir par ſon mouvement droit la ligne AB depuis A juſques en B, ou de B en C, de ſorte que puiſqu'en B ſon mouvement eſt tel que s'il en eût toûjours eû un circulaire égal depuis A juſques en B, il auroit décrit une circonférence dont AB eſt le rayon pendant le temps d'une révolution, & que le mouvement circulaire qu'il a en C eſt tel que pendant le temps d'une révolution (ou s'il faut ainſi dire d'une circulation de la ligne droite, car le terme de révolution s'attribuë plus ordinairement à la Spirale même) il auroit décrit une circonférence dont le rayon eſt AC double de AB, il s'enſuit que le mouvement circulaire qu'il a en C eſt double de celui qu'il a en B, & que celui qu'il a en D eſt triple de celui qu'il en B &c. & ainſi des autres.

Et parce que le mouvement circulaire de ce point eſt tel, comme nous avons dit, que pendant le temps d'une circulation de la ligne ABCD, il doit décrire une cir-

conférence de cercle dont la ligne depuis le commencement A de la Spirale jusqu'à l'endroit de la Spirale où ce point se trouve, est le demi-diamétre : & de plus le même point doit décrire par son mouvement droit pendant le même temps d'une circulation, une ligne égale au rayon AB du cercle de la premiére circulation; il s'ensuit que, quelque point de la Spirale que nous prenions, nous aurons la raison du mouvement circulaire du point qui la décrit au mouvement droit du même point, comme de ladite circonférnce à la ligne AB, mais aussi les deux directions de ces movemens sont données (le commencement de la Spirale & le point où l'on veut la touchante étant donnez) car la direction du mouvemnt droit est la ligne droite tirée de A jusqu'audit point, & la direction du mouvement circulaire est la perpendiculaire à cette ligne; ces deux mouvemens sont donc tou-à-fait connus, & par conséquent le mouvement mêlé de ces deux & sa direction, c'est-à-dire, la touchante de l'Hélice en ce point est aussi donnée; ce qu'il falloit faire.

Ainsi pour tirer la touchante en B, je joins AB, & je tire BE perpendiculaire à AB, laquelle BE je suppose être égale à la circonférence, dont AB est le rayon; puis ayant mené EF parallele & égale à AB, la ligne FB touchera l'Hélice au point B. Et quand bien l'on auroit quelque difficulté à concevoir cette méthode, il nous sera toûjours facile de montrer qu'elle s'accorde avec les démonstrations des Anciens. Nous avons ainsi démontré que cette façon de trouver les touchantes des sections coniques s'accorde avec celle d'Apollonius, & nous démontrerons ici que notre construction s'accorde avec les propositions d'Archiméde: car soit AG perpendiculaire à AB, il est évident que FB prolongée la rencontrera en un point comme G, puisqu'elle rencontre BE sa parallele par la construction, & partant l'angle AGB


K
Z
Y
T
S
G
N
M
R
L
O B V
D
A
C
P
X
Q
E
F
Ω
H
I

ſera égal à l'angle EBF, & ces triangles ſemblables ; mais le côté AB eſt égal au côté EF, & partant AG ſera égal à BE, c'eſt-à-dire, à la circonférence du premier cercle de la Spirale, ce qui eſt vrai par la 18 du livre des Spirales.

De même pour le point C, qui eſt la fin de la ſeconde révolution, tirant CH perpendiculaire à AC, & égale à la circonférence dont AC eſt le rayon, puis tirant HI égale & parallele à AB, & joignant IC ce ſera la touchante : nous démontrerons qu'étant prolongée, elle coupera AGK, prolongée comme en K, & que les triangles IHC, CAK ſeront ſemblables : donc comme AC eſt à HI, ainſi AK ſera à CH, c'eſt-à-dire le double de CH à CH, & partant AK eſt le double de la circonférence dont AC eſt le rayon ; ce qui eſt vrai par la 19 des Spirales.

Pareillement pour avoir la touchante en un autre point de la premiére révolution, comme en L, je tire AL & je décris la circonférence LOPL coupant AB en O, je prends LM perpendiculaire à AL, & égale à ladite circonférence; par M je titre MN parallele à AL, & égale à AB rayon de la premiére révolution, NL eſt la touchante, car ſoit tirée APQ perpendiculaire à AL, par la même raiſon NL prolongée la rencontrera en un point, comme en Q, & comme AL ou AO eſt à MN ou AB, ainſi ſera AQ à LM, c'eſt-à-dire à toute la circonférence OPL : mais par la nature & par la deſcription de l'Hélice, comme AO eſt à AB, ainſi la portion OPL de ladite circonférence eſt à toute la circonférence, donc la ligne APQ eſt égale à la portion OPL de la circonférence OPL ; ce qui eſt auſſi démontré dans la 20 propoſition des Spirales d'Archiméde.

Semblablement pour avoir la touchante en un autre point de la ſeconde révolution, comme en R, je tire AR

& je décris la circonférence RVXR coupant ABC en V; je prends RS perpendiculaire à AR & égale à cette circonference, & je tire ST parallele à AR, & égale à AB; TR est la touchante: car par la même raison ayant tiré AQΩ perpendiculaire à RA, la ligne TR prolongée la rencontrera comme en Ω, & comme AR ou AV sera à TS ou AB, ainsi AΩ sera à SR, c'est-à-dire à la circonference RVXR: mais par la nature de la Spirale, comme AV est à AB, ainsi la circonference RVXR étant jointe à la circonference VXR, est à la même circonference RVXR; & partant AΩ est à la circonference RVXR, comme la même circonference RVXR jointe à la circonference VXR est à RVXR, donc la ligne AΩ est égale à l'aggregé des deux circonferences RVXR & VXR, ce qui est vrai par la 20 du livre des Spirales d'Archiméde.

L'on pouvoit dire d'abord tirez AR, & AXΩ qui lui soit perpendiculaire & égale à l'aggregé de la circonference RVXR & de VXR, on aura la touchante ΩR; ou bien ayant tiré AR & ayant décrit la circonference du centre A & de l'intervale AR, & semblablement RY perpendiculaire à AR, faites que comme AB est à AR, ainsi cette circonference du cercle soit à RY perpendiculaire, vous aurez le point Y; tirez YZ égale & parallele à AR, vous aurez le point Z, & ZR sera la touchante.

Mais il a semblé plus claire & plus facile de réduire ces mouvemens à la droite AB & à la circonférence, dont AR est le demi-diametre, & ainsi des autres.

Nous avons supposé qu'on nous donne des lignes droites égales à des circonferences de cercle, ou pour le moins qu'on en entende d'égales, ce qui étant posé nous avons par cette méthode les touchantes de ces lignes, ou pour mieux dire nous démontrons, que concevant une

une ligne droite égale à une circonference de cercle, l'on peut par la connoiſſance des mouvemens compoſez concevoir quelle ſera la ligne droite qui touchera l'Hélice en un point propoſé : nous ferons la même ſuppoſition pour la quadratrice.

Exemple neuviéme de la Quadratrice.

SOIT propoſé le quarré ABCD avec ſon quart de cercle ABD qui lui eſt inſcrit, duquel le centre eſt A, & le rayon eſt AB, l'un & l'autre plus grand ou plus petit, ſuivant que l'on veut décrire la Quadratrice grande ou petite. Soit diviſé l'un des côtez du quarré CB ou AD (perpendiculaire à AB rayon du quart) en autant de parties égales qu'on voudra 1 2 3 4 5, &c. & par ces points ſoit tiré des paralleles à AB juſques au côté oppoſé ; diviſez le quart de cercle en autant de parties égales 1 2 3 4 5, &c. à condition que ſi aux diviſions de la ligne BC, vous avez commencé à compter 1, proche de B, vous commencerez auſſi à compter au quart de cercle 1, proche de B ; mais ſi vous aviez commencé en C, vous commencerez en D ſur le quart de cercle ; tirez du centre A des demi-diamétres juſqu'aux points de ces diviſions du quart de cercle A 1, A 2, A 3, &c. là où A 1 coupera la premiere des paralleles, A 2 la ſeconde, A 3 la troiſiéme, A 4 la quatriéme &c. vous aurez les points par où doit paſſer la portion DH de la Quadratrice de laquelle le ſommet H eſt dans la ligne AB. *Voy. la Fig. ſuiv.*

Cette propoſition eſt trop longue & embroüillée.

Nota que *Viete Reſponſ. lib.* 8. *cap.* 8. appelle le point H *finis Quadratariæ* ; mais il n'en conſidere que la portion HD pour la quadrature du cercle.

Pour prolonger cette ligne au-deſſous du diamétre AD, ayant achevé le demi-cercle BDE du centre A, dans la droite AD prolongée vers D, je prends DF égale

à AD, laquelle je divise en autant de parties égales que je juge à propos 1 2 3 4, &c. à commencer proche de D, & par ces points je tire des paralleles au diamétre du cercle BAE, lesquelles je prolonge au-dessous de DF, autant qu'il est necessaire; puis je divise le quart de cercle DE, en autant de parties égales que j'ai divisé la ligne DF, à commencer aussi en D; par ces points & par le centre A je tire des lignes A 1, A 2, A 3, &c. jusqu'à ce qu'elles rencontrent chacune sa parallele réciproque, c'est-à-dire A 1 la premiere, A 2, la seconde, &c.

& par ces divisions je décris la portion DI de la même Quadratrice prolongée.

Or il est manifeste que cette portion peut être prolongée à l'infini, car ayant pris une très-petite portion F*h* de la ligne FD, & une partie proportionelle EL du quart du cercle, l'une & l'autre étant divisées par la moitié, & ayant tiré les lignes, comme nous avons dit, nous trouverons un point de la quadratrice : mais derechef l'on pourra diviser la moitié, puis le $\frac{1}{4}$, puis la $\frac{1}{8}$ &c. partie plus proche de F de la ligne F*h*, & la moitié, puis le $\frac{1}{4}$, puis la $\frac{1}{8}$ partie plus proche de E de la circonference LE, & tirer de nouveau des lignes paralleles, & des demi-diamétres prolongez qui se coupent, pour avoir de nouveaux points de la quadratrice ; & puisque l'on peut continuer ces divisions sans fin, l'on trouvera aussi sans fin des points de la quadratrice au-dessous de D & de I ; car pour la finir, il faudroit que la derniere ligne tirée du point F de la ligne ADF parallele à AE rencontrât son demi-diamétre réciproque, c'est à sçavoir le dernier du quart de cercle DE, c'est-à-dire que FG perpendiculaire à DF en F rencontrât le diamétre BAE prolongé, auquel elle est parallele ; ce qui est impossible.

Et par là, vous voyez qu'aucun point de la quadratrice ne se rencontrera dans FG, puisque le demi-diamétre réciproque à FG ne la sçauroit jamais rencontrer : elle ne la coupera donc pas quoiqu'elle soit prolongée à l'infini, & néanmoins elle s'en approche toûjours de plus en plus, car les points de la quadratrice sont trouvez dans les paralleles à FG que l'on tire par des points toûjours plus proches de F que leurs précédentes, & partant la ligne FG est Asymptote de la quadratrice.

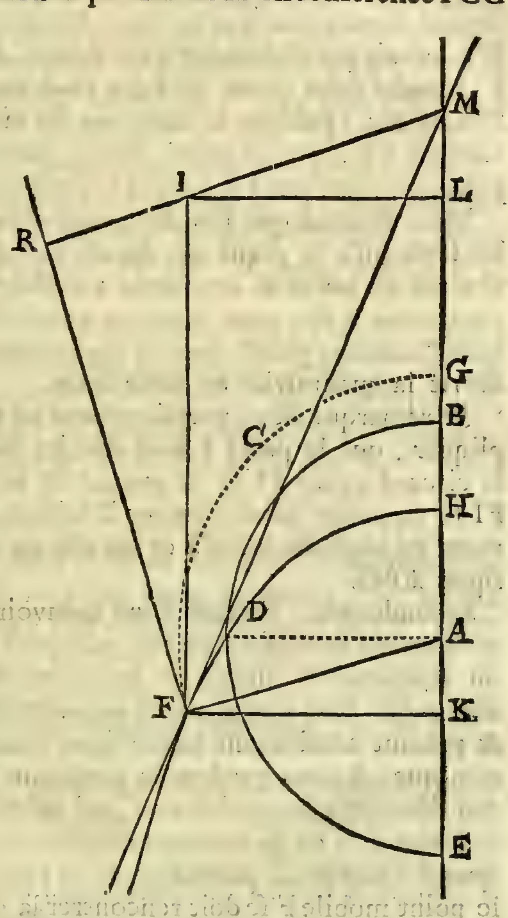
L'on peut achever le cercle entier, & continuer la quadratrice de l'autre côté du diamêtre BE, avec son Asymptote &c.

Je ne dis rien ni du nom de la Quadratrice, ni de ſon uſage pour la quadrature du cercle au defaut de Dinoſtrate ou Nicomede, qui ne ſe trouvent point. *Voyez Pappus lib. 4. Collect. M.* ou *Viete lib. 8. reſp. cap. 8, & Clavius Geom. pract. lib. 7. in appendice.*

Pour tirer par cette methode les touchantes à la Quadratrice, il faut examiner les mouvemens qui la décrivent. On voit d'abord que le demi-diamétre A D du cercle B D E étant prolongé & tournant circulairement ſur le centre A, & la ligne C D ſe mouvant en même temps parallelement à ſoi-même, ſoit qu'elle s'approche de BA, ou qu'elle s'en éloigne ſuivant que nous faiſons tourner le demi-diamétre, ou de D vers B, ou du même D vers E, car tout revient au même, que le point, dis-je, qui décrit la Quadratrice a pour le moins deux mouvemens, l'un droit que la ligne CD lui communique, l'autre circulaire à cauſe du mouvement du demi-diamétre AD; mais outre ces mouvemens il a encore celui qui l'oblige à ſe rencontrer dans la commune ſection des deux lignes AD, CD, ce que nous avons expliqué à la fin de la quatriéme propoſition de ce Traité où vous trouverez une figure très-ſemblable à celle-ci. En voici pourtant l'application le plus intelligiblement qu'il m'eſt poſſible.

Soit propoſé la quadratrice HDF, de laquelle le demi-cercle primitif, donnez-moi ce mot, ſoit BDE & le centre du demi-cercle ſoit A, & que l'on demande la touchante de la quadratrice en un point, comme en F. Je prolonge le diamétre BHAE de part & d'autre, puis je tire la ligne AF, qui eſt celle qui communique le mouvement circulaire au point F; je tire encore par F une parallele au diamétre BE, c'eſt celle qui communique à nôtre point le mouvement droit duquel la direction eſt FK parallele à DA & perpendiculaire à AE. Par

F je tire FR perpendiculaire à AF pour la direction du mouvement circulaire. Et ayant ſuppoſé que la ligne AF tourne circulairement de D vers B ou de F vers G, du centre A je décris la portion de la circonference FCG compriſe entre les lignes AF & ABG. Ceci poſé je ſuis obligé d'imaginer que la ligne tirée de F parallele à ABG ſe meut de F vers ladite ABG, & par la nature de cette ligne, puiſque cette parallele doit s'ajuſter & ne faire qu'une ligne avec AB lors que la ligne AF ayant tourné de F vers LG aura la même poſition. Si je conçois deux points, l'un F à l'extrêmité de ladite parallele FI, l'autre F au bout de la ligne AF, & que l'un & l'autre de ces points n'ait que le mouvement, le premier de la ligne



IF le long de FK, l'autre celui qui lui fait décrire la circonference FCG; ou pour mieux dire, puisque la direction de ce mouvement circulaire est FR, je suis assûré que pendant que le premier point aura décrit FK, le second étant porté par la ligne AF que nous imaginons se mouvoir parallelement à soi-même, & partir du point F (comme nous avons pû faire ci-devant comme en la Spirale &c.) puisque la direction du mouvement circulaire est FR, que ce point, dis-je, aura décrit dans FR prolongé une ligne FR égale à la circonference FCG.

Mais dautant que ces deux mouvemens ne sont pas les seuls qu'a le point qui décrit la quadratrice, je ne tire pas du point R une ligne parallele & égale à FK, pour avoir à son autre bout un point de la touchante, mais j'examine plûtôt tous les mouvemens du point F qui décrit la quadratrice en cette sorte.

Je remarque donc premierement ce que je viens d'expliquer, que le point F doit décrire la ligne FR égale à la circonference FCG en autant de temps que la ligne FI se mouvant parallelement à soi-même & uniformement en emploira jusqu'à ce qu'elle ait la position de la ligne ABG.

Secondement. Faisant donc mouvoir la ligne AF parallelement & uniformement (puisque FR est la direction du mouvement circulaire du point F, comme nous avons dit) sans considerer le mouvement de la ligne IF, & partant considerant ladite ligne immobile, il est certain que, si nous gardons la condition des mouvemens qui décrivent la quadratrice, qui est que le point F doit toûjours être en la commune section des lignes AF, FI; quand l'extrêmité immobile de la ligne AF sera en R, le point mobile F se doit rencontrer là ou AF prolongée tant qu'il sera necessaire, coupe la ligne FI; tirez donc par R la ligne RIM parallele à AF & coupant FI en I

& le diamétre EBM prolongé en M, vous voyez que le point mobile F se doit rencontrer en I.

Troisiémement. Mais outre ces mouvemens il faut encore considerer que la ligne FI emporte ce point de I vers L où il se devra trouver (ayant tiré IL parallele à FK, & coupant ABG prolongée en L) lorsque la ligne IF sera une même avec la ligne ABG, c'est à sçavoir lorsque son extrêmité immobile F aura décrit la ligne FK, & son point immobile I, la ligne IL. Il est donc certain que si aux mouvemens précedens l'on ajoûte celui du point mobile F ou I le long de IL, sans considerer que ce point mobile doit toûjours être dans la commune section des lignes AF, IF, le point mobile F se doit trouver en L.

Enfin il faut encore considerer que ce point F a toûjours dû être la commune section des lignes AF, FI, & qu'ayant fait mouvoir AF jusqu'à ce que son extrêmité immobile ait décrit FR, on lui a donné la position RI, à laquelle elle s'arrête, posé que IF ne doivent se mouvoir que sur FK, & que par cette condition le point étant porté de I vers L, doit décrire la ligne IM au lieu de IL & se rencontrer en M au lieu de L; & partant tous les mouvemens de ce point étant examinez, l'on trouve que pendant que AF s'est promenée le long de FR, & IF le long de FK, le point de leur commune section est arrivé en M; & partant si vous tirez la ligne MF, vous aurez la touchante de la quadratrice en F; ce qu'il falloit faire.

En deux mots, ayant tiré comme ci dessus la ligne FR égale à la circonference FCG & les lignes FI, RIM, puisque nous considérons un seul mouvement circulaire du point qui décrit la quadratrice, sçavoir celui qu'il a en F, nous le considerons par notre principe, ce que nous avons pratiqué aux lignes précedentes, même en

la Spirale le long de la touchante FR, ce point doit donc monter de F vers R, mais il doit encore être porté vers la ligne AB, à cause du mouvement de la ligne FI, & outre ces deux mouvemens il doit toûjours être la commune section des lignes AF, FI, en quelque lieu que nous tirions ces deux lignes, il sera donc dans leur commune section lorsque AF sera en RIM, & IF en ABM, & partant il sera en M. Voici en deux mots une régle générale quadrat.

Un point F de la quadratrice étant donné, & le demi-cercle BDE, par le moyen duquel elle est décrite. Si du centre A de ce demi-cercle & de l'intervale AF, vous décrivez une circonference FCG depuis F jusques en un point G du diamétre AB, dans lequel se rencontre le sommet H de la quadratrice vers la partie de ce sommet; & si à cette portion de circonference vous tirez une touchante en F, dans laquelle vous prenez une ligne FR égale à ladite portion de circonference (d'où il suit que pour tirer la touchante en D, il ne faut que prendre dans AB prolongée depuis A une ligne égale au quart de cercle BD) la commune section du diamétre AB prolongée vers B, & d'une ligne RM tirée par R parallele à AF, sera dans la touchante de la quadratrice.

Ou sa converse à la façon d'Archiméde au livre des Hélices.

Si quadratricem linea recta contigat producaturque donec occurrat semi-diametro circuli quadratricis, in qua reperitur quadratricis vertex, etiamsi fuerit opus ad partes verticis productâ, & ab ejusmodi puncto sectionis recta linea ducatur parallela ei quæ à centro circuli quadratricis ad punctum contactûs in quadratrice ducitur; à puncto verò contactûs in quadratrice circumferentiæ circuli circulo quadratricis homocentri portio describatur ad partes verticis

ctis quadratricis donec eidem semidiametro etiam productæ occurrat, eique circunferentiæ portioni tangens ducatur ad punctum quod est communis sectio ipsius & quadratricis, occurret ejusmodi tangens circuli ei quæ à communi sectione tangentis quadratricis & diametri productæ ducta fuerat parallela, eritque lineæ circulum tangentis portio inter punctum (quod est communis sectio ipsius & productæ parallelæ) & quadratricem intercepta æqualis prædictæ portioni circonferentiæ circuli.

Nota, l'on peut rendre la régle plus générale, faiſant comme la circonférence FCG eſt à FK ; ainſi une ligne priſe dans FR, même prolongée, plus grande ou plus petite que FR, ſoit à une ligne plus grande ou plus petite que FK priſe dans FK, même prolongée ; mais ne la prenant pas égale, la conſtruction en eſt plus difficile.

Remarquez deux ou trois choſes avant de paſſer outre. La premiére, pour plus grande intelligence l'on peut déduire l'application de la ſeconde partie de la quatriéme propoſition de ce traité en cette façon.

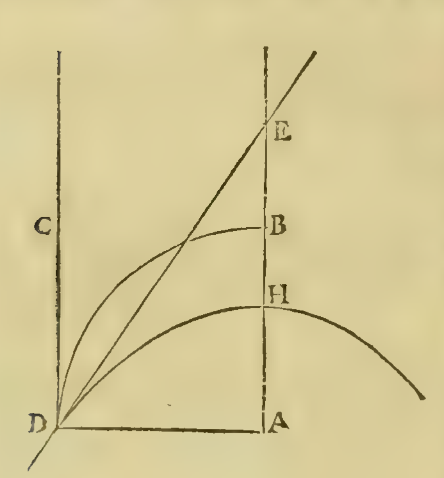
La vîteſſe du mouvement de la ligne IF, & partant de ſon extrêmité mobile F étant donnée dans FK, elle ſera auſſi donnée dans FA ; & parce que le point mobile F doit être la commune ſection des deux IF, FA, la ligne IF ayant la poſition KAB coupera FA, c'eſt-à-dire en A ; ce point a donc eû deux mouvemens, l'un de la gauche vers la droite égal à FK, l'autre en montant égal à KA, & ces deux ſe réduiſent à un ſeul FA : pareillement la vîteſſe de la ligne AF étant donnée dans FR, ſont point mobile F devant être la commune ſection de AF & FI ſe trouvera en I, & partant il a eû les deux mouvemens FR, RI, qui ſe réduiſent à un ſeul FI, qui eſt le troiſiéme côté du triangle FRI.

Ces quatre mouvemns (car nous avons diviſé en deux

parties celui qui fait que le point mobile F doit être la commune ſection des deux lignes AF, IF) étant réduits aux deux IF, FA achevez-en le parallelogramme IFAM, la diagonale FM ſera la direction du mouvement mêlé de ces deux.

Ceci avoit déja été expliqué plus briévement, mais il y a plaiſir de conſidérer une choſe par divers biais & en différentes façons.

La ſeconde ; ſi l'on demandoit la touchante de la quadratrice au point D, où la ligne AD eſt d'abord perpendiculaire à DC, que puiſque le mouvement de AD eſt donnée dans DC, ou bien AB, & celui de DC eſt donné auſſi d'abord dans DA, & la raiſon de ces deux mouvemens eſt comme de la ligne DA au quart de cercle DB, il ne faut que prendre dans AB prolongée autant qu'il le faut une ligne AE, à commencer en A, égale au quart de cercle, & du point E l'on tirera la touchante ED.



L'on eût pû faire trois divers cas pour les touchantes de cette ligne, mais le diſcours eſt tout le même voulant tirer la touchante au-deſſus de D entre D & H, que lorſqu'on la tire en un point plus éloigné de H & au-deſſous de D, comme au premier exemple.

La troiſiéme, que *Viete loc. cit.* appelle le point H *finis quadratariæ*, & le point D *principium*; mais il ne conſidére que la portion DH, qui lui ſert pour la quadrature du cercle, & puis il s'arrête à la façon de décrire la quadratrice, & il eſt manifeſte que le point D ſe trouve d'abord, & que décrivant la quadratrice DH à l'ordinaire, le point H ſe trouve après les autres qui ſont entre D & H : mais nous pouvons concevoir le point H tout le premier; & parce que conſidérant la Quadratrice prolongée des deux côtez, chacun des autres points en a un réciproque de l'autre côté également éloigné de H, & que le point H eſt le ſeul qui n'a point de réciproque, nous l'avons appellé le ſommet de la Quadratrice.

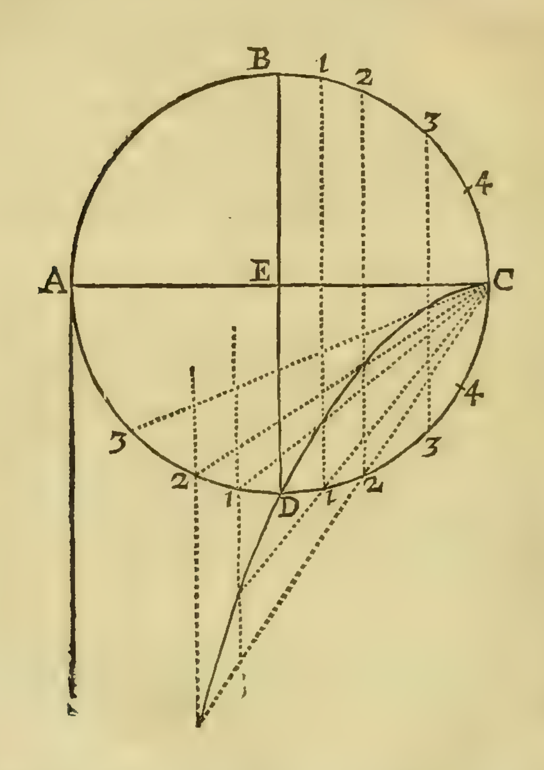
Dixiéme exemple de la Ciſſoïde.

SOIT propoſé le cercle ABCD, plus grand ou plus petit, ſuivant qu'on veut décrire la Ciſſoïde, avec ſes deux diamétres à angles droits AC, BD: du point D prenez de part & d'autre des points également diſtans D 1 & D 1 ſur les quarts de cercle DA, DC, puis D 2, D 2, puis D 3, D 3 &c. tirez par les points 1 2 3 4 &c. du quart de cercle DC des lignes paralleles au diamétre BD, puis du point C joignant les lignes C 1, C 2, C 3, C 4 &c. aux points 1 2 3 4 &c. du quart de cercle DA, là où C 1 coupera la parallele 11, & C 2 la parallele 22, & C 3 la parallele 33, & C 4 la parallele 44, vous aurez des points par leſquels la Ciſſoïde eſt décrite.

Que ſi vous voulez prolonger la Ciſſoïde CD en dehors du cercle, tirez par les points 1 2 3 4 &c. du quart du cercle DA des lignes paralleles au diamétre BD, & prolongez-les tant qu'il faudra en dehors du cercle du côté de D, puis par les points réciproques 1, 2, 3, 4 du quart de cercle DC, tirez du point C d'autres lignes oc-

cultes C 1, C 2, C 3, C 4, & prolonge-les autant qu'il le faudra hors le cercle, les points où chacune de ces lignes coupera sa réciproque, sçavoir C 1, la parallele 1 1; C 2 la parallele 2 2 &c. ces points seront dans la Cissoïde prolongée.

Par un discours semblable à celui dont nous nous som-



mes servis pour la quadratrice, l'on montrera que cette ligne peut être prolongée infiniment, & qu'elle ne rencontrera jamais une ligne droite infinie tirée du point A parallele au diamétre BD, ou si vous aimez

mieux la touchante du cercle de la Ciſſoïde au point A.

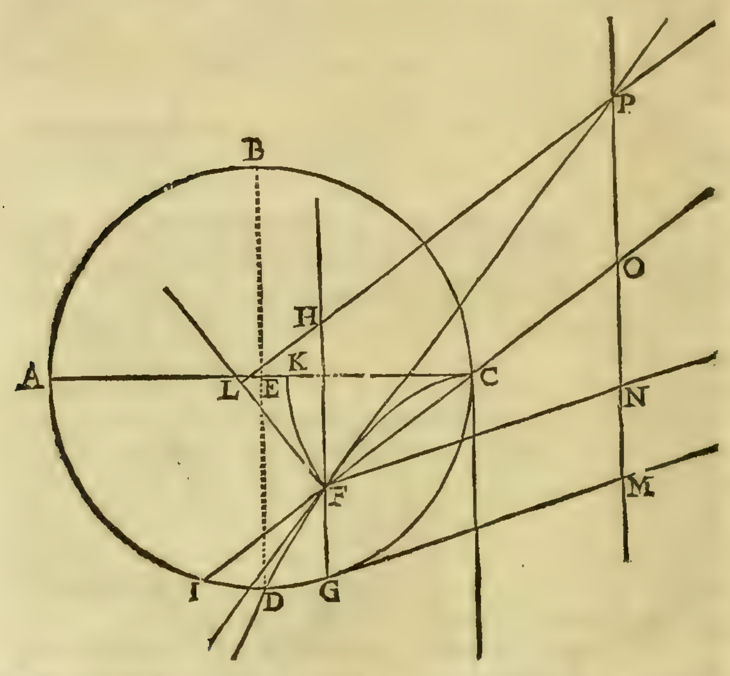
Et parce que la Ciſſoïde peut être continuée de l'autre côté par le moyen d'un autre cercle égal à ABCD, & décrit ſur ſon diamétre AC prolongé vers C, enſorte que ces deux cercles ſe touchent en C, il nous ſera permis d'appeller le point C, le ſommet de la Ciſſoïde, puiſque c'eſt l'unique dans la Ciſſoïde, qui n'en a point de réciproque, ou ſi vous voulez de ſemblable : car les points de la Ciſſoïde prolongée plus loin que D, à l'égard de C peuvent être appellez réciproques des points de la portion DC de la Ciſſoïde. Ce qui eſt aſſez clair par la méthode de trouver ces points.

Ceci poſé, il faut examiner les mouvemens particuliers du point qui décrit la Ciſſoïde, pour en donner les touchantes.

Il faut donc remarquer d'abord, que ſi vous faites tourner la ligne CD circulairement au tour du point C, enſorte qu'elle paſſe ſucceſſivement par C1, C2, C3 &c. de D vers A, prenant les points 1 2 3 4 dans le quart de cercle DA, & qu'en même temps le diamétre BD ſoit porté parallelement à ſoi-même vers C, mais en montant de telle façon que ſon extrêmité D décrive le quart de cercle DC d'un mouvement égal & uniforme, & que lorſque la ligne CD aura la poſition CA, le diamétre BD ait la poſition de la touchante du cercle en C, c'eſt-à-dire de l'axe de la Ciſſoïde, le point qui aura toûjours été dans la commune ſection de ces deux lignes aura décrit la portion DC de la Ciſſoïde. Ceci poſé.

Soit propoſé le point F de la Ciſſoïde lequel ſoit pris dans cette figure entre les points C & D; mais dans la ſuivante il ſera plus éloigné du ſommet, & au-deſſous de D à l'égard de C, tirez la ligne FG parallele au diamétre BD, coupant le cercle en G en ſa partie inférieure dans le quart de cercle DC en cette premiére figure, & prolon-

gez-la du côté de F vers H, puis tirez la ligne CF, & prolongez-la jusqu'à la circonférence du cercle en I, (dans la seconde figure elle coupe le cercle avant que d'arriver en F) vous voyez donc que la ligne CFI en tournant autour du centre C jusqu'à ce qu'elle ait passé par toutes les positions des lignes tirées du point C à tous les points de la circonférence IA jusqu'à ce qu'elle soit arrivée dans la position CA, dans ce même temps la ligne



FG s'étant mûë, comme nous avons expliqué, parallelement à soi-même vers C, ensorte que son point G ait décrit la circonférence GC du cercle de la Cissoïde, sera arrivée en C, & aura la position de la touchante du cercle de la Cissoïde au point C.

Mais pendant le mouvement circulaire de la ligne CF vers A, ſi vous décrivez du centre C & de l'intervale CF un arc de cercle FK compris entre CF & CA & coupant CA en K, il ſe trouve que le point F de la ligne CF porté par le ſeul mouvement de la ligne CF, ce point, dis-je, a décrit l'arc FK, il a donc décrit l'arc FK en même temps que le point G porté par le mouvement que nous avons expliqué de la ligne FG, a décrit la circonférence GC, mais chaque point de la ligne FG décrit une ligne égale & ſemblable à celle que décrit le point G, & partant le point F de la ligne FG porté par cette ligne décrit une circonférence égale à GC : vous voyez donc que ne conſidérant que les deux mouvemens du point F, que les deux lignes CF, FG lui donnent ſans conſidérer que ce point doit toûjours être en leur commune ſection par le mouvement de la ligne CF, il aura décrit la circonférence FK en même temps que la ligne FG lui aura fait décrire une circonférence égale & parallele à GC, & partant que ces deux mouvemens ſont proportionnez, comme les circonférences FK & GC, mais les directions de ces deux mouvemens ſont l'une FL touchante de l'arc FK, & perpendiculaire à CF ; l'autre eſt FN parallele à GM, qui touche le cercle de la Ciſſoïde en G (car puis que la circonférence que le point F décrit eſt parallele à celle que décrit le point G, & puiſque les points GF ſont dans la même ligne droite, les touchantes ſont paralles) & partant ſi vous faites que comme l'arc FK eſt à l'arc GC, ou comme le demi-diamétre CF de l'arc FK, au diamétre entier CA, de l'arc GC, ainſi FL ſoit à FN, vous aurez les raiſons de ces mouvemens dans leurs lignes de direction : ceci poſé vous ne compoſez pas un mouvement de deux ſeuls FL, FN, car vous vous ſouvenez qu'outre ces deux mouvemens le point mobile F doit encore être toûjours la commune ſection des lignes

CF, FGH. Voici cette conſtruction d'une autre façon.

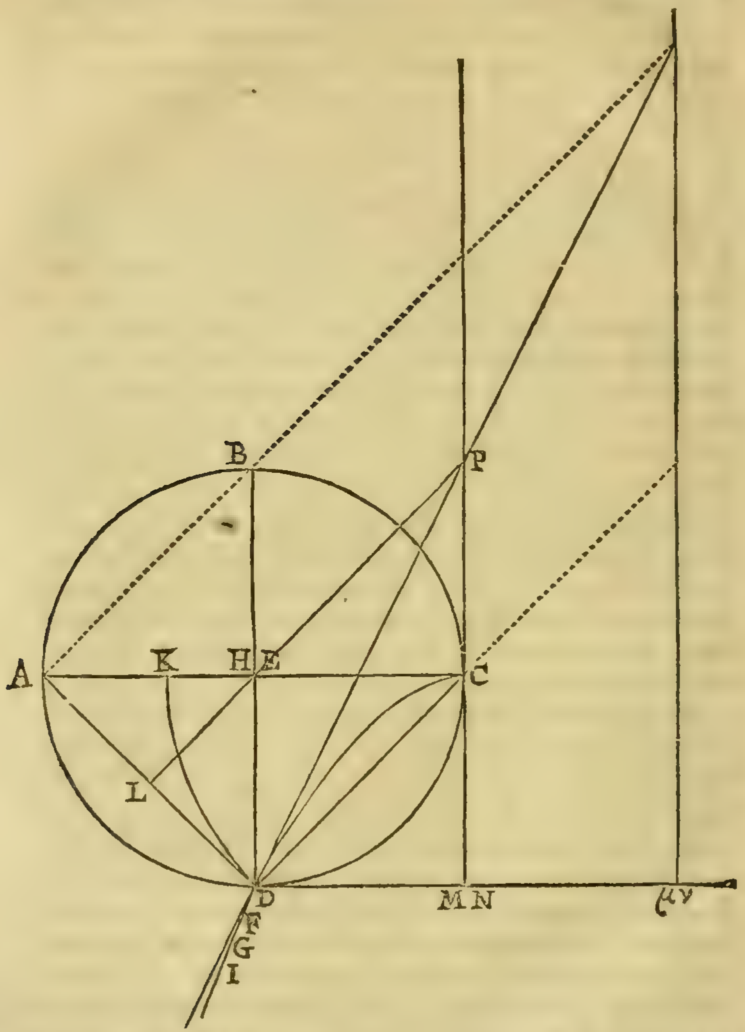
Etant donné le cercle de la Ciſſoïde ABCD, ſon centre E, la Ciſſoïde CDF &c. comme nous avons expliqué, & qu'il faille en trouver la touchante en un point comme F. Par le point F tirez FGH ou GFH parallele au diamétre BD, coupant le demi-cercle ADC en G, & prolongez-la vers le côté du diamétre AC, comme en H; du ſommet C de la Ciſſoïde tirez la ligne CFI en la premiére figure ou CIF en la ſeconde coupant le demi-cercle ADC en I; du centre C & de l'intervale CF décrivez l'arc de cercle FK vers le diamétre CA coupant le diamétre même prolongé vers A s'il en eſt beſoin en K, tirez FL touchante de cette circonférence vers le diamétre AC, du point G tirez auſſi GM touchante du cercle de la Ciſſoïde, & par le point F menez FN parallele à GM, & prolongez-la vers le côté de C à l'égard du point A, faites que comme l'arc FK eſt à l'arc GC, c'eſt-à-dire comme la ligne CF eſt à CA, ainſi FL dans la premiére touchante, & priſe ſi vous voulez *ad libitum*, ſoit à FN; par L tirez LHP parallele à FC, & prolongez-la vers le côté de C à l'égard de F, puis par N tirez NOP parallele au diamétre BD, & prolongez-la juſqu'à ce qu'elle rencontre LHP, comme en P, de ce point tirez la ligne PF, ce ſera la touchante de la Ciſſoïde.

Dans cette conſtruction nous ne faiſons point mention des points H & O, ni du parallelogramme HFOP, quoi-qu'il eût été beſoin d'en parler auparavant pour examiner tous les mouvemens du point F de la Ciſſoïde: l'on eût pû faire le même dans la quadratrice, où la ſeule interſection des lignes RIM & ABM, nous eût donné le point M, ſans conſidérer le parallelogramme IFAM &c.

L'on pourroit ajoûter des démonſtrations Géométriques à ces conſtructions, pour prouver tous ces points de rencontre mais cela ſeroit un peu long.

Voyez la figure de la Quadratrice.

L'on peut encore conſidérer ces mouvemens de tous les



biais que nous les avons conſidérez dans la quadratrice ;

& énoncer ce Théoreme, que si d'un point P de la touchante FP, l'on tire PL parallele à CF coupant FL en L, & PN parallele à BD coupant FN en N, & dire que comme l'arc FK est à l'arc GC, ainsi FL est à FN, ce qui est facile.

Il suffira avant de passer outre, de dire quelque chose de la touchante de la Cissoïde au point D, dont voici la figure sur laquelle je remarque :

Premiérement, que faisant trois cas pour les touchantes des cette ligne, l'un pour le point D, le second pour les points d'entre C & D, & le troisiéme pour les points au-dessous de D (car la touchante au point C est le diamétre AC; & généralement en toutes les lignes courbes qui ont un axe, leurs touchantes au sommet sont perpendiculaires à cet axe ;) l'on auroit pû mettre celui-ci le premier, n'eût été qu'il falloit expliquer plus généralement & sans confusion les mouvemens du point F : or en cette figure les points DFGI ne sont qu'un même, le point H peut être le même que le point E ou que le point B, comme en la seconde construction de cette figure, que nous avons marquée par des lignes ponctuées & avec des lettres Greques, & les points MN, ou μν sont un même point.

Secondement, sans supposer dans FL ou GM des lignes égales aux arcs FK & GC, l'on fait par une construction Géométrique, que comme l'arc FK est à l'arc GC, ainsi FL est à GM en cette façon.

Puisque l'angle ACD est à la circonférence de l'arc AD, & au centre de l'arc FK, il s'ensuit que l'arc AD ou DC est double en ressemblance à FK, & partant que comme le demi-diamétre EC est au demi-diamétre CD ou DA, ainsi l'arc DC est au donble de l'arc DK, & par conséquent que comme EC est à la moitié de DC ou de DA, ainsi l'arc CD est à l'arc FK : prenant donc DM égale à EC, & FL égale à la moitié de FA ou de DA,

l'on aura fait cette construction Géometrique, & la parallele à CF passera de L par le centre E; ou encore prenez d'un côté la route DA, & de l'autre G μ double de DM, la parallele à CF sera AB &c.

Onziéme exemple, de la Roulette ou Trochoïde de M. de Roberval.

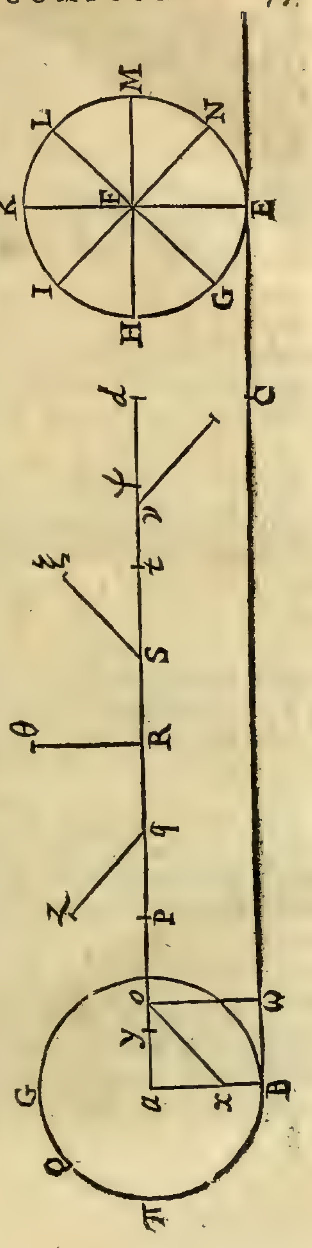
SOIT proposé le cercle duquel le centre est *a*, le demi-diamétre *a* B, & sa touchante BC au point B prolongée en C, l'on imagine que le cercle *a* B faisant une révolution sur la ligne BC, soit que BC soit égale à la circonférence du cercle, soit qu'elle soit plus grande ou plus petite (ce que je suppose indifférent, & facile à démontrer) le point B de ce cercle étant porté par les deux mouvemens, l'un droit qui le porte de B vers C, l'autre circulaire à cause de la révolution du cercle; que ce point, dis-je, décrit la Roulette ou Trochoïde; ou si vous voulez, ayant tiré par le centre *a* la ligne *a d* égale & parallele à BC vers le même côté, l'on imagine que le cercle glissant de B vers C sans tourner à l'entour de son axe, ensorte que le centre *a* décrive la ligne *ad* par un mouvement uniforme, en même temps le point B décrive la circonférence de son cercle passant de B par π QGB d'un mouvement uniforme, & que le centre *a* étant arrivé en *d*, ce point se retrouve en C, où la ligne BC touche le cercle, & qu'enfin ces deux mouvemens, l'un circulaire, par le moyen duquel le point B parcourt une fois la circonférence de son cercle, l'autre droit, par lequel il est emporté vers C, mêlez comme nous avons dit, étant tous deux uniformes, font décrire la Roulette à ce point B.

D'où vous voyez que ces deux mouvemens étant uniformes, le point B peut décrire trois diverses sortes de

Roulettes, suivant que son mouvement circulaire sera proportionné à son mouvement droit, ou si vous voulez suivant la raison de la circonférence de son cercle à la ligne *a d*, que le centre décrit, puisque cette circonférence peut être ou égale à la ligne *a d*, ou plus grande ou plus petite.

Nous ne nous arrêtons pas à considérer les lignes qui peuvent être décrites, posé que l'un ou l'autre de ces mouvemens, ou même posé que ni l'un, ni l'autre ne fut uniforme.

Ceci posé, pour décrire aisément cette ligne, soit prolongée la ligne BC, comme en E; du point E soit tiré EF égale & parallele à *a* B; du centre F décrivez le cercle EGHIKLMN, qui sera égal au premier, divisez sa circonférence en tant de parties que vous voudrez par les points GHIKLMN, & tirez par ces points les demi-diamétres du cercle. Divisez la ligne *ad* en autant de parties égales que vous avez divisé la circonférence GHI &c. aux points *o*P*q*RS*tu*, par le point *o* tirez *o x* égale



& parallele au rayon FG, par P tirez Py égale & parallele à FH, puis qz égale & parallele à FI, & ainsi des autres, vous aurez les points B$xyz\theta\xi\psi$C, par lesquels la Roulette doit être décrite.

La raison de cette description est manifeste, car prenez dans la ligne ad un des points de sa division comme par exemple le premier o, & tirez $o\omega$ perpendiculaire sur BC, & par conséquent parallele aux rayons aB, FE, mais par la description ox est parallele à FG, & partant l'angle $xo\omega$ est égale à l'angle GFE, & décrivant du centre o & de l'intervale ox, l'arc $x\omega$, cet arc est égal à l'arc GE: mais posé que le centre a ait décrit la ligne ao, & soit en o, le point B doit avoir décrit un arc égal à EG; car par l'hypothese EG est à sa circonférence totale, comme ao est à ad, & les mouvemens sont uniformes; donc le point B a décrit l'arc ωx, il est donc en x, & par conséquent le point x est un point de la Roulette; ce qu'il falloit démontrer. L'on démontrera la même chose de tous les autres points.

Il s'ensuit de cette démonstration, que décrivant le cercle GHIKLMN d'un autre centre pris dans la ligne ad, comme du centre o, P, R &c. & faisant le reste de la construction, l'on trouvera les mêmes points de la Roulette.

Ces connoissances suffisent pour trouver les touchantes de la Roulette par les mouvemens composez; car ayant pris un point de la Roulette, & ayant trouvé les deux directions de son mouvement droit & de son mouvement circulaire; si l'on entend dans ces lignes de direction deux lignes qui soient entre elles comme la ligne BC ou la base de la Roulette, est au cercle de la Roulette, chacune de ces lignes étant prise dans la direction du mouvement homologue, la direction du mouvement composé de ces deux sera la touchante.

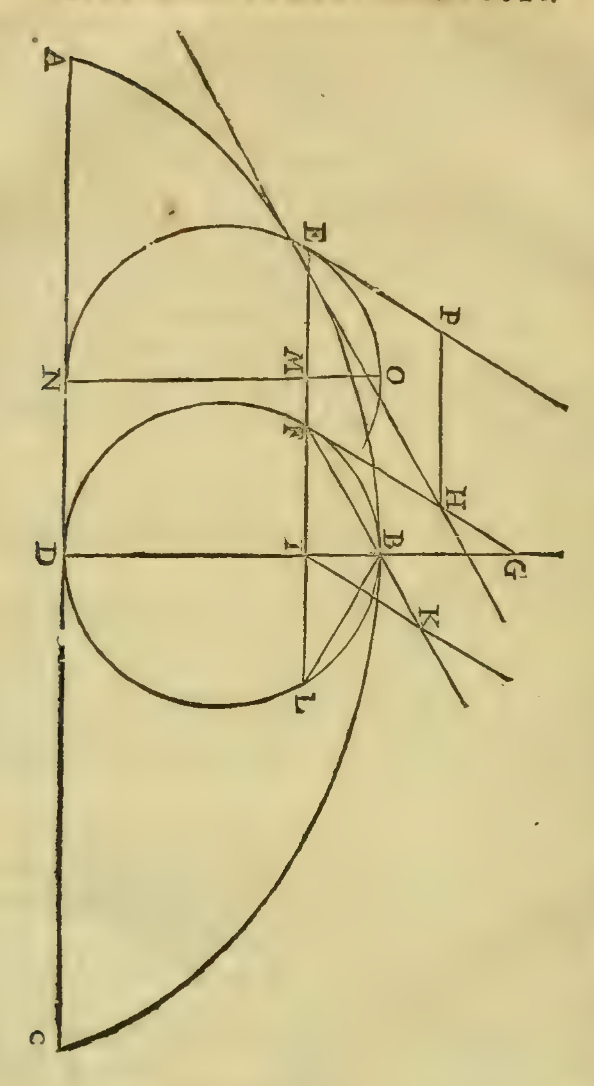
Car ſoit propoſé la Roulette ABC de laquelle la baſe eſt ADC, le ſommet B & l'axe BD, & que l'on en demande la touchante au point E. Décrivez le cercle BFD de la Roulette, ſoit autour de l'axe BD, ſoit ſur quelque diamétre perpendiculaire à la ligne ADC ; du point E tirez la ligne EF parallele à AC, & coupant en F la circonférence du demi-cercle de la Roulette (la plus proche du point E, ſi le point E étant pris entre A & B, vous avez décrit le cercle plus vers C que le point E, ſinon au contraire &c.) tirez FG touchante du cercle, puis faites que comme AC eſt à la circonférence du cercle, ainſi EF ſoit à FH, prenant le point H dans la touchante FG, du point H tirez HE, ce ſera la touchante de la Roulette.

M. de F. tire cette touchante en cette façon. Tirez la ligne EF, comme ci-deſſus. Tirez encore une ligne FB, & par le point E tirez EH parallele à FB, la ligne EH ſera la touchante.

Or il eſt facile de démontrer que cette méthode s'accorde avec la premiére, mais elle n'eſt pas ſi générale n'étant propoſée qu'au cas que la Roulette, ſoit du premier genre, c'eſt-à-dire que ſa baſe AC ſoit égale à la circonférence de ſon cercle, ce que vous remarquerez dans cette démonſtration que nous chercherons analytiquement, comme il s'enſuit.

Il faut démontrer qu'ayant tiré comme ci-deſſus la ligne EF & FG touchante du cercle au point F, & ayant pris FH dans FG égale à EF ; ſi l'on tire deux lignes l'une HE, l'autre FB, elles ſeront paralleles.

Pour le prouver, tirez IK parallele à FH jusqu'à ce qu'elle rencontre au point K la ligne FBK prolongée vers B ; prolongez encore la ligne EFIL juſqu'à l'autre côté du cercle en L, & tirez la ligne BL, & ſuppoſons que les lignes FB, EH ſont paralleles ; donc l'angle


A
E
P
N
M
O
F
H
D
I
B
G
K
L
C

EHF est égale à l'angle FKI : mais par la construction l'angle HEF est égal à l'angle EHF, parce que nous avons pris FH égale à EF ; il faut donc montrer que l'angle KFI est égal à l'angle FKI ; mais l'angle FKI est égal à GFK par la construction, ayant tiré IK parallele à FG, il faut donc prouver que l'angle KFI est égal à l'angle GFK, mais GFK est égal à l'angle BLF, dans la section alterne ; il faut donc prouver que KFI est égal à BLF ; ce qui est certain.

En retournant, l'angle KFI est à BLF, mais BLF dans la section alterne est égal à l'angle GFK, donc KFI est égale à l'angle GFK : mais à cause des paralleles FG, IK, l'angle GFK est égal à FKI, donc KFI & FKI sont égaux, & le triangle FIK est isoscele ; mais le triangle EFH est aussi isoscele par la construction le triangle EFH est donc semblable à FIK, & l'angle HEF est égal à l'angle KFI, d'où il s'ensuit que la ligne EH est parallele à FBK ; ce qu'il falloit démontrer.

Dans la figure précédente ayant fait décrire le cercle de la Roulette autour de son axe, & tiré la touchante FH, ç'a été toute la même chose, comme si ayant fait tirer le cercle de la Roulette en la position qu'il doit être lorsque le point A du cercle est arrivé en E, nous lui eussions tiré sa touchante par le point E, car ces positions de cercles étant paralleles, & le point E étant aussi élevé sur la base AC, que le point F, les touchantes des cercles sont paralleles, & partant l'une peut servir aussi-bien que l'autre, pour en mêler un mouvement droit, puisque l'une & l'autre rencontre la ligne EF, qui est la direction de ce mouvement droit. C'est pourquoi si l'on vouloit décrire le cercle de la Roulette en la position qu'il est lorsque le point qui la décrit est arrivé en E, ayant premiérement décrit le cercle BFD autour de l'axe BD, & tiré la ligne EFI parallele à ADC, prenez EM

dans EFI égale à FI, qui est comprise entre la circonférence & le diamétre du cercle qui est perpendiculaire à la base AC, vous aurez le point M par où doit passer ce diamétre perpendiculaire. Et partant si vous tirez MN perpendiculaire à AC, & si vous la prolongez vers M en O ensorte que NMO soit égale au diamétre du cercle de la Roulette, vous aurez le diamétre dudit cercle en la position requise; ce qui est facile.

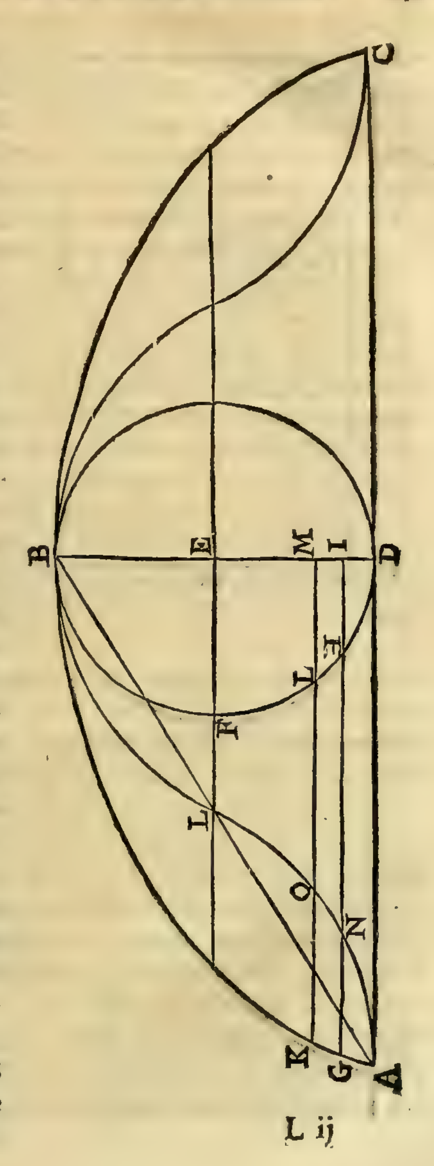
Je ne vous dirai rien des proprietez de la Roulette, comme que la ligne droite EF est à l'arc FB, en même raison que la base AC à toute la circonférence du cercle &c. M. de Roberval ne m'a pas encore fait voir le Traité qu'il en a fait, où après en avoir démontré cette propriété & un grand nombre d'autres, il compare ces lignes les unes aux autres, les semblables, celles de divers genres, les égales, les inégales, leurs ordonnées, leurs espaces &c. ce qu'il a expliqué dans un si bel ordre, qu'il m'a dit que son Traité étoit aussi limé comme s'il eût été sur le point de le faire imprimer.

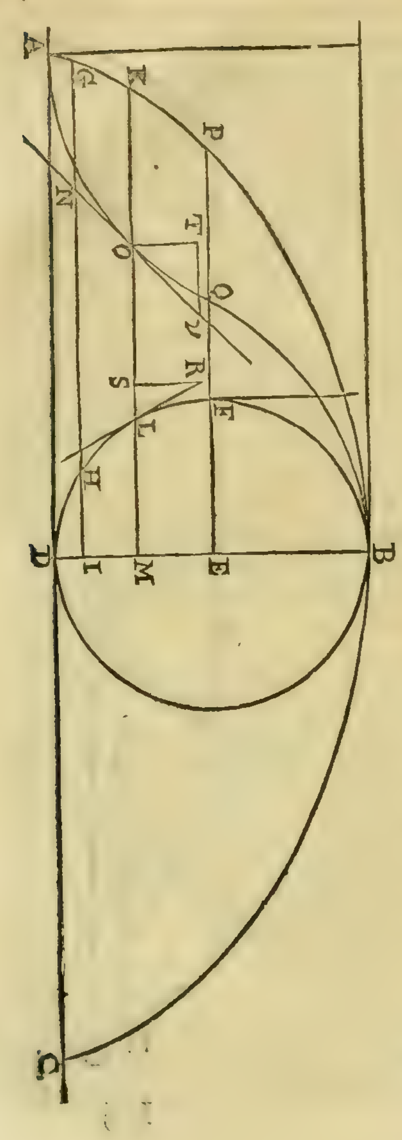
Douziéme exemple, de la compagne de la Roulette.

C'EST ainsi que l'a voulu nommer M. de Roberval qui l'a inventée, & qui en a imaginé l'hipothese & la description en cette sorte.

Soit proposé la Roulette ABC de laquelle la base est AC l'axe BD, le centre du cercle dans l'axe est E, & le cercle de la Roulette BFD à l'entour de l'axe. Entendez que la Roulette est décrite par la seconde façon qui en a été donnée dans l'exemple précédent; c'est à sçavoir que pendant que le cercle de la Roulette glisse depuis A jusques en C, ensorte que son centre E décrit d'un mouvement uniforme une ligne parellele & égale à AC, en même temps le point mobile A parcourt part un mouve-

ment uniforme la circonférence de ce cercle, & décrit la Roulette par le mouvement composé de ces deux; imaginez maintenant que pendant que ce point parcourt ainsi la circonférence DFB, un autre point A ou D mobile dans le diamétre du cercle, qui est toûjours perpendiculaire à AC, monte le long de ce diamétre de D vers B d'un mouvement inégal, ensorte qu'il soit toûjours également élevé sur la base AC, comme est le point qui décrit la Roulette, c'est-à-dire qu'ayant tiré du point de la Roulette comme G, la ligne GHI coupant la circonférence du cercle en H & l'axe en I, lorsque le point mobile qui décrit la Roulette se rencontre en G dans la Roulette, c'est-à-dire en H, dans le cercle, le point qui décrit cette compagne se rencontre en I dans l'axe.





De même tirant par un autre point K la parallele à la base KLM, qui coupe la circonférence BLHD en L & le diamétre BD en M, lorsque le point de la Roulette est en K, c'est-à-dire dans le cercle en tel endroit qu'en L, le point de la compagne de la Roulette est dans BD en tel endroit que M, & ainsi des autres.

D'où il s'ensuit, que pour décrire cette ligne, ayant tiré des points de la Roulette des lignes paralleles à AC, si dans chacune de ces lignes, à commencer aux points de la Roulette, l'on prend une ligne égale à la portion de la même ligne comprise entre la demi-circonférence du cercle & son axe, l'on aura les points par lesquels cette ligne est décrite. Ainsi tirant comme nous avons dit, la ligne GHI, si dans la même

ligne vous prenez GN égale à HI, vous aurez le point N, par lequel passe la compagne de la Trochoïde; de même prenant dans KLM la ligne KO égale à LM, vous aurez un autre point O de la même ligne. Et si par le centre E vous tirez EF perpendiculaire à BD, & si vous la prolongez en P jusqu'à la Roulette; ayant pris de P vers F la ligne PQ égale à EF dans la même ligne PF, vous aurez le point Q, qui est le milieu de cette ligne-ci, & auquel elle change de courbure, comme vous remarquerez mieux ci-après. Or ç'a été la même chose de décrire le cercle autour de l'axe de la Roulette, que de lui donner toutes les diverses positions qu'il a en glissant sur la ligne AC, ce qui a déja été remarqué dans la Roulette.

Ceci posé vous voyez que le point qui décrit cette ligne-ci est porté par un mouvement composé de deux droits, l'un uniforme, l'autre inégale, & desquels les directions sont perpendiculaires l'une à l'autre, se prenant dans les lignes AD, BD ou dans leurs paralleles.

Et parce que le point qui décrit cette ligne-ci monte de la même façon que celui qui décrit la Roulette monte dans le demi-cercle, tirant la touchante du point réciproque dans le demi-cercle, & composant le mouvement dont elle est la direction de deux mouvemens droits, l'un parallele à AD & l'autre à BD, l'on aura dans la ligne parallele à BD la quantité du mouvement qui fait monter ce point; & sçachant la raison de la base AC à la circonférence du cercle, puisque le point qui décrit la compagne de la Roulette est porté d'un mouvement uniforme & égal à AC, comme le point qui décrit la Roulette a un mouvement uniforme, & égal à ladite circonférence, si l'on fait que comme la circonférence du cercle est à AC, ainsi la touchante du cercle soit à une ligne droite, cette ligne sera la quantité du mouvement parallele à AC du point de cette ligne-ci qui

eſt réciproque à celui du cercle auquel l'on a tiré la touchante.

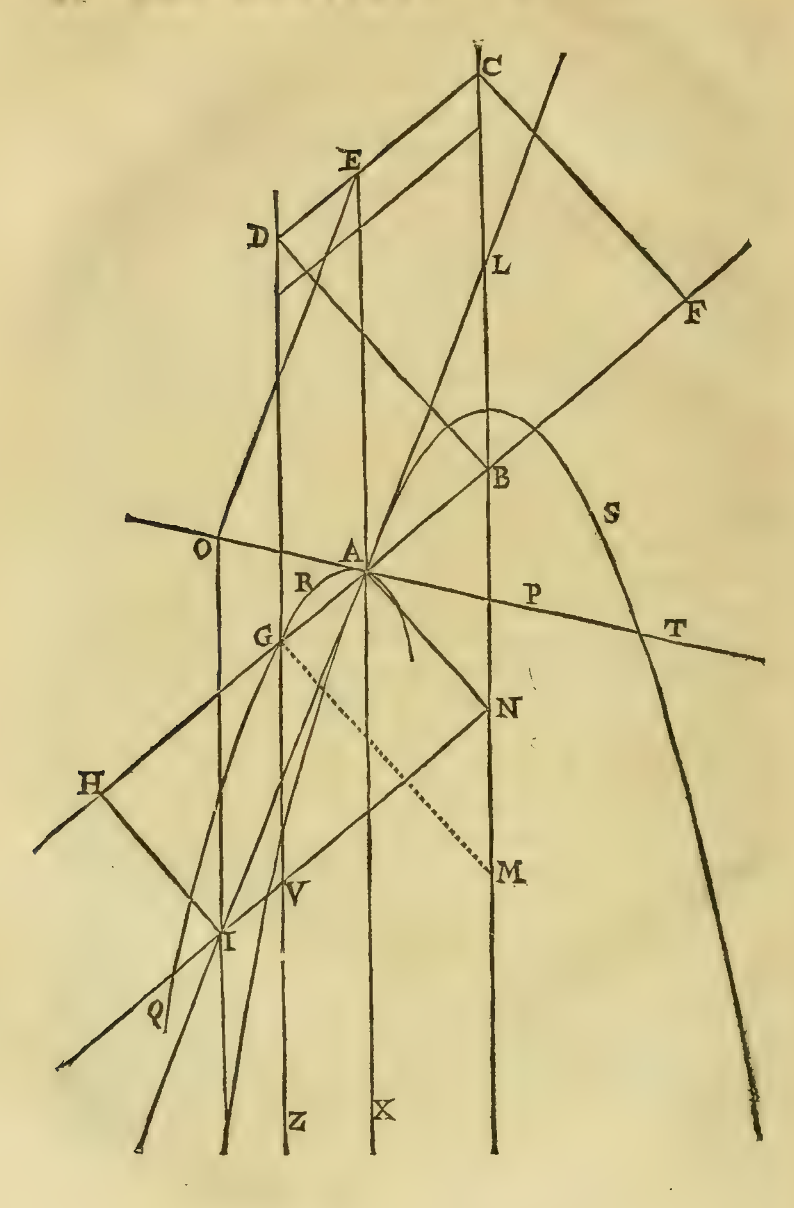
Par exemple, ſoit en la derniére figure ci-deſſus la Roulette ABC du premier genre, c'eſt-à-dire que ſa baſe AC ſoit égale à la circonférence de ſon cercle & le reſte, comme il a été dit : pour tirer la touchante de cette ligne au point O, je tire au cercle par le point L réciproque du point O, la touchante du cercle LR, & je compoſe le mouvement LR de deux RS, SL, dont l'un RS eſt parallele à BD; puis comparant les mouvemens du point O à ceux du point L, puiſque par la ſuppoſition le point O monte autant que le point L, je tire OT parallele & égale à RS, ce ſera la direction & la quantité de ce premier mouvement du point O; puis après parce que le point O a dans une ligne parallele à AC un mouvement égal à celui du point L le long de la circonférence de ſon cercle, c'eſt-à-dire un mouvement égal à celui du point L le long de la touchante LR, ayant tiré TV parallele à AC, & égale à LR, j'aurai les directions & la raiſon des deux mouvemens du point O, & partant la ligne OV ſera la touchante de cette ligne au point O; ce qu'il falloit faire.

Treiziéme exemple, de la Parabole de M. des Cartes.

MONSIEUR des Cartes nous apprend le moyen de décrire en deux façons cette ligne courbe, qui eſt une eſpéce de Parabole : la premiére par ſa regle compoſée qui eſt la 318 page de ſa Méthode, & la deuxiéme en la page 405 de la même Méthode, ou bien 337, qui eſt en faiſant mouvoir une Parabole ordinaire avec ſon plan le long de ſon diamétre MC, & prenant un point fixe comme G hors le même diamétre, mais dans un autre plan fixe ſur lequel le plan de la Parabole ſe

meuve en coulant, ces deux plans convenans toûjours l'un à l'autre pendant le mouvement de celui de la Parabole : puis dans le diamétre B C ſoit marqué un point B, qui ne ſe puiſſe mouvoir qu'au mouvement de la Parabole, demeurant toûjours à pareille diſtance du ſommet ; & ſoit entendu une ligne droite G B indéfinie, qui tourne à l'entour du point fixe G comme centre, & qui paſſe toûjours par B pendant que la Parabole ſe meut, cette ligne GB coupant la Parabole mobile continuellement en de nouveaux points, la ligne courbe qui paſſera par tous ces points ſera la Parabole de M. des Cartes, laquelle à proprement parler eſt une Conchoïde de Parabole, & peut-être double, car la ligne GB peut couper la Parabole propoſée en deux points.

Pour avoir la tangente de ladite ligne courbe, par exemple en A, tirons premiérement deux lignes paralleles au diamétre de la Parabole TSV, que nous faiſons mouvoir ſur la ligne droite MC, deſquelles paralleles l'une DGZ paſſe au point G, qui eſt comme le Pole, & l'autre parallele EAX paſſe au point A auquel nous voulons la touchante ; enſuite examinons premiérement le mouvement du mobile au point B, ledit mobile étant porté ſur la ligne GBF, laquelle ſe meut circulairement ſur le point fixe G en tirant vers les points DC, duquel mobile au point B nous avons la direction, à ſçavoir BC, parce que par la deſcription de la ligne courbe QRA, ledit mobile ſe maintient toûjours dans la ligne MC : nous avons auſſi les deux autres directions deſquelles eſt compoſée BC, l'une la circulaire DB, la ligne DB étant perpendiculaire ſur GB, & l'autre direction la ligne droite BF, nous aurons donc ces directions, & les raiſons des vîteſſes dudit mobile au point B : or les points qui ſont dans la Parabole mobile montant tous également, ſi nous menons


C
E
D
L
F
B
S
O
A
R
P
T
G
N
H
M
V
I
Q
Z
X

menons du point C une parallele à BG, sçavoir CD, les lignes DG, EA & BC seront égales, & par conséquent EA & DG seront les mêmes directions que BC; ensuite examinons le mouvement du point A, auquel nous voulons avoir la touchante; & considérons le point B comme étant fixe & arrêté, autour duquel se meuve circulairement la même ligne BG vers VMT, car c'est le même mouvement circulaire que le précédent; donc l'une de ces directions, à sçavoir la circulaire, sera AN; & les angles DGB & GBM étant égaux, en même temps que le point B ira en D, aussi le point G ira en M, & A en N, les lignes GM & AN étant paralleles à BD; donc la direction circulaire du point A sera AN; mais le même point A se maintenant toûjours dans la Parabole TSV, sa direction sera la touchante de la même Parabole TSV. Soit donc menée cette touchante, à sçavoir IL, & achevé le parallelogramme AHIN, nous avons donc AI pour direction de ce point A se mouvant circulairement, & se maintenant aussi dans la Parabole STV, nous avons aussi la direction du même point A se maintenant dans MG, à sçavoir AE égale à BC, & par conséquent le parallelogramme EOIA étant achevé, la ligne droite OA diagonale du parallelogramme sera la direction du point A, & par conséquent la touchante de la ligne courbe QGRA audit point A; ce qu'il falloit faire.



PROJET
D'UN LIVRE DE MECANIQUE
traitant des Mouvemens composez.

PAR un mouvement composé j'entens celui qui se fait de deux ou plusieurs mouvemens differens entr'eux, soit par leurs directions ou leurs vîtesses, ou par toutes les deux, lorsque tous ces mouvemens sont communiquez à un même mobile, ou en même temps, ou successivement, soit que la communication s'en fasse en un instant, ou avec du temps.

On peut considérer le mouvement composé en trois états différens; sçavoir, ou dans ses causes, ou en soi-même pendant sa durée, ou dans ses effets.

Les causes d'un mouvement en tant que composé sont les mouvemens particuliers qui le composent, qui sont ou simples, ou composez eux-mêmes.

Ici on discourra des causes des mouvemens simples qui sont les principes actifs de la nature dans ses corps différens, soit qu'ils agissent par des causes ordinaires & réglées comme par la pesanteur, ou légereté, & par de pareilles qui nous paroissent uniformes ou à peu près, soit que ces causes, quoiqu'ordinaires, ne soient pas réglées, comme l'action du feu, celle des ressorts, celle des animaux &c. Ce qu'on amplifiera par les exemples des feux artificiels, par la poudre à canon, ou autrement par les arcs, les arquebuses à vent, & les autres actions de l'air. On y ajoûtera les mouvemens particuliers du soleil & des étoiles: on y fera entrer l'artifice des

hommes, qui par leurs propres forces, & par celles tant des animaux que des autres corps naturels, peuvent faire des mouvemens composez, d'autant plus diversifiez qu'ils ont de connoissance & d'industrie.

La nature en général possede les principes des mouvemens simples, dont il s'en compose une infinité d'autres dans les animaux, végétaux, minéraux &c.

Quoiqu'on connoisse les mouvemens simples qui en font un composé, il n'est pas toûjours facile de connoître ce composé, ni les lignes qu'il décrit par sa composition, particuliérement quand elles sont courbes, comme il arrive d'ordinaire. De là vient cette science spéculative qui tient beaucoup de la Géométrie, & qui traite des lignes & des figures décrites par les mouvemens composez; de leurs tangentes & de leurs autres propriétez.

Le mouvement composé considéré en soi n'est point différent d'un mouvement simple; & on le peut considérer comme simple, quand il est connu, de même que s'il étoit produit dans la nature par sa simplicité; même on peut considérer non-seulement un mouvement composé; mais aussi un mouvement simple droit ou courbe, comme étant composé de plusieurs autres, tant simples que composez; ce qui sert souvent pour la découverte de plusieurs belles véritez touchant la nature & les propriétez des lignes & des figures, qu'on ne découvriroit pas si facilement sans cette considération, quoique souvent elle ne soit qu'une fiction, mais pourtant une fiction d'une chose possible.

Il est remarquable que quand un mouvement composé se présenteroit à nous, si nous ne sçavons point qui sont ceux qui l'ont composé, quand même nous sçaurions qu'il n'est pas simple, nous ne sçaurions pourtant découvrir avec certitude qui sont les composans. La principale raison de ce défaut vient de ce que

tout mouvement peut être composé de plusieurs sortes, & même d'une infinité de sortes, entre lesquelles il seroit difficile, pour ne pas dire impossible, de rencontrer la véritable.

Touchant les effets du mouvement composé, ils ne sont remarquables qu'au même temps qu'il se compose; car après qu'il est composé, ses effets ne sont plus différens de ceux d'un mouvement simple.

En général ces effets sont de changer de vîtesse, ou de direction, ou de toutes les deux, sans compter que de deux ou de plusieurs mouvemens actuels il se peut composer un repos.

Mais en particulier, ou ils font des lignes différentes, ou des figures différentes, ou ils changent des temps égaux en des inégaux, ou au contraire, & partant quelquefois ils réglent, quelquefois ils déréglent; ils établissent, ils détruisent, & ainsi d'une infinité d'actions causées dans toute la nature par une telle composition.

Mais il ne sera pas hors de propos d'apporter ici pour exemple quelques-uns de ces effets particuliers, pour porter les esprits à la considération d'une infinité d'autres.

Les carosses courant vîte, & voulant tourner trop court, versent. Il en est de même de ceux qui sautent hors d'un carosse qui court.

De l'effet des lances, qui rompent, qui faussent, ou qui glissent sur les cuirasses.

Des balles de mousquet, de pistolet &c. sur des corps mobiles, tant sur ceux qui les repoussent que sur ceux qui les laissent entrer plus ou moins, ou qui écrasent la balle; du coup oblique qui est une espéce de mouvement composé, même sur un corps immobile. On citera les sillons des balles & des boulets sur la terre & sur l'eau, & on examinera si la réfraction ne feroit pas un pareil effet.

Les montres & les horloges se déréglent dans le transport, & les pendules y sont des plus sujettes.

Les pierres & quelques boulets de fer rougis au feu s'en vont en piéces au sortir des canons.

Le choc de l'air, de l'eau & des corps terrestres font des compositions de mouvemens suprenans & souvent dangereux, tant sur la terre que sur la mer.



DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.

ÆQUATIONEM recognoſcere, eſt ſtatum illius examinare, eo fine ut innoteſcat ejus conſtitutio hinc ab origine ejuſdem, uſque ad ultimam ordinationem: atque un nota fiat laterum datorum, ad ea quæ quæruntur habitudo; item ut dignoſci poſſit, an de unico larere ignoto explicabilis ſit ipſa æquatio, an vero de pluribus, & quot; atque utrum aliqua ex ipſis ſint æqualia, an vero omnia inæqualia. Rurſus ſintne latera quæſita poſitiva, ſeu realia, ſeu etiam poſſibilia: an contra ficta, ſeu nulla, ſeu etiam impoſſibilia. Quæ omnia ut melius intelligi poſſint, præmittenda ſunt quædam, tum circa vocabulorum ac notarum, ſeu ſignorum explicationem, tum etiam circa ordinem, quem in ordinando hoc opere ſequi decrevimus.

Ac primum, quod ad vocabula, notas, ſeu ſigna ſpectat, ſive de lateribus ſit quæſtio, ſive de potentiis eorumdem laterum, quædam agnoſcimus quæ ſuâ naturâ aliquid inducant ſupra nihilum; quædam verò quæ ſuâ naturâ aliquid indicant infra, dicantur omnia tum hæc, tum illa poſitiva; priora quidem poſitiva ſupra, poſteriora autem poſitiva infra.

Rursùs tam poſitiva, ſupra quam poſitiva infra, vel affirmativa ſunt, vel negativa; ſed affirmativa ſupra æquivalent negativis infra, & è contrario. Et quidem, ſignum affirmationis tam ſupra quàm infra, eſt hoc vulgò receptum $+$. Signum negationis tam ſupra quàm

infra, eſt hoc aliud vulgò quoque receptum —. Signum differentiæ inter duas magnitudines, eſt ejuſmodi ═. Quo ambiguum relinquitur quænam ex duabus magnitudinibus propoſitis, inter quas tale ſignum intercedit, major eſt aut minor. Signum æqualitatis tale eſt ∞; quo ſignificatur magnitudines inter quas illud intercedit, eſſe æquales; ſive una magnitudo uni magnitudini æquetur; ſive una pluribus; ſive plures uni; ſive denique plures pluribus.

Operæpretium fuiſſet ſi quæ ſuâ naturâ habentur infra magnitudines, certo aliquo ſigno ab aliis diſtincto notatæ eſſent: verùm quia paſſim, immò ferè ſemper accidit ut in eadem quæſtione, ſub iiſdem terminis, magnitudines quæſitæ ſint, ſupra vel infra, ex natura ipſius quæſtionis, ac vi æquationis ad ipſam pertinentis; ideò talis diſtictio commodè fieri non potuit fiet tamen ut notâ ejuſmodi æquationis conſtitutione, innoteſcat etiam natura ipſorum laterum, & quicquid ad numerum eorumdem determinandum requiritur, ut magis patebit in ſequentibus.

Præterea omnis multiplicator nihilho æquivalens multiplicans quodvis multiplicatum (ſeu illud multiplicatum nihilo æquivalea, ſeu aliquid ſupra, aut infra indicet) producit nihilo æquivalens. Idem accidit, ſive multiplicator nihilo æquivaleat, ſive aliquid indicet ſupra aut infra, dummodo multiplicatum æquivaleat nihilo.

Idem prorſus intelligendum de diviſione, quod de multiplicatione; diviſor enim hic gerit vices multiplicatoris, quotiens multiplicati, & diviſum producti; quandoquidem multiplicatio reſtituit diviſionem, & diviſio mulplicationem. Hæc de notis ſeu ſignis, nunc de ordine dicamus.

Multis quidem modis ordinari poteſt æquatio, præ-

cipuè si multipliciter affecta sit; & revera à diversis authoribus diversimodè constitutus est ordo ipse, nobis accommodatissius ille videtur qui omniaquibus æquatio constat homogenea ex una parte constituit; sic ut omnia simul nihilo æquivaleant, quod quidem nullo negotio semper efficitur; illud autem vel unico exemplo planum fiet. Proponatur methodo Vietæ hæc æquatio $A^3 - BA^2 + C^2A \infty Z^{s.}$ manifestum est per anthitesim oriri hanc æquationem $Z^{s.} - C^2A + BA^2 - A^3 \infty O$, vel hanc $A^3 - BA^2 + C^2A - Z^{sol.} \infty O$. Etsi vero utraque formula nostro instituto accomodari possit, priorem tamen eligimus, eam scilicet in qua magnitudo omninò data $Z^{sol.}$ afficitur semper affirmatè, ac secundum eam intelligi debent quæcumque postea dicturi sumus.

De constitutione æquationum quadraticarum.

CAPUT UNICUM.

Propositio prima.

Si $Z^p - RA + A^2 \infty O$.

Sunt duo latera, ambo supra, quorum summa est R; rectangulum vero sub ipsis est Z^p & sit A alterutrum ex istis.

Intelligatur enim $A - B \infty O$ sic ut $+A$ æquetur ipsi $+B$ vel $A - C \infty O$ sic ut $+A$ æquetur isti $+C$: unde si ducatur $A - B$ in $A - C$ quod inde orietur æquabitur nihilo. Productum autem illud est $BC \genfrac{}{}{0pt}{}{-BA}{-CA} + A^2$, proinde hoc æquatur nihilo, quod semper accidet. Sive enim A æquetur ipsi B ita ut $A - B \infty O$, quicquid valeat $A - C$, si $A - B$ ducatur in $A - C$, hoc

hoc eſt ſi nihilum per quodvis multiplicetur, producitur nihilum; ſive A æquetur ipſi C, ita ut $A - C \propto O$, quicquid valeat $A - B$, ſi $A - C$ ducatur in $A - B$, hoc eſt ſi nihilum per quodvis multiplicetur, producitur nihilum.

Jam BC vocetur ex hipotheſi Z P; & $B + C$ vocetur R; fietque id quod proponitur nempe $Zp - RA + A^2 \propto O$ qua in æquatione A poteſt explicari tam de ipſo B quam de ipſo C à quibus producitur BC ſive Z P.

Pro determinatione.

Determinatio alicujus æquationis eſt conſtitutio illa in qua vel omnia, vel quædam ex lateribus de quibus explicabilis eſt æquatio inter ſe æqualia ſunt; unde cum de duobus tantum lateribus explicari poteſt æquatio, quales ſunt quadraticæ unica tantum poteſt eſſe determinatio, cum ſcilicet duo latera ſunt æqualia. Cum autem de tribus lateribus æquatio explicabilis eſt, quales ſunt cubicæ; tunc duplex eſſe poteſt determinatio, altera quidem major, cum omnia tria latera æqualia ſunt, altera vero minor, cum duo tantum æqualia ſunt. Atque ita quo plura erunt latera in aliqua æquatione, id eſt quo potentia illius altior erit, eo plures erunt illius determinationes.

Jam in propoſita æquatione unica eſſe poteſt determinatio in qua duo latera de quibus A eſt explicabile erunt æqualia; cum ſcilicet Z P æquatur $\frac{1}{4}$ R: tunc enim unumquodque ex ipſis lateribus A æquale eſt $\frac{1}{2}$ ipſius R.

Nam in prædicta formula $BC \begin{matrix} -BA \\ -CA \end{matrix} + A^2 \propto O$ in caſu determinationis B intelligitur æquari ipſi C; unde illa æquatio æquivalet huic $B^2 - 2BA + A^2 \propto O$, ſive etiam huic per interpretationem $Zp - RA + A^2 \propto O$

ut proponitur, ubi quoniam $R \propto 2B$ manifestum est Zp esse quadratum ipsius B, sive dimidii ipsius R, sive etiam Zp esse quartam partem quadrati ipsius R, & A quod æquatur ipsi B vel C, esse dimidium ipsius R..

Propositio secunda..

Si $Zp + RA - A^2 \propto O$.

Sunt duo latera inæqualia, quorum alterum, idemque majus est supra, alterum minus est infra, differentia amborum est R, & rectangulum sub ipsis Zp & sit A, alterutrum ex ipsis, (intelligatur enim $B - A \propto O$ sic ut A dum erit supra, æquetur ipsi B; vel $C + A \propto O$ sic ut A dum erit infra, æquetur ipsi C. Atque ex hypothesi sit B majus quàm C.) Si igitur $B - A$ ducatur in $C + A$, quod inde orietur æquabitur nihilo.

Productum autem id est $BC \begin{smallmatrix} + BA \\ - CA \end{smallmatrix} - A^2$ æquatur nihilo. Quo pacto æquatio explicabilis est de A supra, æquali ipsi B. Ubi tamen æquatio hanc interpretationem accipere debet ut $BC \propto Zp$ & $B - C \propto R$. Quod si quis singulas æquationis partes conferre velit, ut noscat qua ratione ipsæ se invicem tollant, is reperiet $+ BC$ & $- CA$ sese tollere, item $+ BA$ & $- A^2$ se tollere quoque. Unde fit ut omnia homogenea simul nihilo æquivaleant.

Jam si C intelligatur æquari ipsi A, atque $+ C +$ A multiplicetur per $+ B - A$, productum erit rursus $BC \begin{smallmatrix} + BA \\ - CA \end{smallmatrix} - A^2$, quæ æquatio est eadem quæ supra, unde, illa explicabilis quoque est de A dum ipsum æquatur ipsi C, ita tamen ut ipsum sit infra ut indicat $C + A \propto O$, vide notas post æquationes cubicas. Hîc autem $+ BC + BA$ se invicem tollunt sicuti $- CA -$

A^2; ut rurſus omnia nihilo æquentur; atque æquatio eandem quam ſupra accipere debet interpretationem.

Propoſitio tertia.

SI $Zp - RA - A^2 \propto O$.

Sunt duo latera inæqualia, quorum alterum idemque minus eſt ſupra, alterum majus eſt infra, differentia amborum R, & rectangulum ſub lateribus ipſis Zp: A autem explicabile eſt de alterutro ex iiſdem.

Intelligatur enim ut ſupra $B - A \propto O$ item $C + A \propto O$ & B minus ſit quam C; fiet ergo productum $BC \begin{smallmatrix} -BA \\ -CA \end{smallmatrix} - A^2 \propto O$ quod quidem ſi hanc interpretationem acccipiat ut $BC \propto Zp$, & $C - B$ ſit R, habebimus æquationem propoſitam: cætera ſe habent ut ſupra.

Nec ulla eſt in duabus prædictis propoſitionibus deterterminatio, quia in utraque duo latera, de quibus A explicabile eſt, ſunt ſemper inæqualia.

Item nulla alia eſt inter duas haſce æquationes differentia, niſi quod in priori latus quod eſt ſupra majus eſt eo quod eſt infra, in poſteriori autem illud quod eſt ſupra, minus eſt eo quod eſt infra.

Propoſitio quarta.

SI $Zp - A^2 \propto O$.

Sunt duo latera æqualia, quorum alterum eſt ſupra, alterum infra, rectangulum ſub ipſis eſt Zp & ſit A alterutrum ex iiſdem.

Intelligatur enim $B - A \propto O$ ſic ut $+ A \propto + B$ ſupra. Item $C + A \propto O$, ſic ut A ex ſe æquetur ipſi C infra; ponaturque B æquari eidem C: itaque ſi fiat multiplicatio ut in antecedentibus, productum erit

$BC\,{}^{+BA}_{-CA} - A^2 \propto O$. Quod si hanc interpretationem accipiat ut $BC \propto Zp$, quia tollunt se invicem ${}^{+B}_{-C}$ habebimus æquationem propositam $Zp - A^2 \propto O$, quæ explicabilis est tam de A supra æquali ipsi B, quam de A infra æqualia ipsi C.

Propositio quinta.

SI $Zp + A^2 \propto O$.

Nullum propriè loquendo est latus, sed unicum planum æquale ipsi Zp de quo quidem est explicabile ipsum A^2.

Ejusmodi autem æquatio irregularis est, nec potest ipsa oriri ex multiplicatione, ut factum est in antecendentibus.

Nota ergo æquationes quasdam de planis tantum explicabiles esse, quod etiam ad solida & ultra in infinitum extendi, quivis satis doctus reperiet.

De constitutione æquationum cubicarum.

CAPUT PRIMUM.

SI $Zs - SpA + RA^2 - A^3 \propto O$.

Vide postea propositionem specialem.

Sunt tria latera positiva supra, quorum summa est R, summa trium rectangulorum ex ipsis binis ac binis sumptis est Sp, solidum autem sub iisdem contentum est Zs, & sit A quodvis ex ipsis tribus.

Intelligamus enim $\left.\begin{array}{l} B - A \propto O \\ C - A \propto O \\ D - A \propto O. \end{array}\right.$ & per quodvis ex istis

tribus binomiis, per illud scilicet quod nihilo æquari intelligitur, multiplicetur productum ex aliis duobus, quicquid illa duo valeant, & quicquid valeat eorumdem productum, fiet productum ex omnibus tribus æquale nihilo illud autem est.

$$\begin{array}{l} \quad - BCA + BA^2 \\ BCD - BDA + CA^2 - A^3 \infty O \\ \quad - CDA + DA^2 \end{array}$$

Omnia autem hanc interpretationem accipiunt ut BCD ∞ Zſ.

$$\begin{array}{lll} \text{Item} - BC \infty Sp & \& + B \infty R \\ \quad - BD & \quad + C \\ \quad - CD & \quad + D \end{array}$$

Quo pacto habebimus æquationem propositam Zſ — SpA + RA² — A³ ∞ O.

Quia vero in multiplicatione binomiorum, ipsum A triplicem valorem induere potuit, puta vel ipsius B, vel C, vel D, sic ut in eandem formulam semper incidamus, nec ullo modo mutetur æquatio, patet ipsam de eodem triplici A explicabilem esse, sub ipso triplici valore.

Determinatio præcedentis æquationis.

Hujus æquationis determinatio duplex est, altera major, in qua omnia tria latera sunt æqualia; altera minor, in qua duo tantum æqualia sunt.

Major determinatio ejusmodi sortitur constitutionem ut Zſ æquale sit cubo tertiæ partis longitudinis R, sive ut ipsum Zſ ∞ $\frac{1}{27}$ R³, & Sp æquale sit triplo quadrati ejusdem tertiæ partis longitudinis R, sive ut ipsum Sp

$\infty \frac{1}{3} R^2$, patet hoc ex eo quod ex constitutione præcedenti, si B, C, D, intelligantur tria latera æqualia, erit solidum BCD, sive Z s æquale ipsi B^3.

$$\text{Item plana } \left.\begin{matrix} BC \\ BD \\ CD \end{matrix}\right\} \text{ simul, sive } Sp \infty 3B^2; \text{ \& tandem latera } \left.\begin{matrix} B \\ C \\ D \end{matrix}\right\}$$

simul, sive R æqualia 3 B.

Minor determinatio longiori eget apparatu, pro quo ponamus duo latera æqualia esse ea quæ in constitutione præcedenti referebantur per B & C, quo pacto sic æquatio explicari poterit, ut $B^2 D \infty Z s$;

Item $B^2 + 2 BD \infty Sp$ & $2 B + D \infty R$.

$$\text{Atque ita } B^2 D - B^2 A + 2 BA^2 - A^3 \infty O$$
$$- 2BDA + DA^2.$$

Jam quia B est A & $2 B + D$ est R, ideo $R - 2 A$ est D. Hanc ergo speciem induat D in posterum, ut sit $R - 2 A$.

Item B^2 est A^2, quod ductum in D id est in $R - 2A$, producit $RA^2 - 2 A^3$ quæ species proinde æqualis est Zs, & omnibus ordinatis

$$\tfrac{1}{2} Z s. - \tfrac{1}{2} RA^2 + A^3 \infty O.$$

Rursus B^2 est A^2: & 2 BD est $2 RA - 4 A^2$ quæ ambas species simul constituunt, $2 RA - 3 A^2$ ambæ autem constituunt Sp. Itaque $2 RA - 3 A^2 \infty Sp$, & omnibus ordinatis

$$\tfrac{1}{3} Sp - \tfrac{2}{3} RA + A^2 \infty O.$$

Hic nisi ambigua esset hæc æquatio plana, ac de duobus lateribus supra explicabilis, jam haberetur valor ipsius A; sed quia duplex est valor ille nempe, vel latus $(\frac{1}{9} R^2 - \frac{1}{3} Sp) + \frac{1}{3} R$, vel $\frac{1}{3} R$ — latere $(\frac{1}{9} R^2 - \frac{1}{3} Sp)$

eſtque ex illis, alter quidem utilis, alter inutilis, atque etiam ſi utilem agnoſcere non ſit difficile, tamen quia ex comparatione quarumdem aliarum æquationum ad ſimplicem lateralem, ac de unico eoque vero latere explicabilem devenire poſſumus, ideo ſic progrediemur.

Sed ſupra etiam $\frac{1}{2}Z\,s. - \frac{1}{2}RA^2 + A^3 \propto O.$

Aſcendat per A depreſſior harum æqnationum nempe hæc

$$\frac{1}{3}Sp - \frac{2}{3}RA + A^2 \propto O.$$

Atque ita fiet hæc $\frac{1}{3}SpA - \frac{2}{3}RA^2 + A^3 \propto O.$

Huic ergo æqualis eſt $\frac{1}{2}Z\,s. - \frac{1}{2}RA^2 + A^3 \propto O.$

Sublatoque communi A^3 & addito $\frac{1}{2}RA^2$ puta per anthiteſim fiet hæc æquatio.

$$\frac{1}{2}Z\,s. \propto \frac{1}{3}SpA - \frac{1}{6}RA^2.$$

Et communidiviſore $\frac{1}{6}R$ adhibito $\frac{3Z\,s.}{R} \propto \frac{2Sp}{R}A - A^2.$

Atque omnibus ordinatis $\frac{3Z\,s.}{R} - \frac{2Sp}{R}A + A^2 \propto O.$

Sed rurſus ut ſupra $\frac{1}{3}Sp - \frac{2}{3}RA + A^2 \propto O.$

Ergo hæ duæ æquationes invicem æquales ſunt, unde ſublato communi A^2 & per anthiteſim fiet hæc æquatio $\frac{3Z\,s.}{R} = \frac{\frac{1}{3}Sp}{R} = 2SpA = \frac{2}{3}RA.$

Itaque $\dfrac{\frac{3Z\,s.}{R} = \frac{1}{3}Sp}{\frac{2Sp}{R} = \frac{2}{3}R}$ eſt valor ipſius A

Si ergo accidat aliquam ex præmissis differentiis vel utramque esse æqualem nihilo, vel alteram esse nihilo minorem, alteram verò nihilo majorem, nulla erit ejusmodi determinatio: sed æquatio explicari poterit de tribus lateribus supra, at de uno tantum. Aliquo tamen casu fieri poterit, ut sub proposita initio æquationis formula unicum inveniatur latus supra, & unicum infra, quod proprie latus non est, sed planum tunc autem propositio specialis est cujus explicandæ hic est locus.

Propositio secunda specialis.

Si $Z^{s} - S^{p} A + R A^{2} - A^{3} \propto O$,
Sit autem $\frac{Z^{s}}{R} \propto S^{p}$.

Sunt duo latera, alterum suprà æquale ipsi R, alterum infrà non proprie latus, sed planum æquale ipsi S^{p}, & A explicari potest de quolibet ipsorum. Fingatur enim $B^{p} + A^{2} \propto O$ quæ æquatio explicabilis est de unico plano infra æquali ipsi B^{p} ut notatum est prop. 5ª. Æquat. quadraticarum.

Item $C - A \propto O$ tum fiat multiplicatio ut consuevimus.

Orietur ergo $B^{p} C - B^{p} A + C A^{2} - A^{3} \propto O$.

Hæc æquatio eam accipiat interpretationem ut $B^{p} C \propto Z^{s}$. & $B^{p} \propto S^{p}$, atque $C \propto R$.

Quod pacto indecimus in æquationem propositam, ubi manifestum est ex generatione $\frac{Z^{s}}{R} \propto S^{p}$, & A esse æquale vel ipsi C, hoc est R supra, vel A^{2} est æquale ipsi B^{p}, hoc est S^{p} infra.

CAPUT

CAPUT SECUNDUM.

Propositio prima.

Si $Z^{s} - S_{p}A^{2} + A^{3} \propto O$.

Sunt tria latera, quorum duo ſunt ſupra, & tertium infra, idemque majus duobus reliquis ſimul ſumptis, differentia ſeu exceſſus tertii, ſupra ſummam duorum priorum eſt R: at S_{p} eſt differentia ſeu exceſſus ſummæ duorum rectangulorum, ejus ſcilicet quod ſub primo & tertio, & ejus quod ſub ſecundo & tertio, ſupra id, quod ſub primo & ſecundo, ſolidum autem Z^{s} quod fit ſub tribus, & A explicabile eſt de quolibet ex ipſis.

Intelligantur enim $B - A$
$C - A$
$D + A$

Quorum D ſit majus ambobus B & C ſimul ſumptis; ſit autem quævis ex illis tribus ſpeciebus nihilo æqualis, & fiat multiplicatio ſolito modo orieturque,

$$\begin{array}{l} \quad\;\; - BDA + DA^{2} \\ BCD - CDA - BA^{2} + A^{3} \propto O. \\ \quad\;\; + BCA - CA^{2} \end{array}$$

& quia D majus ponitur quam B & C ſimul, manifeſtum eſt BC multo minus eſſe quam BD & CD ſimul ſumpta. Itaque omnia hanc interpretationem recipiant ut $+ D - B - C$ ſit $+ R$, item $- BD - CD + BC$ ſit $- S_{p}$; & BCD ſit Z^{s}. quo pacto incidemus in æquationem propoſitam.

$$Z^{s} - S_{p}A + RA^{2} + A^{3} \propto O.$$

Patet autem ex formula, A explicabile eſſe tam de B

aut C ſupra quàm de D infra, quia in multiplicatione binomiorum ipſum triplicem hunc valorem induere potuit.

Determinatio præcedentis æquationis.

DETERMINATIO unica eſt, nempe minor, cum ſcilicet duo latera ſupra ſunt æqualia; aliter enim æqualia eſſe non poſſunt: ſi quidem illud quod eſt infra, duobus reliquis ſimul majus eſt.

Poſito ergo quod B & C ſunt æqua, explicari poterit formula æquationis hoc modo.

$$B2D - 2BDA + DA^2$$
$$+ B2A - 2BA^2 A^3 \propto O.$$

Quoniam autem B eſt A & D — 2 B eſt R, ergo D — 2 A eſt R & per anthiteſim R + 2 A eſt D, hanc ergo ſpeciem induat D in poſterum ut ſit R + 2 A.

Item B^2 eſt A^2, quod ductum in D, id eſt in R + 2 A producit $RA^2 + 2 A^3$, quæ ſpecies proinde æqualis eſt Z ſ & omnibus ordinatis

$$\tfrac{1}{2} Z ſ - \tfrac{1}{2} RA^2 - A^3 \propto O.$$

Rurſus B^2 eſt A^2, & 2 BD eſt 2 RA + 4 A^2. Quarum ambarum ſpecierum differentia eſt 2 RA + 3 A^2, hæc idcirco æqualis eſt S p & omnibus ordinatis.

$$\tfrac{1}{3} Sp - \tfrac{2}{3} RA - A^2 \propto O.$$

Aſcendat hæc æquatio par A gradum, atque ita rurſus

$$\tfrac{1}{3} Sp A - \tfrac{2}{3} RA^2 - A^3 \propto O.$$

Ergo huic æquationi æquatur hæc

$$\tfrac{1}{2} Z ſ - \tfrac{1}{2} RA^2 - A^3 \propto O.$$

Additisque communibus A^{3}, & $\frac{1}{2} R A^{2}$ fiet hæc

$$\frac{1}{3} S p A - \frac{1}{6} R A^{2} \infty \frac{1}{2} Z s.$$

Et communi divisore adhibibito $\frac{1}{6} R$, erit $\frac{2 S p A}{R} - A^{2} \infty \frac{3 Z s.}{R}$

Et omnibus ordinatis $\frac{3 Z s}{R} - \frac{2 S p A}{R} + A^{2} \infty O.$

Mutatisque omnibus signis $- \frac{3 Z s.}{R} + \frac{2 S p A}{R} - A^{2} \infty O.$

Sed rursus supra $\frac{1}{3} S p - \frac{2}{3} R A - A^{2} \infty O.$

Itaque addito communi A^{2} & per anthitesim fiet hæc æquatio

$$\frac{3 Z s}{R} + \frac{1}{3} S p \infty \frac{2 S p A}{R} + \frac{2}{3} R A.$$

Itaque $\dfrac{\frac{3 Z s}{R} + \frac{1}{3} S p}{\frac{2 S p}{R} + \frac{2}{3} R.}$ est valor ipsius A.

Propositio secunda.

SI $Z s. - S p A + A^{3} \infty O.$

Sunt tria latera, quorum duo sunt supra, & tertium infrà, idemque æquale duobus prioribus simul sumptis.

$S p$ est excessus summæ duorum rectangulorum, ejus scilicet quod sub primo & tertio, & ejus quod

ſub ſecundo & tertio, ſupra id quod ſub primo & ſecundo.

$Z^{ſ}$. autem eſt id quod ſub tribus continetur, & A explicabile eſt de quolibet ex ipſis tribus: ponantur enim eædem ſpecies quæ ſupra, niſi quod D intelligi debet æquale duobus B & C ſimul, fietque rurſus eadem æquatio.

$$\begin{array}{l} \qquad -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \propto O \\ \qquad + BCA - CA^2 \end{array}$$

Quoniam autem D, ponitur æquale duobus B & C ſimul, ideo evaneſcet affectio ſub A^2 quia $-BA^2 - CA^2$ tollunt DA^2, ſupereſt ergo tantum.

$$\begin{array}{l} \qquad -BDA + \\ BCD - CDA + A^3 \propto O \\ \qquad + BCA \end{array}$$

Ubi rectangula BD & CD ſimul majora ſunt quam BC.

Quæ æquatio ſi hanc interpretationem accipiat, ut BCD æquetur $Z^{ſ}$. & $\begin{array}{l} -BD \\ -CD \\ +BC \end{array}$ æquetur $-S_P$,

Incidemus in æquationem propoſitam $Z^{ſ} - S_P A + A^3 \propto O$.

Ubi manifeſtum eſt ipſum A explicabile eſſe tam de B & C ſuprà, quàm de D infrà.

Determinatio rurſus unica eſt, nempe minor, cum duo latera ſuprà ſunt æqualia, neque enim aliter æqualia eſſe poſſunt, cum illud quod eſt infrà duobus reliquis ſimul ſumptis ſit æquale.

Invenietur ergo hæc derminatio ſic.

Poſitis B & C æqualibus, æquatio talis eſſe poterit.
$B^2D - 3B^2A + A^3 \propto O$ unde $S_P \propto 3B^2$.*

*Quoniam D æquatur B & C ſimul; ac B & C ſimul in D æquoles ſunt 4 B^2, ex quibus ſublato BC quod eſt B^2 reſtat $3B^2$.

Posito ergo, quod B sit A ex hypothesi determinationis, tunc $Sp \propto 3 A^2$.

Itaque $\frac{1}{3} Sp$ est valor ipsius A^2 & $Z^f \propto 2 A^3$.

Propositio tertia.

SI $Z^f - Sp A - RA^2 + A^3 \propto O$.

Sunt tria latera, quorum duo sunt suprà, & tertium infrà, idemque minus duobus prioribus simul sumptis, excessus summæ duorum priorum supra tertium est R, at rursus ut in duabus præcedentibus propositionibus summa duorum rectangulorum, ejus scilicet, quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio excedit id quod sub primo & secundo, & excessus est Sp; Z^f. autem est id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus.

Ponantur enim eædem species quæ suprà ea tamen lege ut D intelligatur minus quàm B & C simul, & rectangula BD & CD simul majora quàm BC, fietque rursus hæc æquatio ut suprà, nempe

$$\begin{array}{l} \quad\;\; - BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \propto O \\ \quad\;\; + BCA - CA^2 \end{array}$$

Quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut excessus B & C simul suprà D, sit R; at excessus rectangulorum BC & CD simul suprà BC, sit Sp; item solidum BCD sit $Z f$, incidemus in æquationem propositam,

$$Z^f - Sp A - RA^2 + A^3 \propto O.$$

Ubi manifestum est A explicari posse tam de B & C suprà, quàm de D infrà.

Determinatio præcedentis æquationis.

Huius propositionis determinatio triplex esse potest, prima major, cùm omnia tria latera sunt æqualia; secunda, cùm duo latera suprà tantùm sunt æqualia; & tertia, cùm alterum eorum laterum, quæ sunt suprà, æquale est ei quod est infrà. Utraque autem harum posteriorum minor est, quàm idcirco hic accidit esse duplicem.

Et quidem major determinatio facillima est.

Positis enim B, C, D æqualibus, factaque binomiorum multiplicatione, & sublatis quæ se invicem destruunt, manifestum est superesse

$BCD - BDA - BA^2 + A^3 \propto O.$

Sive quod idem est $B^3 - B^2A - BA^2 + A^3 \propto O.$

Itaque Z^s est B^3 sive A^3.

Sp est B^2 sive A^2 & R, est B sive A.

Prior autem duarum minorum determinationum, cùm scilicet duo latera suprà sunt æqualia, instituitur modo præmisso, tam in prima propositione primi capitis æquationum cubicarum, quàm in prima secundi capitis: positis enim lateribus B & C æqualibus, & argumentando ut suprà in prædictis propositionibus, præcipuè vero ut in prima secundi capitis, nisi quod hic D invenietur esse $2A - R$, reperiemus tandem valorem ipsius A esse

$$\frac{\dfrac{3Z^s - \frac{1}{3}Sp}{R}}{\dfrac{2Sp + \frac{2}{3}R}{R}}$$

Tandem altera duarum minorum determinationum, cùm scilicet alterum laterum suprà æquale est ei quod est

infra, facilis est: posito enim quod B sit æquale ipsi D in formula præmissa, ac sublatis iis quæ se invicem tollunt, remanebit hæc æquatio, $B^2C - B^2A - CA^2 + A^3 \propto O$.

Itaque in æquatione proposita $Z^f \propto B^2C$, $S^p \propto B^2$ & $R \propto C$:

At C est unum ex duobus lateribus suprà, itaque ipsum R est unum ex lateribus suprà.

Item eadem ratione B^2 sive S^p est quadratum alterius lateris suprà, idemque quadratum ejus quod est infrà: ergo A explicabile est, tam de R suprà, quàm de S suprà & infrà.

Propositio quarta.

Si $Z^f - RA^2 + A^3 \propto O$.

Sunt tria latera quorum duo sunt suprà, & tertium infrà, idemque minus quovis duorum priorum, excessus summæ duorum priorum supra tertium, est R. At summa duorum rectangulorum ejus scilicet quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, æqualis est ei quod sub primo & secundo. Z^f. autem est id quod sub tribus continetur & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus.

Resumatur enim formula hujus capitis.

$$\begin{array}{l} \quad\quad\;\; -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \propto O \\ \quad\quad\;\; + BCA - CA^2 \end{array}$$

Intelligaturque D minus esse quàm B & C simul, & singula: at rectangulum BC æquale sit ambobus simul BD & CD, itaque tollunt se invicem ipsa rectangula, & sic evanescit affectio sub latere A, quia B & C simul superant D; differentia esto R, & solidum BCD vocetur Z so-

lidum, quo pacto incidemus in æquationem propositam, nempe

$$Z^f - RA^2 + A^3 \infty O.$$

Ubi palam est A explicari posse, tam de B & C suprà, quàm de D infrà.

Determinatio.

HUIUS propositionis unica est determinatio, eaque minor, cùm scilicet duo latera suprà sunt æqualia: neque enim aliter æqualia esse possunt, quia unumquodque eorum quæ sunt suprà, majus est eo quod est infrà.

Ponantur ergo æqualia B & C, unde in formula præmissa, sublatis quæ se invicem tollunt, talis erit æquatio.

$$\begin{matrix} B^2 D + DA^2 \\ -2BA^2 + A^3 \infty O. \end{matrix}$$

Jam quia B est A & 2B—D est R, ideò 2A—R est D. Item quia BD & CD simul æqualia sunt BC, ideò si loco tam B quàm C sumatur A, & loco ipsius D sumatur 2A—R fiet hæc æquatio.

$$4A^2 - 2RA \infty A^2 \text{ hoc est } 3A^2 - 2RA \infty O,$$

Et communi divisore 3 A fiet $A - \frac{2}{3}R \infty O$.
Quapropter $\frac{2}{3}R$ est valor ipsius A.

Propositio quinta.

SI $Z^f + S^p A - RA^2 + A^3 \infty O$.
Sunt tria latera, quorum duo sunt suprà, & tertium infrà, idemque minus quovis duorum priorum, ita ut excessus summæ duorum priorum, suprà tertium sit R; at summa duorum rectangulorum, ejus scilicet quod sub primo

primo & tertio, & ejus quod ſub ſecundo & tertio, minor eſt eo rectangulo, quod fit ex primo & ſecundo; differentia autem eſt S P; Z ſ. autem eſt id quod ſub tribus lateribus continetur, & A explicabile eſt de quolibet ex ipſis tribus lateribus.

In formula præcedentium quam hic reſumimus.

$$\begin{matrix} & -BDA-BA^2 & \\ BCD & -CDA-CA^2+A^3 \propto O \\ & +BCA+DA^2 & \end{matrix}$$

Intelligantur latera B & C tam ſimul quàm ſigillatim, majora eſſe quàm D, & rectangulum BC majus quàm duo ſimul BD & CD. Quo poſito & adhibita hac interpretatione ut exceſſus ſummæ laterum B & C ſuprà D ſit R; item exceſſus rectanguli BC ſuprà ſummam reliquorum BD & CD ſit S P, at ſolidum BCD ſit 2 ſ. manifeſtum eſt nos incidere in æquationem propoſitam, & A explicabile eſſe tam de B & C ſuprà, quàm de D infrà.

Determinatio.

Hujus æquationis determinatio unica eſt eaque minor, tum ſcilicet duo latera ſuprà æqualia ſunt, neque alia reperiri poteſt laterum æqualitas, cum unumquodque ex duobus prioribus majus ſit quàm tertium.

Poſito ergo quod B ſit æquale ipſi C in formula præmiſſa, & augmentando ut in prima propoſitione primi capitis, aut prima ſecundi æquationum cubicarum, inveniemus D eſſe 2 A—R, & S P eſſe 2 RA—3 A², unde tandem deducetur valor ipſius A,

$$\frac{\frac{3\,Z\text{ſ} + \frac{1}{3}\,SP}{R}}{\frac{2}{3}R - \frac{2\,SP}{R}}$$

Propositio sexta irregularis.

SI $Z^{s} + S_{P}A + A^{3} \infty O$.

In hac æquatione A est explicabile de unico latere infrà, nec ulla datur vel trium, vel etiam duorum laterum multiplicatio, ex qua ipsa oriri possit. Potest tamen constitutio illius deduci, ex quatuor proportionalibus, hac ratione ut differentia extremarum sit $\frac{Z^{s}}{\frac{1}{3}S_{P}}$; rectangulum autem sub extremis vel mediis sit $\frac{1}{3} S_{P}$, & A sit differentia mediarum.

Sed neque hæc, neque aliæ similes quæ de solis lateribus infrà explicari possunt æquationes ad usum communem revocari possunt, nisi per transmutationem aliarum æquationum, quod etiam raro aut nunquam accidit.

Propositio septima irregularis.

SI $Z^{s} + RA^{2} + A^{3} \infty O$.

Rursus in hac æquatione A explicabile est de unico latere infrà, nec ulla datur vel trium vel etiam duorum laterum multiplicatio, ex qua illa oriri possit. Facile tamen hæc æquatio transmutabitur in aliam similem ei, quæ habetur propositione 6ª seu præcedenti, unde constitutio ejus ex quatuor proportionalibus deducetur ut suprà; sed neque alia esse potest, quàm præcedentis, utilitas.

Propositio octava irregularis

SI $Z^{s} + A^{3} \infty O$.

Unicum etiam est latus infrà, idemque æquale lateri cubico ipsius Z^{s}.

CAPUT TERTIUM.

HOC caput tot propositiones habet, quot præcedens, atque has illarum sigillatim inversas, hac ratione, ut quæ illic suprà erant latera, hic sint infrà, & è contrario. Determinationes autem in utroque capite sunt penitus eædem: itaque exposita formula universali, quinque priorum propositionum regularium, enumeratisque breviter singulis octo propositionibus, reliqua ad idem caput præcedens remittemus.

Pro formula igitur universali, intelligantur duo latera infrà, & unum suprà hac ratione

$$B + A \propto O$$
$$C + A \propto O$$
$$D - A \propto O$$

fiatque multiplicatio qualem consuevimus habita ratione signorum, atque ita reperiemus.

$$\begin{matrix} & + BDA - BA^2 & \\ BCD & + CDA - CA^2 & - A^3 \propto O. \\ & - BCA + DA^2 & \end{matrix}$$

Qua ratione duo latera infrà intelliguntur æqualia ipsis B & C; illud autem quod est suprà, intelligitur æquale ipsi D.

Jam differentia inter summam laterum B & C & unicum D, esto R; differentia autem inter summam rectangulorum BD & CD atque unicum BC, esto S p: item solidum BCD esto Z s. Hoc pacto prout excessus erit pænes hæc vel illud, vel etiam aliquando nullus, orientur quinque propositiones regulares.

Propositio prima.

SI $Zs + SpA + RA^2 - A^3 \infty O$.

Sunt tria latera, duo quidem infrà, & unum suprà, idemque majus summa duorum priorum, & differentia est R; rectangulum autem sub summa priorum & tertio excedit rectangulum sub duobus prioribus, & excessus est Sp. At Zs. est id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis.

Determinatio.

PRo detrminatione, positis duobus lateribus quæ sunt infrà, inter se æqualibus, recurremus ad primam propositionem secundi capitis, mutatis tamen iis quæ hic sunt infrà, in ea quæ ibi erant suprà, reperiemus valorem ipsius A infrà, æquale esse.

$$\frac{\frac{3 Zs + \frac{1}{3} Sp}{R}}{\frac{2 Sp + \frac{2}{3} R}{R}}$$

Propositio secunda.

SI $Zs. + SpA - A^3 \infty O$.

Vide secundam propositionem 2[i] capitis, mutatis tamen suprà & infrà, ut jam diximus, neque etiam determinatione differunt.

Propositio tertia.

SI $Z^{ſ} + S\,p\,A - RA^{2} - A^{3} \infty O$.

Vide tertiam secundi capitis, mutatione facta ut diximus, determinatio eadem erit.

Propositio quarta.

SI $Z^{ſ} . - RA^{2} - A^{3} \infty O$.

Vide iisdem mutatis, quartam secundi capitis ejusque determinationem.

Propositio quinta.

SI $Z^{ſ} - S\,p\,A - RA^{2} - A^{3} \infty O$.

Vide iisdem mutatis, quintam propositionem 2ⁱ capitis ejusque determinationem.

Propositio sexta irregularis.

SI $Z^{ſ} - S\,p\,A - A^{3} \infty O$.

Unicum est latus suprà, pro quo vide sextam propositionem secundi capitis. Notabis tamen hanc utilem esse posse.

Propositio septima irregularis.

SI $Z^{ſ} + RA^{2} - A^{3} \infty O$.

Unicum est latus suprà pro quo vide sextam propositionem 2ⁱ capitis. Notabis tamen hanc utilem esse posse.

Propositio octava irregularis.

SI $Z^{ſ} . - A^{3} \infty O$.

Unicum est latus suprà, æquale lateri cubico $Z^{ſ}$.

CAPUT QUARTUM.

HOc etiam caput universum est primi cubicorum; differunt enim in eo tantum quòd quæ illic erant latera suprà, hic sunt infrà, idque in prima propositione, quæ prorsus regularis est: at in secunda, quæ aliquo pacto est irregularis, ambo latera remanent infrà, etiamsi illic alterum esset suprà, alterum infrà, nec etiam in ambabus formula est eadem, quapropter utramque hic apponemus, etiamsi utraque sit inutilis, nisi ex transmutatione aliunde oriatur, quod etiam rarò, aut nunquam accidere potest.

Propositio prima.

SI $Z\,s. + Sp\,A + RA^2 + A^3 \infty O$.
Et $\frac{Z\,s}{R}$ non sit æquale ipsi Sp.

Sunt tria latera positiva infrà, quorum summa est R; tria rectangula sub ipsis, binis ac binis sumptis simul, constituunt Sp: at Z s. est quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis.

Statuantur enim tria latera positiva infrà, in binomiis ut consuevimus hoc pacto

$$B + A \infty O$$
$$C + A \infty O$$
$$D + A \infty O$$

& fiat multicatio ut in superioribus, orieturque

$$\begin{matrix} & + BDA + BA^2 & \\ BCD & + CDA + CA^2 & + A^3 \infty O \\ & + BCA + DA^2 & \end{matrix}$$

quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut B + C + D sit R; & BD + CD + BC sit S p, item BCD sit Z sol. incidemus in æquationem propositam, ubi manifestum est A explicabile esse tam de B, quàm de C, & de D, infrà.

Determinatio eadem prorsus est, quæ in prima propositione primi capitis cubicarum, atque id tam in majori quàm in minori determinationum ibi expositarum.

Propositio secunda.

Si Z s. + S p A + R A2 + A3 ∞ O.
Sit autem Z s ∞ S p.
R

Sunt duo latera ambo infrà, alterum quidem æquale longitudine ipsi R, alterum autem non proprie latus, sed planum æquale S p, & Z s est id quod continetur sub primo latere in planum, quod secundi locum obtinet sive S p R, & A explicabile est de quolibet.

Statuatur enim R + A ∞ O
& S p + A2 ∞ O

ut sint latus & planum, ambo positiva infrà, fiatque multiplicatio; atque ita orietur hæc æquatio.

R S p + S p A + R A2 + A3 ∞ O.

Jam R S p esto Z s, qua ascita interpretatione incidemus in æquationem propositam, quæ proinde explicabilis est tam de A æquali, ipsi R, quàm de A æquali potentiæ ipsi S p o, ut est propositum.

Notæ circa æquationes præmissas, & circa eas quæ ad altiores gradus aut potentias pertinere possunt.

Prima.

OMNIS affectio sub latere positivo suprà, sequitur naturam sui signi, censetur enim affirmativa vel negativa suprà, prout illa afficitur signo affirmationis vel negationis. Idem intellige de affectionibus sub omnibus gradibus, atque etiam de omnibus potentiis ejusdem lateris positivi suprà.

Secunda.

UT autem innotescat etiam quid censendum sit de affectionibus sub latere positivo infrà, ejusque gradibus & potentiis, præmittendum est primum id quod jam notavimus, nempe affirmativum infrà æquivalere negativo suprà, & è contrario.

Deinde circa latera suprà, ideo + multiplicatum per + producere +, quia multiplicator affirmativus affirmat affirmationem multiplicati. Ideo autem — per — producere +, quia multiplicator negationis negat negationem multiplicati, atque ita constituit affirmationem. At + per — vel — per +, ideo producere —, quia multiplicator affirmativus affirmat negationem multiplicati, vel multiplicator negativus negat affirmationem multiplicati, atque ita constituit negationem.

Hinc igitur, quia latus affirmativum infrà, æquivalet negativo suprà, omnis affectio sub latere positivo infrà, sequitur contrariam sui signi naturam, ita ut si sit affirmativum infrà, æquivaleat negativo suprà & è contrario.

Contra

Contra verò quadratum lateris positivi infrà, æquivalet quadrato lateris positivi suprà, quia fit ex + A in + A, vel ex — A in — A, unde quovis modo fit + A^2 suprà, vel æquivalens. Itaque omnis affectio sub quadrato lateris positivi infrà, sequitur naturam sui signi affirmativi vel negativi: in altioribus verò gradibus, simili argumento concludemus idem accidere affectioni sub cubo, quod sub suo latere: & quadratoquadrato, quod suo quadrato, atque ita continuè per gradus altiores, ut illi qui statuuntur in locis imparibus, imitentur latus ipsum; qui autem statuuntur in locis paribus, imitentur quadratum.

Insuper omnis affectio, quæ retinet naturam sui signi, ducta in affectionem, quæ itidem naturam sui signi retineat, producit aliam, quæ etiam naturam, sui signi retinet. Sed & affectio quæ sequitur contrariam sui signi naturam, ducta in affectionem quæ contrariam sui signi naturam sequatur, producit aliam, quæ sequitur eandem sui signi naturam.

Contrarium autem accidit dum ducuntur inter se duæ affectiones, quarum una sui signi naturam sequatur, altera contrariam, quæ enim inde fit affectio, sequitur contrariam sui signi naturam.

Tertia.

Ex duabus notis præmissis non difficile erit explicare, cùm ex multiplicatione binomiorum in omnibus capitibus jam expositis, circa quadratas & cubicas affectiones, producatur tandem æquatio quæ nihilo æquivaleat, id autem uno aut altero exemplo illustrabimus.

Proponatur primum, ut in propositione secunda quadraticarum, hæc æquatio

$$\begin{array}{l} \quad + BA \\ BC - CA - A^2 \propto O. \end{array}$$

Quæ quidem æquatio orta eſt ex ductu affectionum B—A & C+A in ſe invicem, intelligatur ergo primo caſu, B ſuprà æquari ipſi A ſuprà unde B—A æquatur nihilo; quia tam B quàm A, cùm ſint ſuprà, ſequuntur naturam ſui ſigni, quæ ſigna cùm ſint contraria, manifeſtum eſt B & A tollere ſe invicem.

Jam C+A cujuſcumque valoris ſit ducatur in B—A, fit rurſus manifeſtò

$$\begin{array}{l} \quad + BA \\ BC - CA - A^2 \propto O. \end{array}$$

Ubi omnes affectiones ſequuntur naturam ſui ſigni, quia quæ ipſas produxerunt, ſui ſigni naturam ſequebantur, & quia B æquatur A, ideo BC æquatur CA, quare propter ſigna contraria tollunt ſe invicem +BC —CA.

Item BA æquatur A^2, quare propter ſigna contraria tollunt ſe invicem + BA—A^2, atque ita omnes affectiones ſimul nihilo æquivalent, dum ſcilicet B æquatur ipſi A ſuprà.

Sed ſecundo caſu, eſto C ſuprà æquale ipſi A infrà: unde C+A æquatur nihilo, quia ipſum + A infrà ſequitur contrariam ſui ſigni naturam, æquivaletque ipſi — A ſuprà, ſicque tollunt ſe invicem +C+A.

Jam B—A cujuſcumque valoris ſit, ducatur in C+A, fit manifeſtò

$$\begin{array}{l} \quad + BA \\ BC - CA - A^2. \end{array}$$

Ubi duæ affectiones ſub latere A, ſcilicet + B A, ſequun-
—CA

tur contrariam ſui ſigni naturam; at $-A^2$ & $+BC$ ſui ipſius ſigni naturam ſequuntur; & quia C æquatur A, ideo BC æquatur BA, & CA æquatur A^2, quare tollunt ſe invicem $+BC+BA$, quia BC eandem, BA vero contrariam ſui ſigni ſequitur naturam. Eadem ratione tollunt ſe invicem $-CA-A^2$ quia CA contrariam, A^2 vero eandem ſui ſigni naturam ſequitur: atque ita rurſus omnes affectiones ſimul nihilo æquivalent, cùm ipſum C ſuprà æquetur ipſi A infrà.

Cùm vero ſic interpretamur æquationem ut BC ſit Zp, at $+B$ ſit R, ut ſic $Zp+RA-A^2 \propto O$. Patet
$-C$
ipſum R, eſſe differentiam inter B majus & C minus, quia illæ affectiones $+BA$ & $-CA$ habent ſigna diverſa, & præterea vel ambæ eandem, vel ambæ contrariam ſui ſigni naturam ſequuntur, impediunt ergo ſigna diverſa ne ſimul jungi debeant.

Item in hac æquatione $Zp+RA-A^2 \propto O$.

Dum A intelligitur eſſe ſuprà, omnes affectiones ſunt ſuprà, ſequunturque naturam ſui ſigni, & ſic ſola affectio A^2 æquatur reliquis duabus ſimul.

E contrario vero cum A intelligitur eſſe infrà, tum Zp & A^2 ſequuntur naturam ſui ſigni, RA vero contrariam, ſicque $+RA$ infrà æquivalet $-RA$ ſuprà. Unde $+RA-A^2$ ſimul æquivalent ipſi Zp.

Jam in ſecundo exemplo proponatur æquatio propoſitionis primæ ſecundi capitis cubicarum

$$Zf - SpA + RA^2 + A^3 \propto O.$$

Cujus conſtitutionem deduximus ex multiplicatione ſive ductu harum trium affectionum, $B-A$
$C-A$
$D+A$

Ex quo oritur hæc æquatio, posito tamen quod D majus sit quàm B & C simul.

$$\begin{matrix} & -BDA + DA^2 & \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \infty O \\ & + BCA - CA^2 & \end{matrix}$$

Quam quidem æquationem legitimam esse, sive B. suprà æquetur A suprà, sive C suprà æquetur A suprà, sive tandem D suprà æquetur A infrà, sic ostendimus.

Ponamus primo casu B suprà æquari A suprà, unde $B - A \infty O$.

Jam sub ipso valore A, quicquid valeat tam $C - A$, quàm $D + A$, multiplicentur invicem hæ duæ affectiones, orieturque

$$\begin{matrix} & + CA & \\ CD - DA - A^2; \end{matrix}$$

Ubi omnes affectiones particulares sequuntur naturam sui signi, quia tam A, quàm B, C, D ex quibus ortæ sunt, sunt suprà. Hoc autem totum productum quicquid valeat ducatur in $B - A$, atque ita tandem orietur

$$\begin{matrix} & -BDA + DA^2 & \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3: \\ & + BCA - CA^2 & \end{matrix}$$

Cujus omnes affectiones sequuntur sui signi naturam, propter rationem jam allatam. Quoniam ergo B ponitur æquale ipsi A, ideo BCD æquatur CDA, atque ita tollunt se invicem $+ BCD - CDA$; eadem ratione tollunt se invicem $- BDA + DA^2$: item $+ BCA - CA^2$ ac tandem $- BA^2 + A^3$, unde patet omnes affectiones simul, nihilo æquivalere, dum B æquatur ipsi A.

Secundo casu C suprà æquetur ipsi A suprà; unde C —A ∞ O.

Jam sub ipso valore A quicquid valeat tam B—A, quàm D+A, multiplicentur invicem hæ duæ affectiones, orieturque manifestò

$$\begin{matrix} & +BA & \\ BD & -DA & -A^2 \end{matrix}$$

Ubi omnes affectiones particulares sequuntur naturam sui signi, quia A, B, C, D ponuntur esse suprà. Hoc autem totum productum, quicquid valeat, ducatur in C —A, orietur rursus ut in primo casu

$$\begin{matrix} & -BDA & +DA^2 & & \\ BCD & -CDA & -BA^2 & +A^3 & \infty\ O \\ & +BCA & -CA^2 & & \end{matrix}$$

Ubi etiam omnes affectiones sequuntur naturam sui signi propter eandem rationem. Quoniam ergo C ponitur æquari ipsi A, ideo BCD æquatur ipsi BDA, atque ita tollunt se invicem +BCD— BDA : eadem ratione tollunt se — CDA + DA²; item + BCA — BA²: ac tandem—CA² + A³. Unde patet quod existente C æquali ipsi A, omnes affectiones simul nihilo æquivalent.

Tertio & ultimo casu, intelligatur D suprà æquari A infrà. Quo pacto D + A ∞ O.

Jam sub ipso valore A, quicquid valeat tam B—A, quàm C—A, ducantur invicem hæ duæ affectiones, orieturque

$$\begin{matrix} & -BA & \\ BC & -CA & +A^2; \end{matrix}$$

Ubi, quia tam B, quàm C sunt suprà, A autem infrà, duæ affectiones BC & A² sequuntur naturam sui signi,

duæ verò reliquæ $\frac{BA}{CA}$ contrariam. Hoc autem totum productum quicquid valeat, ducatur in D + A, orieturque idem omnino quod primo & secundo casu, nempe

$$\begin{array}{c} -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \\ + BCA - CA^2 \end{array}$$

Hic verò omnes affectiones sub latere A, atque etiam cubi A^3 sequuntur contrariam sui signi naturam per regulas præmissas, quia oriuntur ex multiplicatione affectionum, BD, CD, BC, & A^2, quæ omnes sequuntur naturam sui signi in A quod sequitur contrariam.

Quoniam ergo D suprà ponitur æquale A infrà, ideo BCD æquatur BCA, unde tollunt se invicem + BCD + BCA: nam etiam si signa sint eadem, tamen natura est contraria. Eadem ratione tollunt se invicem — BDA — BA^2, item — CDA — CA^2, & denique + DA^2 + A^3.

Unde patet quod existente D supra æquali ipsi A infrà, omnes affectiones simul nihilo æquivalent. Sive ergo B vel C suprà æquetur ipsi A suprà, sive D suprà æquetur A infrà, semper stabit æquatio, & omnes affectiones simul nihilo æquivalebunt.

Itaque in æquatione proposita Z s. — Sp A + RA^2 + A^3 ∞ O.

Sp intelligitur esse differentia inter summam duorum planorum BD, CD, & planum BC: at longitudo R est differentia inter summam laterum B, C, & latus D, quæ sunt æqualia tribus illis de quibus potest explicari A, in æquatione. Rursus cùm in eadem æquatione A intelligatur esse suprà, tunc omnes affectiones sequuntur naturam sui signi, unde sola affectio Sp A æquatur tribus re-

liquis simul sumptis. Contrà verò cùm A intelligitur esse infrà, tunc affectiones sub latere A & ipsius cubo A^3 sequuntur naturam contrariam sui signi, duæ autem reliquæ eandem, unde — SPA infrà æquivalet + SP A suprà, & + A^3 infrà æquivalet — A^3 suprà, sicque sola affectio A^3 æquatur tribus reliquis simul sumptis.

His duobus exemplis rite perceptis, non erit difficile idem in omnibus æquationibus extendere, quæ ex duobus, tribus vel etiam pluribus lateribus efformabuntur.

Quarta.

CUM autem planum aliquod ex se ponitur sequi naturam contrariam sui signi, tunc occurre posset difficultas circa affectiones lateris quod potentiâ æquale intelligitur eidem plano, & circa affectiones aliorum graduum ejusdem lateris, quæ difficultas etiamsi non difficilè solvi possit, speciatim in omnibus affectionibus oblatis, quia tamen prolixa esset solutio, præcipuè quia extendi deberet non ad planum tantùm, sed etiam ad gradus altiores, ideò nos solutionem afferemus in universum, quæ ad quascumque æquationes, etiam eas de quibus jam egimus, extendi potest, eamque aliquo exemplo illustrabimus.

Intelligatur ergo BP suprà + A^2 infrà ∞ O. Ubi manifesto A^2 quod planum est, sequitur naturam sui signi contrariam. Sit autem quævis æquatio, quæ orta sit ex multiplicatione hujus affectionis BP + A^2 in aliam quamcumque affectionem, in qua æquatione A sit explicabile de latere A, quod potentiâ æquale sit ipsi BP. Ut ostendamus omnes affectiones æquationis simul nihilo æquavalere sic ratiocinabimur. Quia affectio BP + A^2 in aliam quamcumque affectionem ducitur, certum est in ipsam duci primum separatim BP quod sequitur con-

trariam : quicquid ergo producat B p, id omne simul, æquale est ei, quod producitur ab A^2 propter æqualitatem B p & A^2; sed & singula producta singulis productis sunt æqualia propter eandem rationem, & in singulis æqualibus signa erunt eadem, quia B p & A^2 habent idem signum. At propter contrariam naturam B p & A^2 singula producta æqualia contrariæ erunt naturæ, atque idcircò tollent se invicem, ita ut nihil omnino remaneat, & tota æquatio nihilo sit æqualis, ut proponitur.

Ut autem in omnibus æquationibus idem locum habere manifestum sit, intelligatur B p — A^2 ∞ O, sintque tam B p quàm A^2 suprà, & utrumque sequatur naturam sui signi. Tunc facta multiplicatione, ut dictum est, singula producta singulis sunt æqualia & ejusdem naturæ; sed signa erunt contraria, quia B p & A^2 habent contraria, atque ita rursus tollent se invicem omnes affectiones, ita ut nihil omnino remaneat, & tota æquatio nihilo sit æqualis, ut proponitur.

In exemplo proponatur, ut in secunda propositione primi capitis cubicarum, B p + A^2 ∞ O. Ita ut B p sit suprà, at A^2 infrà, & ambo æqualia, ducatur autem hæc affectio in hanc aliam, cujuscumque sit valoris C — A orietur manifestò B p C — B p A + CA^2 — A^3, sed ita ut + B p C — B p A fiat speciatim ex ductu B p in C — A; at + CA^2 — A^3 fiat ex A^2 in C — A. Quia ergo + B p ducitur in + C & producit B p C, & + A^2 ducitur in idem C & producit CA^2, sunt autem æqualia B p & A^2, atque idem possident signum, erunt æqualia producta B p C, idemque signum possidebunt: at quia diversæ sunt naturæ B & A^2, illud scilicet B p sequitur eandem sui signi naturam, hoc verò A^2 contrariam; idem ergo eorum productis accidet, ut alterum eandem sui signi naturam, alterum verò contrariam sequatur : tollent igitur se invicem + B p C & + CA^2.

CA². Eadem ratione quia B p & A² æqualia ſub eodem ſigno, ſed diverſæ naturæ ducuntur ſigillatim in A & producunt — B p A — A³, erunt hæc producta æqualia & ſub eodem ſigno, ſed diverſæ naturæ; ipſa ergo tollent ſe invicem, unde tota æquatio nihilo æquivalet. Nec erit difficile ſimili argumento uti in quibuſcumque æquationibus, ſemper enim ſingulæ affectiones ſingulis erunt æquales, quia fient ex æqualibus in eandem: at vel ſigna erunt eadem & natura contraria, vel natura erit eadem & ſigna contraria; ſicque tollent ſe invicem ſingulæ affectiones, & tota æquatio nihilo æquivalebit.

Quinta.

OPERÆ etiam pretium eſt ſcire quot modis complicari poſſint affectiones ſpeciales, ut ex iis affectiones univerſales oriantur ad condendas æquationes omnium potentiarum quadraticarum, cubicarum, quadratoquadraticarum, quadratocubicarum &c.

Ad hoc autem habenda primum eſt ratio numeri graduum ex quibus ipſa potentia componitur: nam quot modis potentia ipſa ex ſuis gradibus gigni poterit, tot modis complicari poterunt affectiones ſpeciales ad condendam æqualitatem. Sic latus per ſe, latus tantùm eſt. Planum fit vel per ſe, vel ex duobus lateribus. Solidum fit vel per ſe, vel ex plano & latere, vel ex tribus lateribus. Planoplanum fit vel per ſe, vel ex ſolido & latere, vel ex duobus planis, vel ex plano & duobus lateribus, vel ex quatuor lateribus. Planoſolidum fit vel per ſe, vel ex planoplano & latere, vel ex ſolido & plano, vel ex ſolido & duobus lateribus, vel ex duobus planis & latere, vel ex plano & tribus lateribus, vel ex quinque lateribus. Solidoſolidum fit vel per ſe, vel ex planoſolido & latere, vel ex planoplano & plano, vel ex plano-

plano & duobus lateribus, vel ex duobus ſolidis, vel ex ſolido & plano & latere, vel ex ſolido & tribus lateribus, vel ex tribus planis, vel ex duobus planis & duobus lateribus, vel ex plano & quatuor lateribus, vel ex ſex lateribus. Atque eodem modo & ordine in infinitum.

Secundo habenda eſt ratio affectionum ſpecialium ex quibus totalis gignitur: nam ex illis quædam aliquando per ſe æquationem aliquam conſtituunt, quæ de unico, vel etiam de pluribus lateribus explicabilis eſt, omnino autem quævis æquatio ſuperioris ordinis formari poteſt ex duabus, vel pluribus æquationibus inferiorum ordinum in ſe ductis, atque id tot modis, quot jam diximus potentias ex ſuis gradibus gigni poſſe. Exempli gratia, æquatio cubocubica poteſt formari ex quadratocubica ducta in lateralem, vel ex quadratoquadratica in quadraticam, vel ex quadratoquadratica & duobus lateribus, vel ex duabus cubicis, vel ex cubica in quadraticam & lateralem, vel ex tribus quadraticis & cæt.

Hinc patet eò pluribus modis complicari poſſe affectiones ſpeciales ad condendam æquationem aliquam, quò altior eſt illa æquatio, ſeu quò altior eſt illius potentia: atque ipſam altiorem gigni poſſe ex omnibus inferioribus debitè complicatis nullâ exceptâ, & præterea eandem per ſe ipſam conſtitui aliquando nullo inferiorum habito reſpectu.

Sexta.

ILLUD autem notatu digniſſimum eſt, quamcumque æquationem de tot lateribus explicabilem eſſe, quot ſunt illa de quibus explicari poſſunt omnes affectiones, ſeu æquationes ſpeciales à quibus illa producta eſt. Immo & latera illius lateribus illarum ſingula ſingulis eſſe æqualia ſive potiùs eadem; atque adeò ejuſdem affectionis & naturæ.

Exempli gratia æquatio lateris ut B — A ∞ O de unico tantùm latere suprà explicabilis est, sicut & C — A ∞ O. At ambæ invicem ductæ producunt quadraticam æquationem

$$\begin{array}{l} \quad - BA \\ BC - CA + A^2 \infty O: \end{array}$$

Quæ de iisdem duobus lateribus suprà est explicabilis.

Rursus si hæc æquatio quadratica ducatur in hanc lateralem D + A ∞ O; quæ de unico latere infrà explicari potest, producetur hæc æquatio cubica.

$$\begin{array}{l} \quad - BDA - DA^2 \\ BCD - CDA - CA^2 + A^3 \infty O \\ \quad + BCA + DA^2 \end{array}$$

Quæ de tribus iisdem lateribus explicabitur, duobus quidem suprà, altero verò infrà.

Eodem modo si ipsa æquatio cubica ducatur in aliam lateralem de unico latere explicabilem, producetur æquatio quadratoquadratica, quæ de quatuor lateribus explicari poterit.

Item hæc æquatio cubica $Z\,s. - Sp\,A - A^3 \infty O$.
De unico tantùm latere suprà est explicabilis

Hæc quadratica $Bp - RA - A^2 \infty O$

De duobus, altero suprà, & altero infrà: his ergo duabus æquationibus in se invicem ductis fiet hæc quadratocubica

$$\begin{array}{l} \quad - BpSpA + RSpA^2 - BpA^3 \\ BpZs - RZsA - Zs\,A^2 + SpA^3 + RA^4 + A^5 \infty O \end{array}$$

Quæ de tribus iisdem lateribus, duobus quidem suprà, & tertio infrà, est explicabilis, atque ita de reliquis.

Cùm verò quædam æquatio per se ipsam constituitur,

nec constare potest ex ductu duarum aut plurium inferiorum, tunc illam de unico tantùm latere contingit explicari posse, quales sunt omnes illæ irregulares de quibus diximus suprà cap. 2° & 3° cubicarum.

Prætereà si accidat omnia latera alicujus æquationis esse fictitia, & impossibilia, ejusmodi æquatio in quamcumque aliam ducta tertiam producet, quæ de lateribus secundæ æquationis tantùm explicabilis erit; quòd si etiam secundæ illius latera omnia fictitia sint, quæ ex ambabus primâ scilicet & secundâ oritur æquatio, habebit latera omnia fictitia, & impossibilia. At si duarum priorum æquationum latera quædam fictitia sint & quædam positiva, tunc æquatio quæ ab ipsis duabus producitur, tot latera habebit positiva, quot in duabus à quibus producta est, reperiuntur. Cætera erunt etiam fictitia.

In exemplo esto hæc æquatio quadratica

$$Zp - RA + A^2 \infty O:$$

& intelligatur Zp majus esse quàm $\frac{1}{4}R^2$ unde duo latera de quibus aliàs explicabilis esset ipsa æquatio, sunt fictitia: esto quoque hæc æquatio lateralis $B - A \infty O$ de unico latere suprà explicabilis, ducanturque in se invicem æquationes ipsæ, unde producetur hæc æquatio cubica.

$$\begin{array}{l} \quad\;\; - BRA + BA^2 \\ ZpB - ZpA + RA^2 - A^3 \infty O. \end{array}$$

Quæ quidem æquatio de unico tantùm latere suprà est explicabilis, reliqua duo sunt fictitia.

Corollarium.

EX hac nota intelligi poteſt methodus, quâ dignoſci poterit num æquatio propoſita habeat quædam latera fictitia, an verò omnia ſint poſitiva, an etiam omnia fictitia; illud autem aliquando & longiſſimæ & difficillimæ indagationis eſt, præcipuè in æquationibus ultrà cubum elatis & multipliciter affectis. In univerſum autem conſiderandum erit quot modis æquatio propoſita ex aliis inferioribus produci poterit, habitâ ratione formulæ, & quot modis accidere poterit ut illæ inferiores habeant latera, vel fictitia, vel poſitiva, quidve tam hæc, quàm illa efficiant, dum inter ſe multiplicantur: nam hoc intellecto, dum proponetur illa æquatio, examinandum erit num id illi conveniat, quod à parte laterum fictitiorum produci debuit, num vero id quod à parte laterum poſitivorum exempli gratia, propoſitâ hac æquatione cubicâ

$$C\,s. - D\,p\,A + F\,A^2 - A^3 \propto O.$$

Cujus formula ſimilis eſt ei quam ſub finem notæ ſextæ adduximus, patet eam produci potuiſſe à duabus, alterâ planâ, ſub hac formula

$$Z\,p - R\,A + A^2 \propto O$$

Altera autem laterali ſub hac formulâ $B - A \propto O$. Unde æquationis productæ formula eſt hæc, quæ etiam ibi adducta eſt

$$\begin{array}{l} \quad\; - B\,R\,A + B\,A^2 \\ Z\,p\,B - Z\,p\,A + R\,A^2 - A^3. \end{array}$$

Conferantur ergo inter ſe ſingula homogenea ambarum ipſarum æquationum, ſcilicet $C\,s.$ cum $Z\,p\,B.$, item

D p cum ambobus ſimul BR & Z p, & longitudo F, cum ambabus B & R: his enim collatis ſi reperiatur Z p majus eſſe quàm $\frac{1}{4}$ R², concludemus latera æquationis planæ fuiſſe fictitia atque adeo & eadem, in æquatione cubica, fictitia eſſe. Quod ſi Z p non ſit majus quàm $\frac{1}{4}$ R², erunt in utraque æquatione latera poſitiva. Verùm tota difficultas conſiſtit in modo & ratione examinandi: hîc enim in exemplo, videndum eſſet, num longitudo F ſic dividi poſſit in duas partes, quæ referant B & R, & rectangulum ſub ipſis demptum ex D p relinquat $\frac{1}{4}$ quadrati alterutrius partium, putà ipſius R. Ac præterea C ſ. applicatum ad reliquam partem exhibeat idem $\frac{1}{4}$ R², hoc enim caſu æquatio propoſita explicabilis erit de tribus lateribus, duobus quidem æqualibus, tertio verò utcumque, & ambo æqualia ſimul æquivalebunt primæ portioni ipſius F, puta ipſi R, eritque hic caſus minoris majoriſve determinationis.

Aliter, quod tamen eòdem recidit, dividatur longitudo F, ſic ut rectangulum ſub partibus unà cum $\frac{1}{4}$ quadrati unius portionum æquale ſit D p, eſt autem hujuſce diviſionis problema planum de duobus lateribus explicabile, & determinationi obnoxium, ac tunc ſi diviſio fieri non poſſit, ſtatim pronunciare licet æquationis planæ latera fuiſſe fictitia. Si autem diviſio fieri poſſit, ſitque ipſa maxima eademque unica, cùm ſcilicet altera pars ipſi B correlata, erit $\frac{1}{3}$ F, altera autem ipſi R correlata, erit $\frac{2}{3}$ F, tunc niſi C ſ ſit præciſe $\frac{1}{27}$ F³ erit rurſus æquatio plana, fictitia: exiſtente autem C ſ. æquali ipſi $\frac{1}{27}$ F³, erit tunc caſus majoris determinationis, de qua dictum eſt propoſ. prima, cap. 1 cubicarum. At verò ſi facta diviſione longitudinis F ut dictum eſt, non incidamus in maximam, cùm ſcilicet portio ipſi B correlata non erit $\frac{1}{3}$ F, ſed major, vel minor (duplex enim hoc caſu contingere poteſt ſolutio) tunc

ſi ductâ alterutrâ ex iis duabus partibus quæ ipſi B correlatæ ſunt, in $\frac{1}{4}$ quadrati alterius ſibi congruentis, fiat ſolidum aquale ipſi C ſ, habebitur caſus minoris determinationis, in quo tria latera erunt poſitiva, duo quidem æqualia, ad æquationem quadraticam pertinentia, quorum ſumma erit illa portio longitudinis F, quæ ipſi R correlata eſt; & tertium ſingulis productis inæquale, quod ad æquationem lateralem pertinebit, eritque tertium illud portio ipſi B correlata. Quòd ſi ex duobus illis ſolidis quæ hac ratione fieri poſſunt, (videlicet ob duplicem ſolutionem, quæ contingere poteſt, diviſa longitudine F, ut proponitur) neutrum æquale reperiatur ipſi C ſ, ſit autem hoc C ſ, maximo prædictorum minus, minimo majus: tunc tria æquationis latera erunt poſitiva, ſed inæqualia. Si tandem C ſ, vel maximo prædictorum majus, vel minimo minus extiterit, hoc caſu erunt duo illa latera fictitia quæ ad æquationem planam pertinebunt, ac ſolum reliquum illud erit poſitivum, quod æquationis lateralis proprium erit.



DE GEOMETRICA PLANARUM ET CUBICARUM ÆQUATIONUM RESOLUTIONE.

ÆQUATIONEM Geometricè resolvere, est invenire Geometricè omnia latera de quibus ipsa æquatio explicabilis est.

Inventio autem ejusmodi laterum dicitur esse Geometrica, cùm illa deducitur ex locis propriis secundùm Geometriæ leges descriptis, atque inter se certo ac legitimo modo compositis; ita ut ex ipsorum locorum sectione vel tactione, lineæ quædam rectæ deducantur quæ latera quæsita exhibeant.

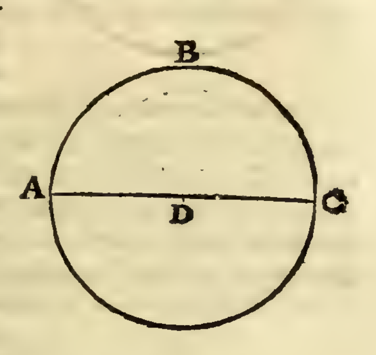
Quoniam verò ista laterum inventio pendet à locis Geometricis, non abs re fuerit aliqua de ipsis locis præmittere, tum circa eorum naturam atque constitutionem, tum etiam circa eorumdem divisionem, ac diversos gradus; ut quæ simpliciora sunt, à magis compositis distinguantur.

Locus ergo Geometricus in universum, est magnitudo quædam ex qua deduci possunt quotcunque aliæ magnitudines secundùm eandem atque uniformem quandam legem, quæ eandem aliquam atque uniformem sortiantur proprietatem.

De locis ejusmodi complures libros antiqui conscripsere, quorum numerum & titulos apud Pappum Alexandrinum legere licet; sed illi temporis injuria, summo rei literariæ detrimento, perierunt. Neque nos eorum instaurationem hîc intendimus, quia ad nostrum institutum,

tutum, paucis iisque non admodùm difficilibus, egemus. Non abs re tamen fore judicavimus selectiores aliquot ex illustrioribus locis in exemplum hîc afferre, quò eorum natura & constitutio magis elucescat. Nec ultra constructionem seu compositionem ipsorum progrediemur: demonstrationem autem, quia plerumque nimis longa est, ad eam partem Geometriæ quæ talem materiam tractare debet, remittemus.

In primo ergo exemplo. Esto quævis circuli circumferentia ABC, cujus centrum sit D; manifestum est ergo rectas omnes ab ipsa circumferentia ad centrum D ductas esse æquales. Itaque ex præmissa loci definitione, circumferentia illa locus est; quandoquidem ea magnitudo est ex qua deductæ quotcumque aliæ magnitudines, lineæ rectæ scilicet, secundùm eandem atque uniformem legem, puta quæ ad idem centrum D tendant, eandem aliquam atque uniformem sortiuntur proprietatem, ut scilicet omnes sint inter se æquales.

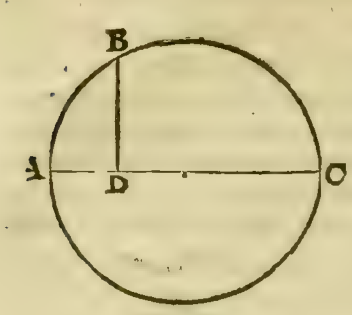


Geometræ autem, cùm magnitudinem aliquam ad quendam locum referre volunt, primùm magnitudinis istius genus ac speciem, deinde ejusdem conditiones exprimunt, ac tandem locum ipsum enuntiant, addito modo quo ipsa magnitudo ad prædictum locum refertur.

In exemplo ergo præmisso sic illi loquerentur. Si ab aliquo puncto educantur quotcunque rectæ, quæ uni eidemque rectæ sint æquales, erit alterum cujusvis eductæ extremum ad circuli circumferentiam.

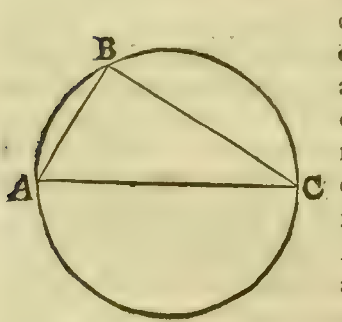
In altero exemplo. Esto quævis circumferentia cir-

culi ABC, cujus diameter sit AC, atque in ea diametro statuatur punctum quodvis D, à quo erecta ad diametrum perpendicularis recta DB, terminetur ad circumferentiam in B: erit ergo hæc BD media proportionalis inter diametri portiones AD, DC; unde ipsa circumferentia, rursùs alio respectu locus erit, quippe ad medias proportionales.



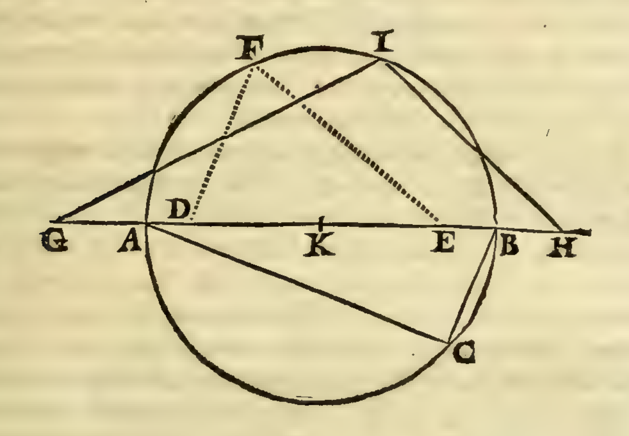
Phrasis Geometrica hujus loci talis esset. Rectâ lineâ utcunque terminatâ, si inter terminos illius sumatur quodvis punctum, à quo educatur ad rectos angulos ipsi rectæ quævis alia recta, quæ inter prioris rectæ portiones media proportionalis existat, erit alterum eductæ extremum ad circuli circumferentiam.

In tertio exemplo. Esto adhuc quævis circumferentia circuli ABC, atque in ea recta quædam AC quæ subtendat arcum ABC utcunque; atque in eo arcu, sumpto quovis puncto B, ducantur rectæ BA, BC ad ejusdem arcus sive chordæ ipsius extrema: manifestum est angulum ABC æqualem esse omni alii angulo qui in eadem portione ABC existet. Manifestum est quoque potuisse super rectam AC constitui portionem circuli ABC, quæ cujuscunque anguli ABC capax esset; unde circuli portio ABC hoc respectu locus erit; quippe ad angulos æquales.



Phrasis Geometrica hæc erit. Rectâ lineâ utcunque terminatâ, & exposito quovis angulo rectilineo : si à rectæ lineæ terminis ad aliquod punctum inclinentur duæ aliæ rectæ quæ angulum exposito æqualem contineant : erit hoc punctum, sive vertex anguli, ad alicujus portionis circuli circumferentiam.

In quarto exemplo. Esto ut suprà quivis circulus cujus diameter AB ; atque ex punctis A, B, ducantur ad quodvis punctum C in circumferentia existens, rectæ AC, BC. Patet ergo ambo simul quadrata AC, BC



æqualia esse quadrato diametri AB, ac proinde ipsam circumferentiam locum esse ad summam duorum quadratorum uni eidemque quadrato semper æqualem.

Atque etiam si assumpta puncta non sint ipsa A, B, sed alia duo quæcunque in rectâ AB etiam productâ, si libuerit, modò ipsa puncta à centro K hinc inde æqualiter distent, vel intra circulum, qualia sunt D, E ; vel extra, qualia sunt G, H ; ducanturque ad quodvis circumferentiæ punctum F vel I rectæ DF, EF ; vel rectæ

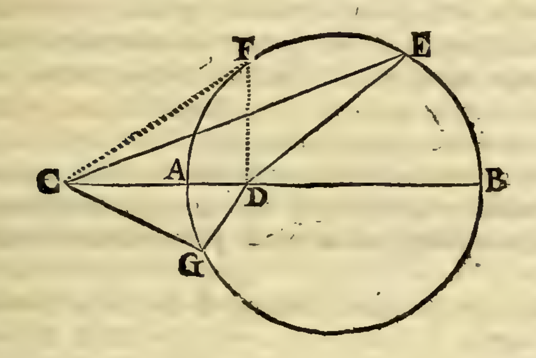
GI, HI; ſemper ambo quadrata DF, EF ſimul ſumpta uni eidemque ſpatio erunt æqualia, nempe ſummæ amborum quadratorum DB, BE, vel ſummæ amborum EA, AD: ſimiliter ambo quadrata GI, IH ſimul ſumpta, uni eidemque ſpatio æqualia erunt, nempe ſummæ amborum quadratorum GB, BH, vel ſummæ amborum HA, AG. Hinc ergo circumferentia illa, lato illo reſpectu, locus erit ad ſummam duorum quadratorum uni eidemque ſpatio ſemper æqualem.

Phraſis Geometrica. Rectâ lineâ quâcunque expoſitâ, ſignatiſque in ea utcumque duobus punctis, ſi ab ipſis punctis ad tertium quodpiam punctum duæ rectæ inclinentur, & ſint ſpecies quæ ab ipſis fiunt ſimul ſumptæ expoſito alicui ſpatio æquales, tertium illud punctum erit ad alicujus circuli circumferentiam.

Species dicunt Geometræ, non quadrata; ut indicent hoc univerſaliter verum eſſe, non de quadratis modò, ſed etiam de figuris ſimilibus, ſimiliterque ſuper rectis de quibus agitur deſcriptis. Quod enim de quadratis verum eſt, idem quoque de ejuſmodi figuris verum eſſe omnino conſtat. Immò, ſi aſſumpta puncta in ſuperiori quarto exemplo plura ſint quàm duo, ſive omnia in eadem recta exiſtant, ſive non, quicunque tandem ſit illorum numerus, & quæcunque poſitio; atque ab iiſdem punctis ad aliud quoddam punctum totidem rectæ ducantur, ſingulæ ſcilicet à ſingulis punctis, & omnium ipſarum rectarum ſpecies ſimul ſumptæ alicui ſpatio ſint æquales: erit illud aliud punctum ad circuli circumferentiam. Dabitur quippe circulus quiſpiam in cujus circumferentia ſumpto quovis puncto, atque ab eo ad omnia puncta primò poſita ductis totidem rectis, erunt harum omnium ductarum ſpecies ſimul ſumptæ eidem ſpatio æquales: quo quidem reſpectu circumferentia illa erit locus, qui omnium locorum planorum elegantiſ-

ſimus jure cenſeri poſſit; ſed illius, ſicuti & aliorum diſcuſſio ſpecialior, ad ſpecialem de locis tractatum pertinet, nos autem hîc ad generalem quandam locorum notionem attendimus.

In quinto exemplo. Eſto item circulus, cujus diameter AB, quæ producatur versùs A extra circulum utcunque in C; & ducatur recta CF tangens circulum in F, à quo demittatur in diametrum perpendicularis FD. Itaque erit ut CA ad AD, ita CB ad BD. Jam in cir-



cumferentia ſumatur quodvis punctum E, vel G &c. à quo rectæ ducantur EC, ED, vel GC, GD &c. erit ſanè ſemper EC ad ED, vel GC ad GD, vel etiam FC ad FD &c. ut CA ad AD, vel ut CB ad BD; ut hoc reſpectu circumferentia AFEBG ſit locus nobiliſſimus ad binas & binas rectas in eadem ratione exiſtentes.

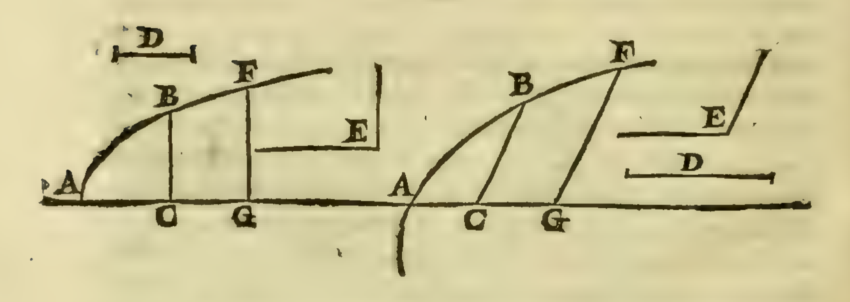
Phraſi Geometricâ. Si à duobus punctis C, D, ad idem aliud punctum E duæ rectæ inclinentur CE, DE, in data ratione inæqualitatis exiſtentes: erit tertium illud punctum E ad cujuſdam circuli circumferentiam.

Omninò, quot proprietates habet magnitudino aliqua, modò proprietates ipſæ magnitudini conveniant, non

autem punctis quibusdam tantùm numero definitis: tot modis ipsa magnitudo locus esse potest; ita ut si infinitæ numero sint tales proprietates ad aliquam magnitudinem pertinentes, etiam infinitis modis, talis magnitudo locus esse possit. Sed & uniuscujusque modi locus denominationem sortietur à proprietate illa, respectu cujus ipse locus est.

Sic, in quinque allatis exemplis, propter quinque nobilissimas circuli proprietates, quinque etiam modis circumferentia illius locus esse ostenditur. At cùm innumeræ aliæ sint ipsius circularis figuræ proprietates, quarum unaquæque in suo genere eximia est, sequitur ut innumeris etiam modis circumferentia circuli locus esse queat: at nos quid sit locus Geometricus indicare tantùm atque exemplis quibusdam illustrare decrevimus, non autem integrum eorum tractatum instaurare: itaque paucis aliis exemplis alterius generis locorum ad præcedentia additis, ad id quod propositum est accedemus.

In sexto ergo exemplo. Esto parabola AB, cujus dia-



meter sit AC, vertex A, atque ad diametrum ordinatim applicata sit quævis recta BC, & latus rectum ponatur esse D. Notum est ergo ex conicis, quadratum rectæ BC æquale esse rectangulo contento sub latere

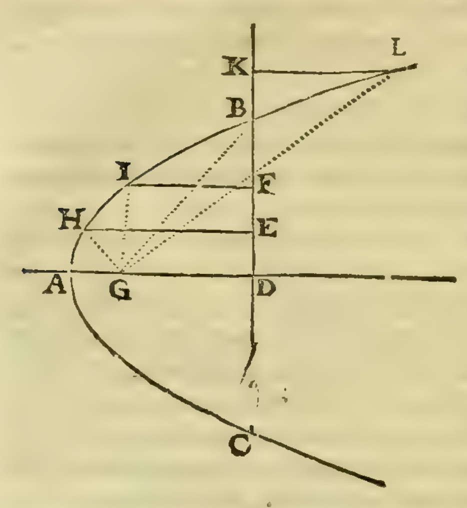
recto D, & ſub rectâ AC, quæ ex diametro inter verticem A & applicatam BC intercipitur, ſive diameter illa ſit axis, ſive alia quæcunque. Itaque ordinatim applicata BC, quæcunque illa, ſit media proportionalis eſt inter latus rectum D & portionem diametri AC. Ac proinde parabola quævis locus eſſe poteſt ad medias proportionales, quarum altera extremarum ſit ſemper eadem.

Phraſi Geometricâ. Rectâ lineâ quacunque expoſitâ AC quæ indefinita ſit, atque ſignato in ea quocunque puncto A; item aliâ rectâ quavis D, longitudine datâ, & dato angulo quocunque E, ſi in priori recta ſumatur quodcunque punctum C ad unas partes ipſius A, & educatur recta CB in angulo ACB qui æqualis ſit angulo E, & punctum B ſit ſemper ad unas partes rectæ AC, ipſa autem BC media ſit proportionalis inter expoſitam D & portionem AC: erit punctum B ad parabolam.

Quòd ſi plures ſint in eadem parabola ordinatim ad eandem diametrum applicatæ, putà BC, FG, inter quas à vertice A interceptæ ſint portiones diametri AC, AG: erunt hæ portiones AC, AG, inter ſe longitudine, ut applicatæ potentiâ; hoc eſt, erit quadratum BC ad quadratum FG ut recta AC ad rectam AG; quo pacto parabola erit locus ad quadrata rectis lineis proportionalia, quod ſatis ex dictis patet.

In ſeptimo exemplo. Eſto rurſus parabola BAC, cujus diameter AD, atque ad ipſam diametrum ordinatim applicata ſit recta BDC; ſumpto autem in ipſa parabola quovis puncto H, ducatur recta HE parallela diametro AD, occurrens ipſi BC in puncto E. Erit ergo ut recta AD ad rectam HE, ita rectangulum BDC ad rectangulum BEC. Similiter, ſumpto in eadem parabola alio quovis puncto I, & ductâ rectâ IF parallelâ ipſi AD vel HE, erit quoque recta AD ad rectam IF,

ut rectangulum BDC ad rectangulum BFC, & recta HE ad rectam IF erit ut rectangulum BEC ad rectangulum BFC: atque ita de reliquis similiter ductis. Unde parabola erit locus ad rectas lineas rectangulis proportionales.



Phrasi Geometricâ. Si expositâ quacunque rectâ BC, sumptisque in ea quotcunque punctis DEF &c. educantur ad easdem partes ipsius rectæ BC aliæ rectæ totidem terminatæ DA, EH, FI &c. atque omnes inter se parallelæ, sintque rationes eductarum eædem cum rationibus rectangulorum quæ sub portionibus rectæ primò expositæ continentur, quæ quidem portiones sumantur à singulis punctis eductarum usque ad extrema B, C, prout singula puncta singulis eductis respondent: erunt reliqua eductarum puncta extrema A, H, I, &c. ad parabolam.

Quòd si recta BC ordinatim applicata producatur in directum extra parabolam ex quacunque parte versùs B vel C quantùm quisquis voluerit usque in K, & ducatur recta KL prædictis AD, HE, IF, &c. parallela, quæ parabolæ etiam productæ occurrat in L, sed ad alteras partes ipsarum AD, HE, IF, &c. tunc quoque erit recta AD ad rectam KL ut rectangulum BDC ad rectangulum BKC, atque ita de reliquis.

Nec

Nec ideo phrasis Geometrica à præcedenti diversa est, nisi in eo tantùm quod rectæ KL, AD, sunt ad diversas partes ipsius BC; quandoquidem sic exigit loci natura.

Neque etiam refert an rectæ AD, HE, IF, KL, &c. sint perpendiculares ipsi BC, vel ad illam obliquæ; hoc enim vel illo modo semper verum erit quod proponitur.

In octavo exemplo. In alterutra figurarum præcedentium ponatur recta AD esse axis parabolæ, ad quam ideo perpendicularis sit ordinatim applicata BC, existentibus angulis ADB, ADC rectis; sitque in axe AD producto, si opus sit, focus G, à quo ad puncta H, I, B, L, &c. quæcunque in parabola existunt, ducantur totidem rectæ GH, GI, GB, GL, & reflectantur aliæ rectæ HE, IF, LK ad quamvis ordinatim applicatam BC quantùm satis productam, perpendiculares: tunc verò (eximia sanè parabolæ proprietas) quævis ducta GH cum sua reflexa HE, æqualis erit cuivis alii ductæ GI cum sua reflexa IF &c. Siquidem reflexæ ipsæ respectû ipsius BC, omnes sint ad partes verticis A, & summa cujusvis talis ductæ cum sua reflexa, putà summa GHE, æqualis erit summæ ambarum GAD, sive uni rectæ GB quæ sola ducta est, cui nulla convenit reflexa respectu ordinatæ BC. Quòd si ductæ quædam, ut GL &c. suas reflexas LK &c. habeant ad alteras partes verticis A respectu ordinatæ BC: tunc differentia inter ductam GL & reflexam LK æqualis est eidem GB. Erit ergo parabola locus ad quotcunque rectas ab eodem puncto ductas, atque à parabola ad eandem aliquam aliam rectam perpendiculariter reflexas, ita ut summa vel differentia cujusvis ductæ & suæ reflexæ æqualis sit alicui datæ rectæ lineæ.

Phrasi Geometricâ. Expositâ quâcunque rectâ lineâ indeterminatâ BC, signatisque in ea duobus punctis B,

C, atque ad eandem erectâ perpendiculari rectâ quâdam longitudine datâ AD, existente puncto D in ipsa BC; sumpto etiam quocunque puncto G in eadem AD: si ductâ quâcunque rectâ GH ad partes puncti A, eâdemque reflexâ perpendiculariter ad rectam BC in punctum E inter puncta B, C, summa ambarum GHE æqualis sit datæ alicui rectæ: vel si ductâ quâcunque rectâ GL ad alteras partes puncti A, eâdemque reflexâ perpendiculariter ad rectam BC in punctum K ultra puncta B, C, differentia ambarum GL, LK, æqualis sit datæ alicui rectæ, ei scilicet cui summa GHE æqualis est: punctum reflexionis H, vel L, erit ad parabolam cujus ipsum punctum G erit focus; recta AD, axis; & recta AG erit quarta pars lateris recti.

Talis verò locus parabolicus ad specula ustoria pertinet. Nam si assumatur pars concava BAC, & radii solis sint rectæ, FI, EH, &c. qui ad sensum sunt paralleli; illi ad puncta I, H, &c. reflectentur à forma parabolica, & reflexi concurrent ad focum G; ubi si speculum sit satis amplum, & sol in debita dispositione, intensissimus calor excitabitur. Hoc autem ideò fit, quia si per puctum I duceretur recta parabolam tangens, tunc rectæ FI, GI, ad ipsam tangentem angulos æquales constituerent: eorum autem angulorum alter esset angulus incidentiæ alter autem angulus reflexionis, atque ita de reliquis ad alia puncta H, &c. pertinentibus.

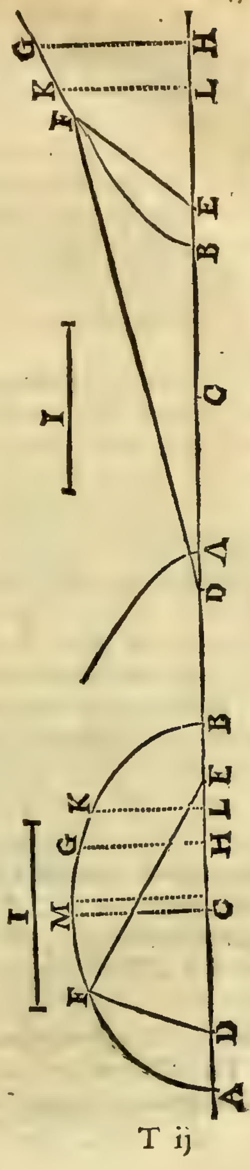
Quod si candela in puncto G constitueretur, ejus radii GH, GI, &c. post reflexionem à speculo fierent paralleli, putà HE, IF, &c. atque ita lumen candelæ longissimè produceretur; sed hæc sunt alterius loci.

Nono exemplo. Esto ellipsis vel hyperbola, cujus axis sit AB, centrum C, vertices autem sint A & B, & foci D, E, quorum D propior sit vertici A, at E sit propior vertici B; atque in sectione sumatur quodvis punctum

F, à quo ad focos ducantur rectæ DF, FE. Patet ergo ex conicis, in ellipsi summam ambarum DFE, in hyperbola autem, differentiam ipsarum DF, FE, axi AB æqualem esse. Unde hoc pacto illipsis locus erit ad summam, hyperbola autem ad differentiam duarum rectarum à duobus certis punctis procedentium & ad idem tertium aliud quodpiam punctum inclinatarum.

Phrasis Geometrica, ad imitationem præmissarum facilis est.

Decimo exemplo. In iisdem sectionibus noni exempli, esto I recta latus rectum suæ sectionis, & recta AB sit quæcunque diameter cui conveniat tale latus rectum, sive ipsa diameter sit axis, sive non, atque ad ipsam diametrum sint ordinatim applicatæ quotcunque rectæ GH, KL, &c. quarum puncta K, G sint in sectione: puncta autem L, H sint in diametro AB quæ in hyperbola producta sit indefinitè. Ergo ex conicis, rectangulum ALB est ad quadratumLK, ut diameter AB ad latus rectum I; item rectangulum ALB est ad rectangulum AHB, ut quadratum LK ad quadratum HG: unde utraque sectio ad utramque talem proprietatem locus est.



Nec phrasis Geometrica difficilis est, modò quis ea quæ superiùs exposita sunt imitari voluerit.

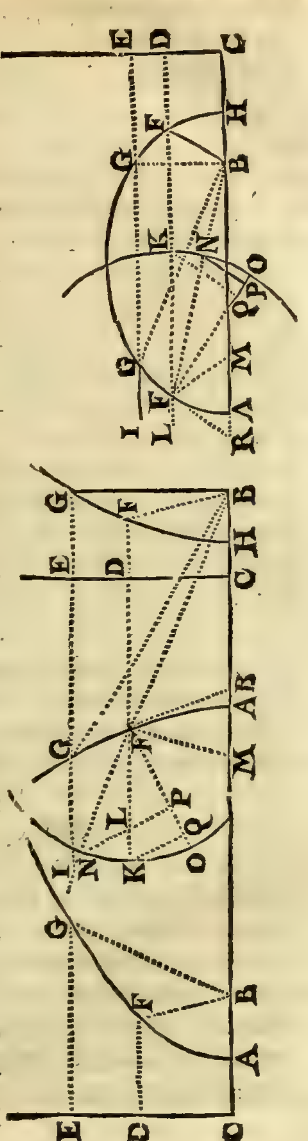
Si AB sit axis, sitque ipsi æquale latus rectum I, vel rectangula ad quadrata sint in ratione æqualitatis: tunc loco ellipsis habebimus circulum, ut in secundo exemplo. At non mutabitur hyperbola, nisi specie tantùm, illa enim in genere semper erit hyperbola; sed hoc casu æqualitatis, assymptoti illius erunt inter se ad angulos rectos, cùm in ratione inæqualitatis illæ assymptoti sint ad angulos obliquos; sed hæc omnia ex conicis manifesta sunt.

Undecimo exemplo. Esto quæcunque sectio conica, cujus axis AB, vertex A & focus B; atque producto utrinque axe, sumatur in eo ultra verticem punctum C, ita ut, in parabola quidem, recta AB æqualis sit rectæ AC, in hyperbola verò ipsa AB major sit quàm AC, in ea scilicet ratione quam habet distantia focorum ad longitudinem axis inter vertices sectionum oppositarum intercepti; at in ellipsi, AB minor sit quàm AC, in ea rursùs ratione quam habet distantia focorum ad axem ellipsis inter vertices interceptum.

Hæc autem utraque ratio est ea quam in figuris noni exempli habet recta DE ad rectam AB; tum ex C excitetur CD perpendiculariter ad CB, eademque CD indefinitè utrinque producatur. His positis, sumantur in sectione quotcunque puncta F, G, &c. à quibus ducantur totidem rectæ DF, EG, &c. ipsi BC parallelæ quæ occurrant rectæ CD in punctis D, E, &c. ac tandem jungantur rectæ BF, BG, &c. ac tunc erit ut BA ad AC, ita BF ad FD, vel BG ad GE, atque ita de reliquis: unde quævis trium illarum sectionum locus est ad pulcherrimam illam proprietatem.

Phrasi Geometrica. Expositis duabus rectis CB, CD ad angulum rectum constitutis, signato in altera illa-

rum unico puncto B, quod à puncto C diversum sit, in altera verò sumantur quotcunque puncta D, E, &c. à quibus ductæ sint rectæ FD, GE, &c. ipsi CB parallelæ, quæ in punctis F, G, &c. inclinentur ad punctum B, & sint rationes BF ad DF, BG ad EG, &c. omnes inter se eædem: puncta F, G, &c. erunt omnia in una eademque sectione conica, cujus punctum B focus erit.



Hujus propositionis, in parabola quidem, unicus est casus, quia in ea unicus est focus, & vertex unicus; at in hyperbola atque in ellipsi, quia in utraque duplex est focus, B, M, & vertex duplex A, H: ideò in unaquaque ex illis sectionibus, quadruplex est casus, duo quidem respectu unius focorum propter duplicem verticem, & duo respectu alterius focorum propter eundem duplicem verticem. At quoniam id quod de uno ex istis focis verum est, verum quoque est de altero similiter considerato; ideò ad explicandos istos casus sufficiet, si unum focorum, putà B, assumpserimus.

Ille ergo focus B necessariò propior est uni verticum quàm alteri. Esto vertex propior H,

remotior autem esto A. Itaque, sive puncta F, G, &c. sint prope verticem remotiorem A, sive eadem puncta F, G sint prope verticem propiorem H, semper vera est propositio, nempe BF rectam esse ad rectam FD sibi conterminam ad punctum F, ut recta BG ad rectam GE sibi conterminam ad punctum G. Hinc verò quædam deduci possunt consequentiæ quæ apud Apollonium in suis conicis non reperiuntur, nec tamen forsan illis cedunt quas ipse habet ibidem, qualis est hæc. In hyperbola, summa ambarum BF, BF, suprà diversos vertices A, H tendentium, & ad eandem rectam FF axi AH parallelam pertinentium, se habet ad ipsam FF, ut recta BM, quam distantiam focorum esse supponimus, ad axem AH. In ellipsi, differentia earumdem BF, BF, ad eandem FF, se habet ut distantia focorum BM ad axem AH; ac proinde in hyperbola, summa ipsarum BF, BF est ad summam BG, BG, ut recta FF ad rectam GG. In ellipsi, differentia ipsarum BF, BF est ad differentiam BG, BG, ut recta FF ad rectam GG; atque ita de multis aliis quas consultò omittimus, quia id tantùm, quid sit locus geometricus, declarare, atque exemplis quibusdam illustrare intendimus.

Illud tamen minimè prætereundum putamus quod ad Dioptricam pertinet, nec ita pridem innotuit, nempe talem proprietatem sumptam in ratione inæqualitatis, ad refractiones pertinere, atque illis esse specificam, ad hoc ut radii omnes qui ante refractionem erant ejusdem ordinis (hoc est vel paralleli, vel ad idem punctum inclinati, sive illi ad ipsum punctum tendant, sive ab eo divergant) iidem post refractionem fiant adhuc ejusdem ordinis, qui tamen ordo diversus sit à priori. Et convertendo. Si superficies quædam refractiva talis sit, ut qui ante refractionem ejusdem ordinis erant radii, iidem post refractionem sint adhuc ejusdem ordinis, sed ab

ordine priori diversi : fiet necessariò ut tali superficiei talis conveniat proprietas, quam in hoc undecimo exemplo sectionibus conicis convenire diximus, in ratione tamen inæqualitatis.

Hîc verò in universum tres sunt casus. Primus est, cùm radii qui ante refractionem erant paralleli, post refractionem fiunt adhuc paralleli, sed diverso à priori parallelismo; qui quidem casus ad sola refractiva plana pertinet, nec admodum utilis est. Secundus casus est, cùm radii qui ante refractionem erant paralleli, post refractionem ad idem punctum inclinantur; vel contrà, qui ante refractionem ad idem punctum inclinabantur, pòst fiunt paralleli; qui casus ad ellipsim pertinet atque ad hyperbolam, quibus proprietas illa convenit in ratione inæqualitatis, non autem ad parabolam, cui ipsa convenit in ratione æqualitatis. Tertius casus est, cùm radii qui ante refractionem ad unum punctum inclinabantur, post refractionem ad unum aliud punctum inclinantur; qui casus aliquando ad superficiem sphericam pertinet, sed in aliquo tantùm casu admodùm particulari, aliàs enim ac multò magis universaliter, ipse pertinet ad alias superficies de quibus in exemplo sequenti dicturi sumus.

Quomodò autem secundus casus ad ellipsim pertineat vel ad hyperbolam, aut, quod universalius est, ad superficiem spheroïdis vel conoïdis hyperbolici, quæ superficies ab ipsis ellipsi vel hyperbolâ circa suos axes conversis gignuntur : non inutile erit hoc loco declarare. Posthàc enim, sequenti exemplo, quomodò tertius casus ad alias superficies pertineat, aperiemus.

In figura ellipsis vel hyperbolæ undecimi hujus exempli, sumpto in sectione quovis puncto F, quâ parte illa sectio magis distat à foco B, eademque vertici A propior est; & factâ constructione ut ibidem; producatur recta

DF ad partes F utcunque in L, tum circa axem AH intelligatur circunvoluta ſectio, ut habeatur ſphæroïdes, vel conoïdes hyperbolicum, ad cujus formam perficiatur preſpicillum vitreum vel cryſtallinum, vel ex aliqua ejuſmodi materia quæ aëre denſior ſit, & radios ab ipſo aëre in eandem obliquè incidentes refringat; & ratio inter aërem & talem materiam, quòd ad rarefractionem & condenſationem ſpectat; ſive, ut vulgò jam loquimur, ratio refractionis inter aërem & ipſam materiam, eadem ſit ei rationi quæ eſt inter rectas BA, AC; ſive inter rectas AH, BM, conferendo ſemper majorem terminum rationis ad minorem, dum confertur corpus rarius ad denſius: (quid ſit autem ratio refractionis inter duo corpora diverſæ denſitatis, jamjam explicabimus:) dico quod in tali perſpicillo, ſi radius incidentiæ ſit LF, qui axi AH parallelus eſt, idemque progrediatur ab L ad F, frangetur radius ille in F, & fractus inclinabitur ad punctum B. Quòd ſi radius incidentiæ ſit BF progrediens à puncto B, ille frangetur in F, & poſt fractionem fiet radius FL axi HA parallelus. Nam in refractione, ſicuti & in reflexione, progreſſus cujuſvis radii, & regreſſus ejuſdem, fiunt per eaſdem lineas: atque omninò quævis ſpecies viſibilis eundo & redeundo idem ſervat iter.

Quoniam ergo ponimus ſuperficiem ſphæroïdis vel conoïdis hyperbolici, exhibere nobis perſpicillum ipſum à quo radii refringuntur in ingreſſu vel in egreſſu ejuſdem ſuperficiei; & ſuperficies illa duplici modo accipi poteſt, primo quidem prout convexa eſt, ita ut convexitas pertineat ad corpus denſius; ſecundo prout concava eſt, ita ut cavitas pertineat ad idem corpus denſius: ſciendum eſt nos de priori modo jam locutos eſſe; quòd ſi de ſecundo modo loquamur, contrarium accidet; nam ſi radius incidentiæ ſit FF axi parallelus, atque

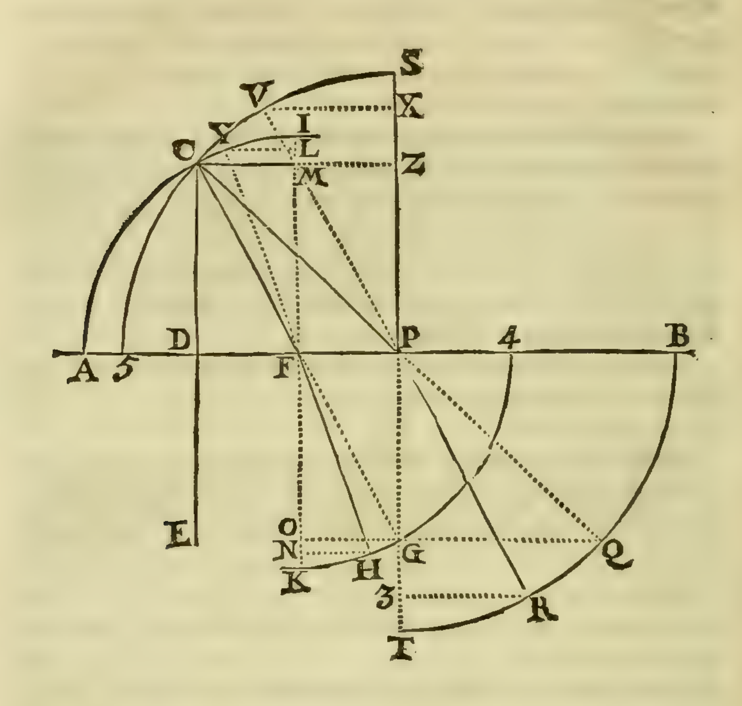
quæ ipse radius à parte foci remotioris B incidat in sectionem cujus vertex est A, is post refractionem in puncto F, fiet radius FI qui diverget tanquam si ab ipso foco remotiore B profectus sit, eritque in directum cum recta linea BF. Si autem radius incidentiæ sit IF, qui ad focum B inclinatur, is post refractionem fiet FF axi parallelus.

In his duobus modis manifestum est sphæroïdem à conoïde hyperbolico in eo differre, quòd priori modo radius LF in conoïde sit intra densum corpus, & FB intra rarum; in sphæroïde autem, LF sit intra rarum & FB intra densum: at secundo modo, è contrario in conoïde radius LF sit in raro, & FB in denso; in sphæroïde autem, LF sit in denso, & FB in raro.

Jam quid sit ratio refractionis inter duo corpora diaphana diversæ densitatis, putà inter aërem & vitrum, sic explicabimus.

Esto AB superficies communis duorum corporum propositorum; sitque rarius, putà aër versùs partem superiorem C; densius autem, putà vitrum, sit versùs partem inferiorem E: & sumpto in rariori, quovis puncto C, progrediantur ab eo quotcunque radii CD, CF, CP &c. cadentes in superficiem AB in punctis D, F, P, &c. per quæ ingrediantur in vitrum: ex iis autem radiis, CD perpendicularis sit ad illam superficiem; cæteri autem obliqui, ita ut CF minùs obliquus sit quàm CP. Omnes ergo, præter CD frangentur in ingressu vitri; at CD solus rectà sine fractione transibit ad E. Jam cujusvis aliorum, putà ipsius CF, fractio sic se habebit. Centro F & intervallo FC describantur duo circuli quadrantes ACI quidem intra aërem, KG4 autem intra vitrum, ita ut recta IFK sit diameter ad superficiem AB perpendicularis, & quadrantes habeant angulos AFI, KF4 rectos, ad verticem oppositos; quo pacto illi jacebunt in eodem

plano, eruntque sibi invicem oppositi. Producatur in directum recta CF intra vitrum usque ad circumferentiam quadrantis in G.



Si igitur radius CF fractus non esset in F, ille rectà progrederetur in G; at propter fractionem fit contrà, ut deviet ab ipsa rectitudine CFG, fiatque CFH ex duabus rectis CF, FH angulum obtusum ad F constituentibus, sic ut intra aërem angulus inclinationis CFI major sit quàm angulus HFK qui est quoque angulus inclinationis intra vitrum; hîc enim inclinationem radiorum mensuramus per angulos quos illi faciunt cum perpendiculari erecta à puncto incidentiæ, & hi anguli respe-

ctu ejusdem radii fracti, majores sunt intra rarum quàm intra densum.

Præterea producatur in directum recta HF ultra centrum F usque ad circumferentiam in Y; atque à quatuor punctis C, Y, G, H in circumferentia existentibus, cadant in rectam IFK totidem pendiculares CM, YL, GO, HN, ex quibus duæ majores CM, GO inter se æquales erunt, sicuti & duæ minores YL, HN inter se. Ratio ergo quam habet utravis majorum ad utramvis minorum, ea est quam vocamus rationem refractionis ab aëre ad vitrum, putà ratio CM ad HN vel ad YL; & convertendo, ratio minoris ad majorem, putà HN ad CM vel ad GO, vocabitur ratio refractionis à vitro ad aërem; ac universaliter major ratio vocatur ratio refractionis à rariori ad densius; minor autem, ratio refractionis à densiori ad rarius.

Et hæc quidem ratio respectu duorum eorumdem corporum nunquam mutatur, sed eadem semper manet per omnes radiorum insuperficiem communem incidentium inclinationes, ut constanti experientiâ comprobatur: neque enim hoc, cùm à corporum natura pendeat, aliter haberi potuit quàm ab experientia, ex qua tale Dioptricæ fundamentum longè præcipuum atque nobilissimum depromptum est.

Sed esto in eandem superficiem AB alius radius CP priori CF obliquior; ac centro P, intervallo PC describantur ut priùs duo circuli quadrantes 5CS, TQB prior in aëre, posterior in vitro, ambo ad verticem oppositi, atque in eodem plano jacentes, & communem diametrum habentes rectam SPT quæ ad planum AB perpendicularis existat; hic autem radius CP frangatur in P, & post fractionem abeat in R, ita ut angulus inclinationis CPS intra rarum major sit angulo inclinationis RPT intra densum; producatur quoque CP in di-

rectum in Q, & RP producatur in directum in V, sintque puncta 5, C, V, S, T, R, Q, B in eadem circuli circumferentia, in cujus diametrum SPT cadant quatuor perpendiculares CZ, QG, R3, VX, quarum duæ majores CZ, QG sunt inter se æquales, sicuti & duæ minores R3, VX inter se. Rursùs ergo, ratio cujusvis majoris ex quatuor illis perpendicularibus ad quamvis minorem, putà ratio CZ ad R3 vel ad VX, est ratio refractionis à raro ad densum; & ratio cujusvis minoris ad quamvis majorem, est ratio refractionis à denso ad rarum, putà R3 ad CZ vel ad QG; & hæ rationes eædem sunt cum præcedentibus CM ad HN, vel HN ad CM, &c.

Vide figuras praecedentes pag. 149.

Tale autem fundamentum refractionis ad prædictas sectiones ellipsim & hyperbolam sic accommodatur. Sumpto in quavis illarum sectionum puncto F, & factâ constructione omninò ut suprà, ac posito quòd sectionis species talis sit ut ratio axis AH ad distantiam focorum BM, sit ratio refractionis à raro ad densum in ellipsi, & à denso ad rarum in hyperbola, inter duo corpora proposita aërem & vitrum; ducatur recta FR quæ sectionem tangat in F; tum recta FO ipsi tangenti perpendicularis, atque adeo perpendicularis quoque ipsi sectioni, quæ quidem FO utrinque producatur indefinitè, sed hoc loco speciatim, ad partes concavas sectionum; deinde centro F & intervallo quocunque FO, describatur circuli quadrans cujus arcus secet rectam FL in K, & rectam BF in N; & à punctis K,N in rectam FO deducantur perpendiculares KQ, NP: demonstrabitur ex natura conicorum, harum perpendicularium KQ, NP rationem eandem esse cum ratione axis AH ad distantiam focorum BM, ac proinde esse rationem refractionis inter duo corpora proposita aërem & vitrum. Posito ergo quòd LF in ellipsi, in hyperbola autem KF sit radius incidentiæ, erit FB radius refractionis; & contrà, si BF sit

radius incidentiæ, erit LF in ellipsi, & KF in hyperbola, radius refractionis.

Cætera quæ plurima sunt, minutatim persequi, Dioptricæ sunt partes; nobis verò qui de locis agimus hoc ostendendum restat, cur tale argumentum, quod manifestò ad Dioptricam pertinet, hoc loco attigerimus.

Id ergo ostendere voluimus, non solùm in rebus purè geometricis locorum geometricorum vim cerni posse, sed etiam in aliis Matheseos partibus quæ objectum suum à Physica mutuantur, modò talis objecti actiones per lineas geometricas producantur: quod sanè radiis specierum visibilium accidere satis superque notum est. Idem autem in Mechanica locum facilè habere ostenderetur; atque etiam in Astronomia: sed istam segetem, quia ad hanc materiam directè non spectat, alio tempore metendam relinquamus.

Porrò, si quis phrasi dioptricâ uti voluerit in enuntiando ejusmodi loco dioptrico, is hoc modo loqui poterit.

Si perspicilli alicujus superficies, radios omnes parallelos in eam incidentes sic refringat, ut ad idem punctum inclinentur: vel si omnes radios ad idem punctum inclinatos, parallelos efficiat, talis superficies erit superficies sphæroïdis, vel conoïdis hyperbolici, & punctum inclinationis erit focus ab ipsa superficie remotior, qui autem paralleli erunt radii, iidem & axi ipsius superficiei erunt paralleli, sed & axis ipse inter vertices interceptus, ad distantiam focorum eam rationem habebit quæ est ratio refractionis inter corpus ex quo fit illud perspicillum, & medium diaphanum per quod transeuntes radii in tale perspicillum incurrunt.

Duodecimo exemplo. Ostendamus quomodò tertius ille casus de quo undecimo exemplo locuti sumus, & quem hûc remisimus, aliquando ad superficiem sphæ-

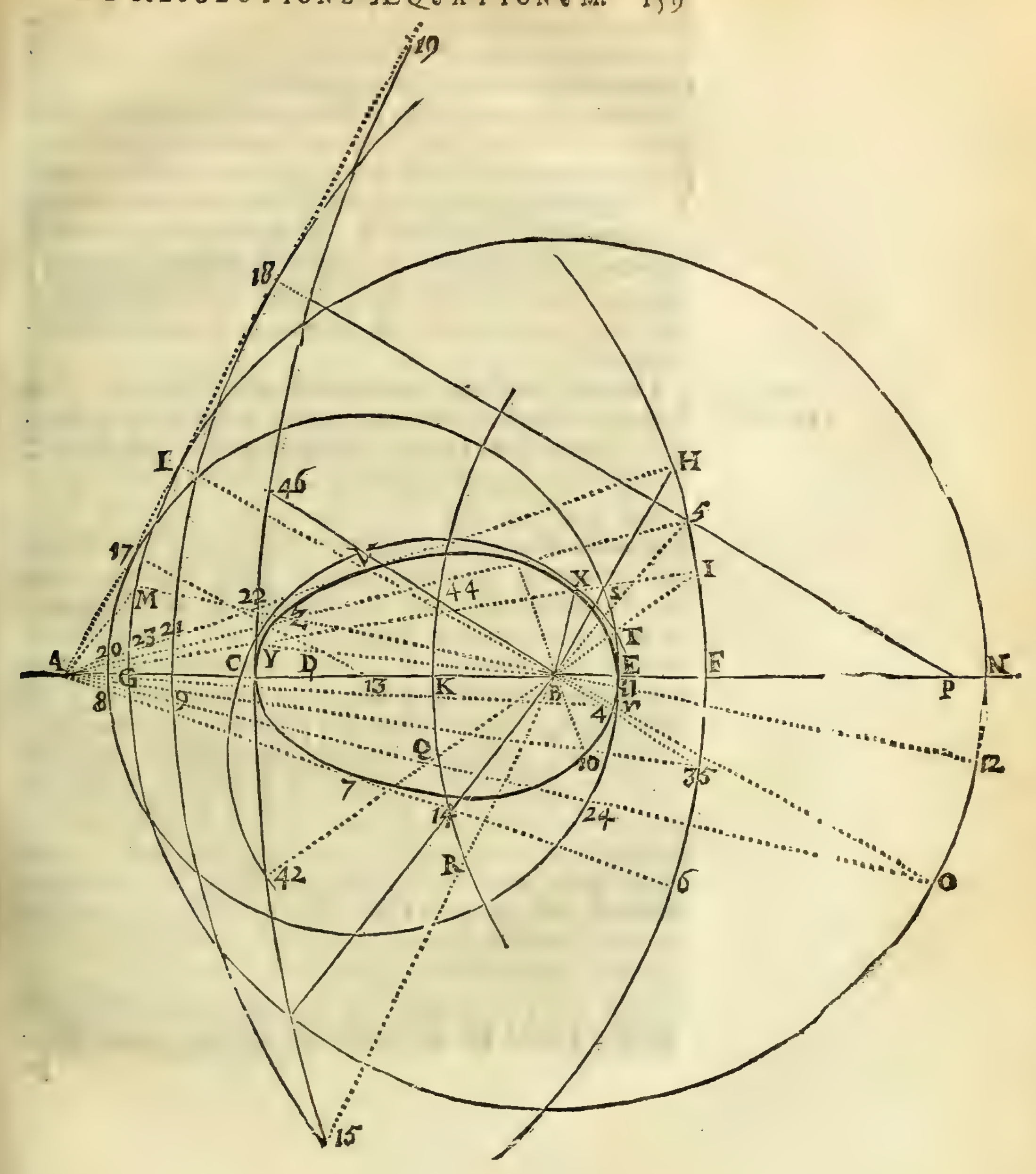
ricam, ſed multò magis univerſaliter ad alias ſuperficies pertineat, quas antiquis notas fuiſſe nullibi apparet.

Sunto ergo in figuris ſequentibus, duo puncta AB; & quæratur perſpicillum quod radios ad punctum A inclinatos ſic refringat, ut poſt refractionem iidem ad punctum B inclinentur. Et quidem jam monuimus perinde eſſe, ſive radii ad punctum A convergant, ſive ipſi radii à puncto A divergant, utroque enim modo, eoſdem dici ad punctum A inclinari: quod idem de quocunque alio puncto B &c. intelligi debet, ne quis circa ea quæ dicta ſunt, vel quæ dicenda ſunt, hærere poſſit.

Hinc ergo quadruplex caſus particularis oriri poteſt. Vel enim radii ab uno punctorum A, B, divergentes, ſic refringendi ſunt, ut poſt fractionem iidem ad alterum convergant; vel radii ab uno punctorum A, B divergentes, ſic refringendi ſunt, ut poſt refractionem ab altero divergant: vel radii ad unum punctorum A, B, convergentes, ſic refringendi ſunt, ut poſt refractionem ab altero convergant; vel denique radii ad unum punctorum A, B convergentes, ſic refringendi ſunt, ut poſt refractionem ab altero divergant.

Et quidem omnes illi quatuor caſus differunt inter ſe perſpicillis duplici modo inter ſe diverſis. Priori modo, cùm perſpicilla ipſa diverſi ſunt generis, quod ad formam ſive figuram ſpectat: quemadmodum diverſi ſunt generis ſphæroïdes, & conoïdes de quibus undecimo exemplo egimus. Poſteriori modo, cùm talia perſpicilla differunt tantùm ſecundùm convexum & concavum, prout ſcilicet hoc vel illud ad corpus denſius pertinet, vel ad rarius.

Verùm, in univerſum, eorum omnium conſtructio non multò magis diverſa eſt quàm conſtructio ellipſis à conſtructione hyperbolæ, quam ſuprà initio undecimi exempli oſtendimus differre tantùm ſecundùm rationem majoris inæqualitatis, & rationem minoris


19
18
L
46
H
5
17
I
M
22
44
X
S
Z
T
23
21
20
A
C
Y
D
E
F
N
G
13
K
B
P
8
9
4
Q
10
12
7
35
14
24
R
42
6
O
15

inæqualitatis. Dicamus ergo breviter de ejuſmodi conſtructione, ut appareat ipſam ad quoſdam eoſque pulcherrimos geometriæ locos pertinere.

Sunto ergo puncta A, B data, oporteatque in plano figuram deſcribere, quâ circa rectam AB circumvolutâ, gignatur forma ad perſpicillum apta, ita ut radii à puncto A divergentes, quotquot in perſpicillum ipſum inciderint, refringantur ad punctum B. Ex duobus autem mediis diaphanis per quæ radii ſive ſpecies tranſibunt, alterum, idemque rarius ſit aër; alterum autem, idemque denſius eſt vitrum, atque inter illa duo corpora ratio refractionis data ſit.

Vide Figur. præced. p. 159.

Ducatur recta AB, quæ indefinitè producatur ultra B versùs E (ad alteras enim partes versùs A inutile fuerit) ac inter puncta A, B, ſumatur quodvis punctum C in recta AB, quod punctum C futurum ſit vertex figuræ planæ quæſitæ, quæ ad ovalem formam apprimè accedet, caret tamen adhuc ſpeciali nomine, propterea quòd ipſa geometris hujuſque ignota fuiſſe apparet. Nec multùm refert an vertex ille C puncto A, an verò puncto B propior ſit; hoc enim liberum eſt, quamquam ad praxim utilior futurus ſit, ſi ad punctum A magis accedat. Poſito autem hoc primo ac præcipuo vertice C ex arbitrio, jam vertex alter E à puncto A remotior erit, immò ultra punctum B in recta AB producta; neque ex arbitrio pendebit illud punctum E, ſed illius poſitio ex prædeterminatis ſic habebitur. Fiat ut ſumma terminorum (id eſt antecedentis & conſequentis ſimul) eorum inter quos ratio refractionis conſiſtit, ad eorumdem differentiam, ita recta CB ad BE, & habebitur ſecundus vertex quæſitus F; fietque, ut ſi ex CB ſecetur CD æqualis ipſi BE, tum recta CE quæ axis erit futuræ ovalis, ſit ad rectam BD in ratione refractionis à raro ad denſum; fiat quoque BE ad EF in eadem ſed inverſa ratione nempe

pe ut BD ad CE; & ut CE ad BD, ita AF ad BG; sed punctum F sit in recta AE producta ultra E, punctum autem G è contrario sit propè A. Tum centro A intervallo AF describatur circulus FH, (sufficiet aliqua hujus circuli portio) & centro B intervallo BG alius circulus integer GMLNO, quem tangat recta AL in puncto L, à quo ducatur diameter LBO quæ angulum ALB rectum constituet; ducatur quoque recta BH ipsi AL parallela, sive ad LB perpendicularis, ita ut anguli recti ALB, LBH sint alternatim oppositi, & recta BH occurat circumferentiæ FH in puncto H, & jungatur recta AH secans BL in puncto V hæc AH determinabit portionem circuli FH quæ ad propositum nostrum utilis erit, sed & eadem AH tanget ovalem describendam in puncto V, & ratio BV ad VH erit ratio refractionis ut BE ad EF, sicuti & LV ad VA. Jam constructio ovalis per puncta talis erit.

Sumpto in arcu FH quocunque puncto I, ducatur recta AI, in qua tale reperiatur punctum X, ut ductâ rectâ BX, ratio hujus BX ad XI sit ratio refractionis ut BE ad EF, sive ut BV ad VH; sic enim punctum X erit in ipsa ovali. Et quia in eadem recta AI aliud reperiri potest punctum Y, ad quod si ducatur recta BY, erit quoque BY ad YI in eadem ratione refractionis: tale punctum Y ad eandem ovalem adhuc pertinebit. Quoniam autem recta AI ducta est utcunque, si multæ ducantur eodem modo ad quotlibet puncta in arcu FH assumpta, habebuntur simili constructione in singulis ex illis rectis, duo puncta ad ovalem pertinentia. Inventis ergo hac ratione quotcunque punctis per quæ ipsa ovalis transire debet, describetur illa ut describi solent multæ lineæ curvæ per quotlibet puncta inventa per quæ linea illa transire debet.

Porrò, ex tali constructione methodus non inelegans

deduci poteſt quâ ipſa ovalis motu aliquo continuo deſcriberetur, nec machina ad talem deſcriptionem requiſita, quamquam ſatis compoſita, admodum difficilis eſſet, nec unico modo perficeretur, immò forſan innumeris: at verò hæc ad organicam potius pertinent, nos autem de locis geometricis hîc agimus.

Patet ergo talem ovalem locum eſſe ad rectas in ratione data exiſtentes; ſiquidem BE ad EF, BX ad XI, BY ad YI, BV ad VH, &c. ſunt ſemper in eadem ratione, nempe in ratione refractionis à denſo ad rarum.

At phraſi geometricâ ſic loquemur. Expoſitâ quâcunque rectâ AB indefinitâ, ſignatiſque in ea duobus punctis A, B, ac deſcripto centro A & intervallo AF majori quàm AB, circulo FIH, ductâque ad ejus circumferentiam quâcunque rectâ AI quæ ſic ſecetur in X, ut ratio rectæ BX ad XI data ſit, ſed minoris inæqualitatis, erit punctum X ad lineam quampiam alicujus generis, quod nec ad rectas nec ad conicas pertinet, & tamen ad Dioptricam utile eſſe poterit.

Quomodò autem, & quando ejuſmodi ovalis Dioptricæ inſerviet, ſic declarabimus. Ad hoc ſanè duæ conditiones præcipuæ requiruntur. Prima eſt, ut ratio data BX ad XI ſit ratio refractionis à denſo ad rarum inter duo corpora diaphana per quæ radius opticus ſive ſpecies viſibilis tranſire debet. Secunda, ut datis duobus punctis A, B, ſemidiameter AF non ſit cujuſcunque longitudinis, ſed illa major quidem ſit quàm AB, at minor quàm ea recta ad quam AB habet rationem refractionis à denſo ad rarum, ſequàm BE ad EF; ut ſic poſtquàm factum fuerit ut FE ad EB, ita FA ad BG, ipſa BG minor ſit quàm AB; nam his conditionibus aut altera earum deficientibus, deſcriberetur quidem aliqua linea curva, ſed quæ ad Dioptricam inutilis eſſet: cùm autem aderunt illæ conditiones, tunc uſus illius in Dioptrica talis erit.

Duæ quidem ſunt partes ejuſmodi curvæ. Prior ac præcipua eſt ea que exiſtit circa verticem C uſque ad duo puncta contactus V, 7; poſterior eſt reliqua circa alterum verticem E uſque ad eoſdem contactus: ſed hæc poſterior pars inutilis eſt, prior verò facit ut exiſtente corpore denſo diaphano ab ipſa ovali comprehenſo, atque ad formam illius perpolito, putà vitro cui alterum corpus rarius undique contiguum ſit, putà aër qui vitrum ambiat; radii omnes à puncto A procedentes, atque in ſuperficiem VC7 incidentes refringantur præcisè in punctum B; atque è contrario, radii omnes à puncto B procedentes, atque in eandem ſuperficiem VC7 incidentes refringantur præcisè in A: quâ ratione primo caſui particulari ex quatuor præmiſſis factum eſt ſatis. Sic, ſi radius incidentiæ in raro ſit AY, radius refractionis in denſo erit YB; atque è contrario, ſi radius incidentiæ in denſo ſit BY, erit radius refractionis in raro YA.

Quòd ſi corpora permutentur, ut rarius ſive aër contineatur ſub forma ovali propoſita, denſiore ſive vitro ipſum coarctante: tunc radii omnes qui intra denſum dirigebantur versùs punctum B, inciduntque in ſuperficiem VC7, ſic refringuntur, ut intra rarum divergant, tanquam ſi à puncto A progrediantur. Atque è contrario, radii omnes qui intra rarum ad punctum A convergebant inciduntque in eandem ſuperficiem, ſic refringuntur intra denſum, ut divergant tamquam ſi à puncto B progrediantur. Sic radio incidentiæ exiſtente LV, MZ, fiet radius refractionis VH, Z5; & è contrario, exiſtente radio incidentiæ HV, 5Z, fiet radius refractionis VL, ZM; hoc autem pacto ſatisfecimus quarto ex quatuor caſibus particularibus.

Alio modo, nec minus eleganti, deſcribi poteſt ejuſmodi ovalis per puncta, beneficio circuli GMLNO ſu-

perius descripti. Ducatur enim ab ejus centro B ad illius circumferentiam ex utraque parte, quæcunque diameter LBO, in qua producta, si opus sit, inveniatur tale punctum V, ut ducta recta AV sit ad VL in ratione refractionis, sed à raro ad densum; (in priori constructione, BX ad XI habebat eandem rationem, sed inversam, quippe à denso ad rarum) sic enim rursus punctum V erit ad eandem ovalem. Simili modo, si in eadem diametro LBO productâ si opus fit, inveniatur punctum aliud 4, ita ut ducta recta A 4 sit ad 4 O in eadem ratione refractionis à raro ad densum ut AV ad VL, sive ut FE ad EB, erit punctum 4 ad ovalem. Quòd si ducantur aliæ quotcunque diametri per centrum B, sed diversæ à diametro LBO, putà MB 12, &c. habebuntur simili constructione unaquaque duo puncta, putà Z, 11, &c. ac per omnia illa puncta ducetur ovalis.

Nec admodùm difficile erit invenire ex tali constructione motum aliquem continuum qui ipsam ovalem uno tractu perficiat; quod rursùs ad Organicam pertinet.

Mirum autem est quanta in præmissa ovali locorum geometricorum seges, nec verò qualiumcunque, sed talium qui inter elegantissimos annumerari possint & debeant. Lubet ergo ex amplissima illa messe spicas aliquas selectiores metere, ex quibus geometræ de tota judicium ferre possint.

In prima ergo constructione diximus BX esse ad XI in ratione refractionis à denso ad rarum. Quòd si ergo, ductâ utcunque semidiametro AI, quæratur in ea punctum X quod ad ovalem esse debet: manifestum est in triangulo BXI (intellige ductam esse rectam BI) dari basim BI, angulum I, & rationem laterum BX, XI. Quia etiam infinitæ sunt semi-diametri, putà A 35, AH, &c. manifestum est quoque infinita esse talia triangula B 10 35, BVH, &c. in quibus omnibus basis data est unà

cum angulis qui sunt ad puncta 35, H, &c. & ratione laterum, quæ semper est ratio refractionis à denso ad rarum. Jam ergo eò deducta est quæstio, ut omnium illorum triangulorum inveniantur vertices X, 10, V, &c. Et quidem tale problema vulgare est: at in praxi proposita, si constructio illius toties repetenda esset quot sunt triangula sive quot sunt invienda puncta per quæ ovalis ducenda sit, id sanè & tædiosum esset, & errori valdè obnoxium. Huic ergo difficultati pulcherrimè occurret geometria, exhibendo nobis locos quosdam, nempe circulorum circumferentias quæ brevissimo compendio dabunt puncta quæsita. Sed quoniam loci illi ex vulgari constructione problematis deducuntur, operæ prætium erit ipsam explicare; pendet autem illa ex loco quinti exempli præmissi, hoc modo.

Propositâ basi BI cujusvis ex triangulis, putà BXI, cujus vertex X inveniendus sit; secetur ipsa BI in T, ita ut IT ad TB sit quemadmodum FE ad EB, hoc est in ratione refractionis, ita tamen ut BT sit minor terminus, quandoquidem latus BX debet esse minus quàm XI, atque in eadem ratione. Tum productâ rectâ IB ultra B usque in 42, fiat I 42 ad 42 B in eadem ratione, seceturque bifariam recta T42 in Q; ac centro Q, intervallo autem QT, vel Q 42, describatur circulus TXY 42, qui secabit rectam AI, dabitque in ea punctum X quæsitum: sed & idem circulus dabit in eadem AI punctum Y: erunt ergo illa puncta vertices duorum triangulorum BXI, BYI, quorum latera erunt in ratione proposita refractionis, ut quidem BX ad XI, ita BY ad YI, & utraque ratio est ut BE ad EF, sive ut BT ad TI.

Quòd si super omnibus basibus datis B 35, BH &c. fiat similis constructio; habebuntur hâc vulgari constructione vertices omnium triangulorum. Patet autem in unaquaque ex illis constructionibus dari centrum unum quale

est centrum Q, & duo intervalla qualia sunt QT, Q42, ad describendos tot circulos, quot sunt bases datæ, sive quot sunt centra.

Sed, quod mirum permultis videri possit, omnia illa centra existunt in una eademque quadam circuli circumferentia, qualis est RQK, quæ secat bifariam axem EC in K; & centrum illius P existit in eodem axe producto ultra E, sic ut ratio FB ad BK eadem sit cum ratione semidiametri AF ad semidiametrum KP: unde respectu duorum circulorum FH, RK, quorum centra sunt A, P, punctum B ad utrumque ex istis circulis est similiter positum: ita ut si per punctum illud B ducatur recta quæcunque IBQ, arcus IF, QK, qui ad ipsos circulos pertinent, sint similes, ut si unus illorum sit 30. grad. exempli gratia, erit & alter 30. grad. Similiter si ducatur alia recta HBR, erunt arcus HF, RK similes, & punctum R erit centrum respectu basis BH, ad inveniendum verticem V trianguli BVH in recta AH; atque ita de reliquis. Verùm in hac recta AH hoc speciale est (quia ipsa tangit ovalem) quòd circulus centro R descriptus, exhibeat in ipsa unicum duntaxat punctum V in quo circulus ille tangit tantùm rectam ipsam AH, non autem secat, sicuti secant suas rectas reliqui circuli quorum centra sunt in arcu RK, à puncto R ad K.

Manifestum est ergo circumferentiam RQK centro P descriptam, esse locum ad centra infinitorum aliorum circulorum, quorum beneficio inveniuntur vertices infinitorum triangulorum: hæc ergo circumferentia dicatur primus centrorum locus; dabitur enim alius, ut infrà patebit; dicetur etiam aliquando circulus RQK primus centrorum circulus.

Præterea, sicuti in basi BI inventum est supra punctum T; sic in unaquaque alia basi putà B 35, BH &c. reperiri potest punctum ipsi T analogum: erunt ergo infi-

nita talia puncta, sicuti numero infinitæ sunt tales bases: at illa omnia existunt in una eademque circuli circumferentia ET 24 8, quæ ovalem tanget in vertice E; centrum autem illius erit punctum 13 in recta EA inter B & A: eritque ut FB ad BE, ita semidiameter FA ad semidiametrum E 13: quo pacto rursùs punctum B ad utrumque circulum FIH, ET 8, similiter positum erit. Sicuti autem ad inveniendum punctum X verticem trianguli BXI usi sumus intervallo QT à centro Q ad punctum T in basi BI; sic ad inveniendum punctum 10 verticem trianguli B 10 35, utemur intervallo 44 *r* à centro 44 in circulo RQK, ad punctum *r* in circulo ET 8.

Patet igitur circumferentiam ET8 centro 13 descriptam, esse locum ad infinita intervalla infinitorum aliorum circulorum, quorum beneficio inveniuntur vertices infinitorum triangulorum. Hæc ergo circumferentia dicatur primus intervallorum locus, dabitur enim statim alius, dicetur etiam aliquando circulus ET 24 8, primus intervallorum circulus.

Rursus, quemadmodum in eadem basi BI productâ ultra B, inventum est punctum 42; sic in unaquaque alia basi reperietur punctum ipsi 42 analogum: ac infinita illa puncta existunt in una eademque circuli circumferentia 15 46 42 C quæ ovalem tanget in vertice C; centrum autem ipsius circumferentiæ erit 27 in axe CE producto ultra E; sed in præmissa figura centrum illud 27 nimis remotum esset à reliquis, unde non potuit in ea signari: atque ut suprà, punctum B respectu hujus circuli, similiter positum est ut respectu circuli FIH; quia ut recta FB ad rectam BC, ita est semidiameter AF ad semidiametrum hujus circuli C 27. Quoniam etiam hic circulus terminat intervallum Q 42 æquale intervallo QT, & intervallum 44 46 æquale intervallo 44 *r*, & sic de reliquis; dicetur idem, secundus intervallorum

circulus; & circumferentia illius, ſecundus intervallorum locus.

Huc uſque ergo habemus quatuor circulos, quorum reſpectu punctum B ſimiliter poſitum reperitur, nempe FIH qui primus omnium eſt; KQR qui primus eſt centrorum circulus; ET 8 qui primus eſt intervallorum circulus; & C 42 46 qui intervallorum ſecundus eſt. Atque etiamſi punctum B nullius ex ipſis quatuor circulis centrum exiſtat; tamen quia ipſum in unoquoque ſimiliter poſitum eſt, ſit ut omnis recta quæ per B ducta circulos omnes illos ſecat, abſcindat ab omnibus quatuor circumferentiis, arcus ſimiles ad axem CE productum utrinque ſi opus fuerit, terminatos. Sic recta ITBQ 42 abſcindit quatuor arcus, IF, TE, QK, & 42 C omnes inter ſe ſimiles, atque ita de cæteris.

Cur autem fiat ut in uno ex iſtis circulis centrum P ſit ad unas partes puncti communis B; in alio verò centrum 13 ſit ad alteras; nulla alia eſt cauſa quàm quòd vertices ipſorum circulorum ſunt ad diverſas partes ejuſdem puncti B: ſed minima quæque perſequi in exemplis, non vacat: hæc enim facilè ſupplebit vel mediocris geometra.

Suprà dedimus duas noſtræ ovalis conſtructiones per puncta, quarum prior utebatur ciculo FIH ad determinandas triangulorum baſes BI, BH, &c. Poſterior verò utebatur circulo GMLNO ad determinandas aliorum triangulorum baſes, putà baſim AM trianguli AZM; baſim AL trianguli AVL; baſim AO trianguli A4O, &c.

Itaque circumferentia prioris horum duorum circulorum FIH dici poteſt primus baſium locus; & circulus dicetur primus baſium circulus.

Eodem jure circumferentia poſterioris circuli GMLNO dicetur ſecundus baſium locus; & circulus, ſecundus baſium circulus.

Quæcumque

Quæcunque autem diximus de primo centrorum loco, ac de primo & secundo intervallorum, referuntur omnia ad primam constructionem; sicuti & primus basium locus. At si ad secundam constructionem respiciamus, ad quam pertinet secundus basium locus GMLNO; tunc respectu illius constructionis dabitur secundus centrorum locus hoc modo.

Primus intervallorum locus ET 24 8 secat axem EC productum inter C & A, in puncto 8. & idem locus tangit rectam AL in puncto 17; sicuti ex constructione secundus basium locus eandem AL tangit in L; secetur bifariàm recta C 8 in puncto 9; tum centro P (hoc enim commune est centrum tam primi quàm secundi centrorum circuli) intervallo autem P 9, describatur circulus 9 18, qui eandem rectam AL productam ultra L tanget in 18; hic ergo erit secundus centrorum circulus, & circumferentia illius erit quoque secundus centrorum locus; quomodo autem centra secundæ constructionis in tali loco accipiantur, posteà declarabimus. Sed & secundus intervallorum locus 15 42 C tangit eandem rectam AL supra punctum 18 in puncto 19; eritque recta 18 19 æqualis rectæ 18 17, propterea quòd recta 9 8 æqualis est rectæ 9 C.

Quòd autem tres circuli, nempe secundus centrorum, & ambo intervallorum, tangant rectam eandem AL productam quantùm satis, id vi geometriæ deducitur ex construtione illorum, atque ex eo quòd secundus basium circulus eandem tangat ex constructione; sed demonstratio, ut elegantissima est, ita & longissima: nos ergo ipsam cum plurimis aliis relinquimus.

Quoniam itaque quatuor illi circuli, secundus basium, secundus centrorum, & ambo intervallorum, eandem rectam tangunt, habentque omnes centra sua in eadem recta AB producta quantum satis; atque huic rectæ AB occurrit

ipsa tangens AL in puncto A; sequitur tale punctum A respectu omnium quatuor illorum circulorum, esse similiter positum. Sed & in omnibus quatuor, erunt distantiæ à puncto A usque ad illorum vertices 8, G, 9, C, semidiametris illorum proportionales: erit quippe recta A 8 ad rectam AG ut semidiameter 13 8 ad semidiametrum BG. Et ut recta A 8 ad rectam A 9, ita semidiameter 13 8 ad semidiametrum P 9: atque ita de reliquis.

Unde si per punctum illud A ducatur quæcunque recta quæ circulos illos omnes secet, auferet hæc ab omnibus similes arcus circumferentiarum, à recta AB usque ad puncta sectionum extensos; putà arcus 8 20, G 23, 9 21, & C 22, inter rectas AB, AV &c.

Dicamus verò nunc quâ ratione secundæ constructionis nostræ ovalis centra in circumferentia 15 9 18, quæ secundus centrorum locus est, accipiantur. Ad hoc autem ducatur à centro B ad secundum basium locum GML, quævis semidiameter BL, quæ producta perficiat integram diametrum LBO ut suprà; ducaturque tam AL, quàm AO, quarum utraque basis erit, illa quidem trianguli AVL, hæc autem trianguli A4O, quorum vertices quæruntur: illi ergo vertices, beneficio talis secundi centrorum loci, sic reperientur. Prima basis AL occurrit illi secundo centrorum loco in puncto 18; & eadem occurrit primo intervallorum loco in puncto 17; secundo autem, in puncto 19: sumetur ergo pro centro punctum 18, pro intervallo, 18 17, vel 18 19, (æqualia enim sunt illa ut suprà notavimus) tale enim intervallum dabit in semidiametro BL, punctum V quæsitum. Sed & hoc speciale est huic puncto V, quòd ducta AV tangat ovalem in ipso V, eò quòd centrum 18 est punctum contactus rectæ AL & secundi loci centrorum. Similiter, si altera basis AO producatur quousque illa

ex altera parte versùs O, occurrat tam ſecundo centrorum loco in puncto 26, quàm ambobus intervallorum, in punctis 24, & 25, dabit illa centrum aliud 26, & duo intervalla æqualia 26 24, & 26 25; quorum illud quod erit 26 24, terminabitur in primo intervallorum loco; (centrum 26, & alterum intervalli punctum 25, in noſtra figura, nimis longè diſtarent à puncto A) tali ergo centro, ac tali intervallo, inveniemus in ſemidiametro BO, punctum quæſitum 4 in ovali.

Simili modo, ſi in ſecundo baſium circulo, ducatur diameter M B 12; huic convenient duæ baſes, AM, & A 12, pro triangulis AZM, A 11 12; (finge triangula illa eſſe abſoluta, quod vitandæ confuſionis gratiâ hîc factum non eſt) ac unaquæque ex illis baſibus ſecabit tam ſecundum locum centrorum, quàm utrumque intervallorum; dabitque in illo quidem centrum, in his verò, intervallum, cujus beneficio, in utraque ſemidiametro BM, B 12, invenietur punctum Z, vel 11, quæſitum.

In hac verò ſecunda conſtructione unicum centrum, putà 18 dat in ovali unicum punctum putà V; quod idem de omnibus aliis verum eſt; cùm è contrario, in prima conſtructione unicum centrum Q dederit duo puncta X & Y.

Neque verò prætereundum eſt quomodo talium locorum beneficio, & centra, & intervalla, ac denique puncta ad ovalem pertinentia facillimè inveniuntur. Quod ſanè in prima ex duabus præmiſſis conſtructionibus præſtitiſſe ſufficiet: hinc enim, quâ ratione eadem methodus ad ſecundam conſtructionem accommodari poſſit, illicò patebit. Quæcunque autem circa tale argumentum dicturi ſumus, praxim reſpiciunt, quæ hoc modo expeditiſſima, & certiſſima reddi poteſt.

Deſcriptis ergo ſecundùm præſcriptas leges ſex cir-

culis sive sex locis ut suprà, duobus quidem basium, duobus centrorum, & duobus intervallorum: assumatur in primo loco basium, quodvis punctum I inter F & H (ultrà enim inutile fore suprà notatum est) & jungatur recta AI, in ea enim reperiri debent duo puncta X, Y, ad ovalem pertinentia: tum arcui FI sumantur duo alii arcus similes, alter KQ in primo centrorum loco, alter ET in primo loco intervallorum: ac sumpto intervallo QT, & pede circini manente in centro Q, notentur altero pede mobili duo puncta X, Y, in recta AI, ut propositum est.

Verùm, inquiet aliquis, possuntne promptè ac expeditè haberi arcus similes in diversis iisque inæqualibus circulis? Possunt sanè, nec uno modo; sed hic omnium facillimus jure videri possit. Duc quamcunque basim BH (extrema ad extremum punctum H pertinens, in hac prima constructione, reliquis præstat, in secunda constructione, nihil refert) quæ producta quantùm satis, dabit in primo loco centrorum arcum KR; ac in primo intervallorum, arcum ES, qui inter se, & ipsi FH similes erunt. Dividantur omnes illi tres arcus singuli in quotcunque partes æquales, ita tamen ut partes unius sint quoque numero æquales partibus alterius: putà, dividatur unusquisque primùm bifariàm, deinde quælibet pars rursùs bifariàm, atque ita continuè quantùm quis voluerit. Hoc enim pacto, puncta arcus FH terminabunt semidiametros AI, AH, &c. Puncta autem prædictis ordine correspondentia in arcu KR, dabunt centra Q, R &c. ac tandem puncta eodem ordine sumpta in arcu ES, terminabunt intervalla. Cætera sunt facilia, nec est cur in iis immoremur.

Expeditis ut suprà, quæ ad primum & quartum ex casibus particularibus refractionum pertinebant, superest nunc ut reliquis duobus, secundo scilicet & tertio,

satisfaciamus : nempe ut explicemus rationem componendi loci qui duobus illis casibus inserviat. Sed antequàm ad rem ipsam veniamus, lubet hîc aliquantisper immorari circa quatuor præcipua puncta figuræ præcedentis, duo nempe focorum A, B; & duo verticum C, E : ex tali enim consideratione magis elucescet analogia quæ inter casus jam expeditos, & eos de quibus agendum superest, intercedit; quæ quidem analogia ad eorumdem casuum figuras extenditur, habetque aliquid simile ei analogiæ quæ in doctrina conica reperitur inter hyperbolam & ellipsim. *Vide Figur. pag. 159.*

Statuamus primùm ex illis quatuor punctis, duo B, & C, esse immobilia, eademque remanere in eo statu in quo hucusque constituta sunt: at punctum A (quod primum ac præcipuum est) mobile esse, idemque diversas positiones successivè ad arbitrium obtinere, ac tandem quartum E eatenus mobile esse, quatenus necessitas geometrica id exiget : existant tamen omnia quatuor in una eademque recta linea AB, quæ ad hoc negotium, utrinque indefinitè producatur.

Ergo, respectu puncti B, vel ipsum punctum A erit versùs C, vel versùs E. Et siquidem illud sit versùs C; vel erit intra figuram inter B, C; vel illud erit in vertice C; vel idem erit extra figuram ultra C, ut in figura præmissa; sed ita ut ab ipso puncto C longissimè, immò infinitè distare possit. Rursùs, si respectu puncti B, punctum A sit versùs E; vel illud A erit inter puncta B, E intra figuram; vel illud erit in vertice E; vel idem erit extra figuram ultra E, sic ut ab ipso puncto E longissimè, immò infinitè distare possit. Tandemque illud idem punctum A considerari potest tanquam si puncto B congruat; ita ut ambo simul unicum punctum efficiant.

Incipiamus ab hoc ultimo statu quo punctum A punc- *I. Status.*

to B congruit: tunc verò loco ovalis CVE 7 habebimus circulum, cujus centrum erit idem punctum commune A vel B, & intervallum sive semidiameter BC, cui æqualis erit BE; unde punctum E vi geometricâ; tantùm distat à puncto B quantùm C ab eodem B. Duo loci basium describentur circa idem centrum B vel A secundùm præscriptas leges in præcedenti constructione, ex duobus locis centrorum, alter, nempe primus coalescet in unicum punctum B, alter erit circumferentia ejusdem circuli CVE 7 qui loco ovalis succedet: tandemque ipsa eadem circuli CVE 7 circumferentia referet duos reliquos locos intervallorum. Sed omnia ad Dioptricam erunt planè inutilia.

II. Status. Esto deinde punctum A intra ovalem inter B & C: ac tunc fiet figura ovalis in qua præcipuus vertex C propior erit præcipuo foco A quàm vertex E foco B; attamen distantia BE minor erit quàm BC; atque ita excessus rectæ AE supra rectam AC major erit quàm excessus rectæ BC supra rectam BE; ac duorum illorum excessuum ratio erit ipsa ratio refractionis. Sex loci, nempe duo basium, duo centrorum, & duo intervallorum, non aliter invenientur quàm in præcedenti figura, sed illi paulò aliter erunt dispositi, quod tamen nullius momenti est; quia hæc omnia ut priùs, ad Dioptricam sunt inutilia.

III. Status. Esto jam punctum A in præcipuo vertice C: quo pacto fiet ovalis quàm acutissima esse potest versùs ipsum C, versùs E autem, quàm obtusissima: siquidem, dum focus A procedit à B ad C, ipsa ovalis in vertice C fit semper acutior; in E autem, obtusior, quousque ipse focus A pervenerit in C, à quo procedendo extra ovalem, vertex C fit minùs acutus, E verò minùs obtusus. At hoc in statu foci primarii A in præcipuo vertice C constituti, ratio axis CE ad excessum quo recta BC superatr ec-

tam BE, eſt ipſa ratio refractionis. Primus locus baſium, primus centrorum, & primus intervallorum inveniuntur ut in ſuperiori conſtructione factum eſt, inter quos ille qui primus eſt intervallorum tranſit etiam per C vel A; quo pacto idem cùm tranſeat per extrema axis C, & E, tangit ovalem in ambobus illis punctis, & centrum illius eſt in medio axis ejuſdem in K. Secundus locus baſium, ſecundus centrorum, & ſecundus intervallorum omnes tranſeunt per idem punctum C vel A, ſed centris differunt: illa tamen, qui hæc ovalis ad Dioptricam nihil confert, relinquenda judicavimus.

IV. Status. Exiſtat nunc focus A extra ovalem, ultra verticem C, non tamen infinitè; tunc autem omnia ſe habebunt prorsùs ut in præmiſſa figura; ita tamen ut, quò major erit ratio rectæ AB ad rectam BC, eò magis ovalis ipſa ad figuram veræ ellipſis conicæ accedat, neque tamen unquam vera ellipſis fiat. Ac in illa, portio circa præcipuum verticem C ad Dioptricam utilis eſt, ut in deſcriptione figuræ præmiſſæ notavimus.

V. Status. Abeat nunc punctum A in infinitum ultrà C, qui ſtatus nobiliſſimus eſt, præbet enim veram ellipſim conicam, ac prorsùs eam quæ undecimo exemplo expoſita eſt, quamque ibidem ad Dioptricam pertinere monuimus, cùm ſcilicet ratio axis AH ad diſtantiam focorum BM eſt ipſa ratio refractionis. Hìc verò omnes ſex loci baſium, centrorum, & intervallorum abeunt in lineas rectas: ſed ex illis, ſecundus baſium, & ſecundus centrorum infinitè diſtant à præcipuo vertice, qui in figura ejuſdem exempli erit A; reliqui quatuor tranſeunt per puncta quæ ibidem ſunt C, H, A, & centrum ellipſis, ſuntque illi omnes quatuor ad axem ejuſdem ellipſis perpendiculares. Quoniam autem à puncto illo qui præcipuus vertex eſt & infinitè diſtat, duci debent rectæ: ſciendum eſt ipſas duci debere axi ellipſis *Vide Figur. pag. 149.*

parallelas. Cætera facilè intelligentur ab eo qui doctrinæ Infiniti in Geometria assuevit.

Similiter, si præcipuus focus A infinitè distet ab altero foco B, ex altera parte versùs secundum verticem E, idem omninò accidet quod jamjam diximus, cùm idem infinitè distaret versùs C; nam ex doctrina infiniti, idem est distare infinitè versùs C, ac distare infinitè ad contrarias partes versùs E: quod sanè illis qui tali doctrinæ minimè assuefacti sunt mirum videri solet, & plerisque absolutè impossibile.

Apparet ergo ex suprà dictis, id quod hucusque latuisse opinamur, nempe in ellipsi conica, quatenùs illa ad Dioptricam referri potest, tres intelligi debere focos, duos scilicet internos, & unum externum qui infinitè distet à quovis ex duobus verticibus. Unum dicimus externum, non duos, etiamsi cuivis doctrinæ infiniti imperito, ille minimè unus, sed duo infinitè à se invicem distantes videri possint. Ille enim quandiu in distantia finita à foco B distitit, ut suprà, unicus fuit A; postquàm autem abiit in infinitum versùs C, idem eodem modo se habet, ac si uno saltu transilierit ad alteram partem versùs E, paratus regredi ab illa parte versùs E secundùm rectam lineam N F E B, usque ad B unde moveri cœperat: immò, sive versùs C, sive versùs E infinitè distare ipse intelligatur, perinde est, quod ad constructionem pertinet: quæcunque enim recta ab eo duci intelligetur, illa axi CE semper existet parallela.

Superest nunc ut ipsum focum A consideremus ab infinita distantia versùs E regredientem usque ad B secundùm rectam NFEB, hic enim status dabit locos illos qui duobus reliquis particularibus casibus refractionum satisfacient. De his agemus posteà, sed priùs operæpretium fuerit statuere puncta A & C fixa, B verò mobile

ad

ad arbitrium; at E rursùs eatenùs mobile tantùm, quatenùs vis geometriæ id postulabit. Neque enim hujus speculationis fructus minor futurus est quàm præcedentis cum qua sanè multa habet communia, sed multa etiam planè diversa, cùm scilicet punctum B in infinitum abibit.

Itaque vel puncta immobilia A & C sunt simul, vel illa à se invicem sejuncta sunt. Si simul sint, vel punctum mobile B eisdem congruit, ita ut tres simul existant, vel idem B ab ipsis A, C, distat; idque vel secundùm distantiam finitam, vel infinitam.

Si tria puncta A, B, C simul existant, tum quartum E cum iisdem existet, evanescetque ipsa ovalis, quæ in idem punctum coalescet, atque unà cum ea omnes sex loci: estque status hic prorsùs inutilis. *VI. Status.*

Si puncta AC simul existant, B autem ab iis utcunque distet, sed finitâ distantiâ, habemus tertium statum ex iis qui suprà expositi sunt, cùm punctum A mobile erat, idemque in C constituebatur. *VII. Status.*

Si punctis A, C, invicem constitutis, punctum B ab utroque infinitè distet ex utravis parte (perinde enim est ex doctrina infiniti, ut suprà,) tunc nulla habebitur ovalis, sed loco illius succedent duæ rectæ secantes se invicem in puncto communi AC, ita ut recta AB angulum ab illis contentum bifariàm dividat; eritque ille angulus tantus quantus debetur assymptotis hyperbolæ illius de qua undecimo exemplo dictum est, posito quòd ratio axis ad focorum distantiam sit ipsa ratio refractionis. Sex loci abeunt in lineas rectas ad rectam AB perpendiculares, sed ex iis tres primi infinitè distant, sicuti & punctum B; tres secundi in unicam coalescunt rectam quæ per punctum commune AC transit: at illa omnia ad Dioptricam sunt inutilia. *VIII. Status.*

Jam puncta AC, quâcunque distantiâ finitâ à se invi-

cem distent, & punctum mobile B incipiat ab A, moveaturque ad C, & ultrà usque in infinitum.

IX. *Status.* Existente ergo puncto mobili B in A, loco ovalis habebimus circulum, cujus centrum erit punctum illud commune A vel B, intervallum AC. Et hic status suprà expositus est, fuitque primus.

X. *Status.* Existente autem ipso puncto mobili B inter A & C, multi habebuntur status inter se diversi, de quibus agemus posteà; illi enim sunt qui reliquis duobus casibus particularibus refractionum satisfaciunt.

XI. *Status.* Existente jam ipso B in C, evanescet ovalis, eademque in idem punctum B vel C coalescet; quod jam suprà notatum est, atque inter inutilia repositum: is status sextus fuit.

XII. *Status.* Existente deinde puncto B ultra C, ita ut C sit inter duo B, A, habebimus statum figuræ præmissæ in qua tamdiu immorati sumus: & idem status suprà fuit quartus.

XIII. *Status.* Existente porrò puncto B ultra C vel ultra A in distantia infinita ex quacunque parte (perinde enim est, ut jam non semel notavimus) tunc statum nobilissimum habebimus: abibit enim ovalis nostra in hyperbolam illam de qua undecimo exemplo dictum est, cùm scilicet ratio axis ad focorum distantiam est ipsa ratio refractionis. Ac hujus quidem hyperbolæ vertex præcipuus erit, hoc loco, in C; alter minus præcipuus E abibit in infinitum: quæ autem huic hyperbolæ opponitur alia hyperbola, respectu præcipui foci A erit inutilis. Sex loci abeunt in lineas rectas ad axem infinitè productum perpendiculares; sed ex iis duo primi infinitè distant versùs C, nempe primus basium, & primus centrorum; primus intervallorum transit per verticem hyperbolæ inutilis, secundus intervallorum transit per præcipuum verticem C. Secundus centrorum transit per centrum hyperbolarum; secundus autem basium transit per illud

punctum in quo recta AC sic dividitur, ut tota AC ad portionem ipsi puncto C conterminam, habeat rationem refractionis à raro à densum.

Apparet ergo idem hyperbolæ conicæ accidere quod de ellipsi suprà dictum est, quodque antiquos latuisse opinamur; nempe, præter duos focos vulgares de quibus in conicis agitur, quique distantiâ finitâ à centro ultra vertices removentur, dari tertium qui ex utravis parte infinitè distet ab eodem centro, quatenùs scilicet ipsa hyperbola ad Dioptricam refertur, &c. ut suprà de ellipsi.

Tandem verò punctum mobile B ab infinita distantia ultra A regrediatur versùs ipsum A à quo moveri incœpit, ita ut idem A existat inter C & B; ac tunc habebimus secundum statum illum inutilem de quo dictum est dum punctum A mobile statuebatur, atque illud existebat intra ovalem inter B & C; nec est quod hîc ultrà addamus. XIV. Status.

Quòd si quærat aliquis quinam hujusce speculationis circa mobilia puncta fructus futurus sit, præcipuè circa locorum doctrinam ad quam pertinere debent hæc nostra exempla: sciat ille primùm quidem in universum, tali, vel aliâ simili consideratione apprimè detegi naturam figurarum omnium; cùm scilicet ritè notaverimus quid ex diverso situ præcipuorum punctorum ad illas pertinentium, eisdem figuris accidere possit, unde illæ immutari queant.

At in specie, quòd ad locos attinet, meminerit vix aliter detegi posse quomodo illi invertantur, aut in figuras genere, aut specie diversas permutentur; quemadmodum suprà vidimus locum illum de quo hoc duodecimo exemplo agimus, nunc esse ovalem aliquam, nunc circulum, & aliquando ellipsim, aut etiam hyperbolam: quod adhuc in iis quæ statim dicturi sumus, non minùs evidenter apparebit.

XV. Status. Præteriimus suprà eum statum in quo punctum B mobile procedens ab A, progreditur, non quidem versùs C, sed ad contrarias partes usque in infinitam distantiam, quia status ille ad Dioptricam inutilis est: quandiu enim ipsum existit in distantia finita, habetur secundus status in quo A statuitur inter B & C, de quo suprà; cùm autem idem existit in distantia infinita, habetur hyperbola inutilis, cujus focus internus est A, vertex autem inter A & C; ac illud C est vertex hyperbolæ oppositæ, quæ sanè opposita poterit esse utilis, sed illa eadem prorsùs erit cùm ea de qua duodecimo statu locuti sumus.

Nihil etiam diximus de puncto C infinitè distante; quia tunc evanescit omnis figura, atque unà cum ea, quæcunque puncta ad eandem pertinebant: quæ omnia in infinitum abeunt.

In universum ergo, res eò reducitur ut vel A focus infinitè distet, ac tunc habetur ellipsis utilis; vel B focus infinitè distet, ac tunc habetur hyperbola, cujus altera ex oppositis utilis est, altera inutilis; vel ex tribus punctis A, C, B medium sit C, ac tunc habetur status utilis, cui inservit figura præmissa; vel A & C simul existant, vel A sit medius inter C & B, vel idem A sit in B, qui tres status sunt inutiles, sicuti & inutiles sunt duo illi in quibus vel tria puncta A, C, B, vel, quod eodem recidit, duo B & C simul existunt; vel tandem punctum B medium sit inter C & A: unde septem oriuntur status nondum expediti, atque omnes utiles, de quibus agendum nobis superest, quia illi omnes & soli duobus reliquis particularibus refractionum casibus satisfacient. Nec multùm in singulis immorabimur; illi enim omnia habent præmissis analoga, scilicet focos, vertices, & locos basium, centrorum, & intervallorum; sed illa omnia positione differunt, atque ex diversa

illa positione, figuræ diversissimæ evadunt.

Primus ergo status ex illis septem reliquis esto ille in quo duo puncta B, & E media sunt inter focos C, A; ac vertex secundus E medius quoque est inter B & A; cui statui inservit figura sequens: in qua quatuor puncta C, B, E, D, se habent prorsùs ut anteà; ita scilicet ut rectæ CD, BE, sint æquales; sicuti & CB, DE; sitque tota CE ad mediam BD in ratione refractionis à raro ad densum. At quia præmissæ conditiones omnes non solùm huic statui, sed etiam tribus sequentibus conveniunt, ideò huic primo illud peculiare esto quòd ratio rectæ AE ad rectam EB sit major ipsâ ratione refractionis à raro ad densum. In secundo autem statu ponetur hæc ratio AE ad EB esse præcisè ratio refractionis à raro ad densum. In tertio è contrario, ponetur AE esse ad EB in ratione minori quàm sit ratio refractionis à raro ad densum, non minori tamen quàm à denso ad rarum. In quarto, ponetur ratio AE ad EB esse minor ratione refractionis à denso ad rarum, quousque punctum A pervenerit ad verticem E. In quinto, ponetur punctum illud A esse in E. In sexto, ponetur idem A esse inter B & E intra ovalem; ita tamen ut ratio totius BE ad portionem EA major sit quàm ratio refractionis à raro ad densum. In septimo denique statu, ponetur ipsum A rursùs intra ovalem inter B & E, sed propiùs ad idem B; ita ut ratio BE ad EA non major sit ratione refractionis à raro ad densum, sed vel eidem æqualis, vel ipsâ minor.

Etsi verò figuræ omnes, quæ singulis ex istis casibus propriæ sunt, differant tam inter se, quàm ab ea quam primam suprà exposuimus; ipsæ tamen plurima habent inter se similia: immò illæ omnes sic delineari ac notis distingui possunt, ut una eademque explicatio omnibus inserviat, nec alia distinctio abhibenda sit, quàm circa positionem aliquot punctorum, quorum quæ in

una figura priora fuêre, eadem in alia figura fient posteriora, & quæ erant media, fient extrema, aut omninò quid simile. Talis sanè est præmissa explicatio, quæ etiamsi primæ figuræ usqueadeò quadret, ut illi soli propria esse appareat, & reverà soli illi propria sit strictè loquendo; eadem tamen, paucis tantùm mutatis, omnibus inservire potest. Id verò in hac secunda figura clarè intueri licet: sed ad hoc monendus est lector, ut quotiescumque in dicta aliqua inciderit quæ secundæ illi figuræ quadrare non videbuntur, tum ipse huc recurrat ad ea quæ statim dicturi sumus, quæque continent præcipua capita in quibus discrepant ejusmodi figuræ.

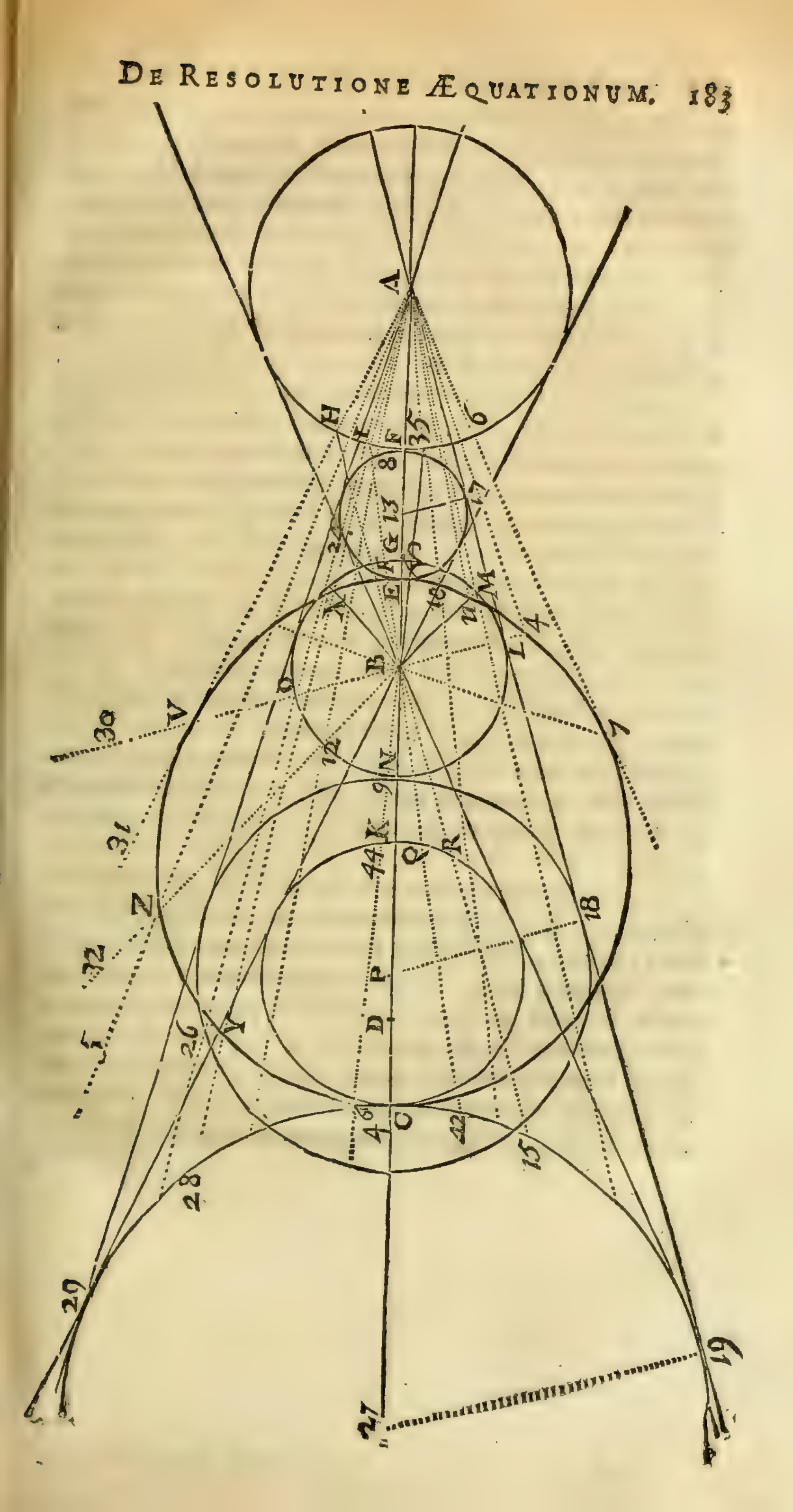
Ac primùm, in hac secunda figura, quia punctum A est ultrà tria puncta C, B, E, versùs E, quod contrarium est primæ figuræ: fit ut punctum G sit quoque ad easdem partes ipsius E, cùm in prima esset versùs C.

Secundò, anguli recti ALB, LBH, in secunda figura sunt interiores & ad easdem partes respectu parallelarum AL, BH, qui tamen in prima erant alterni.

Tertiò, in secunda figura, intervallum AF minus est quàm AB, quod in prima majus erat.

Quartò, cujuscunque longitudinis reperiatur intervallum AF in secunda figura, semper ovalis utilis erit; quod in prima verum non erat.

Quintò, hæc secunda figura satisfacit secundo & tertio casui ex quatuor illis particularibus casibus refractionum ad perspicilla pertinentium qui suprà expositi sunt, cùm prima satisfaceret primo & quarto, ut dictum est. Nam in eadem secunda, posito corpore denso diaphano ab ipsa ovali comprehenso, atque ad formam illius perpolito, putà vitro, cui alterum corpus rarius undique contiguum sit, putà aër qui vitrum ambiat; radii omnes ad punctum A tendentes, atque in superficiem VC7 incidentes, refringuntur præcisè in punc-

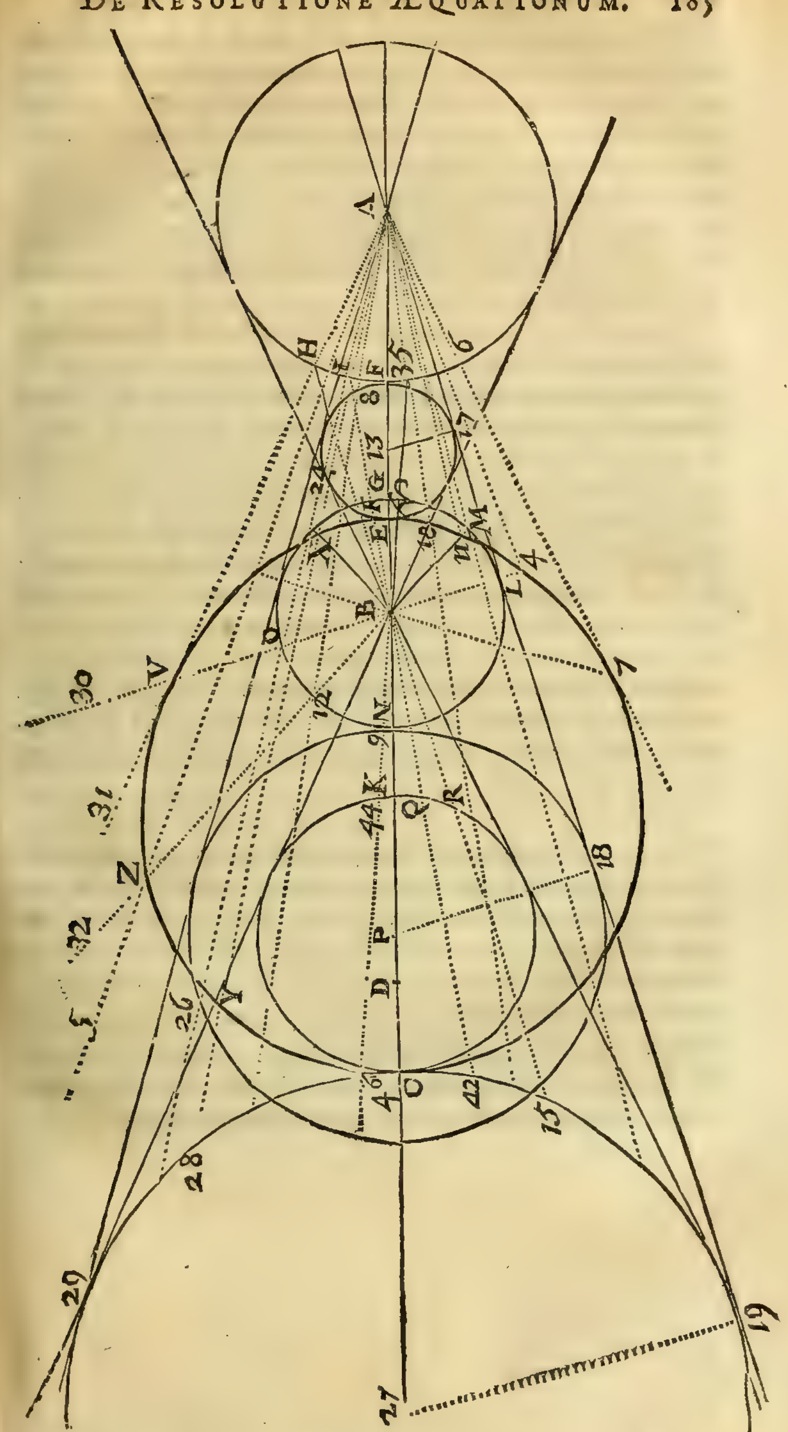


tum B; hic verò est terius ex iisdem quatuor casibus. Atque è contrario, radii omnes à puncto B procedentes, atque in eandem superficiem VC7 incidentes, post refractionem divergunt extra ovalem tanquam si omnes ex puncto A progressi sint: & hic est secundus casus. Sic, si radius incidentiæ in raro sit 28 Y tendens versùs A, radius refractionis in denso erit YB: atque è contrario, si radius incidentiæ in denso sit BY, erit radius refractionis in raro Y 28.

Quòd si corpora permutentur, ut rarius sive aër contineatur sub forma ovali proposita, densiore seu vitro ipsum coarctante: tunc radii omnes qui intra rarum procedunt à puncto A, incidúntque in superficiem VC7, sic refringuntur, ut intra densum divergant tanquam si à puncto B progressi sint. Atque è contrario, radii omnes in denso ad punctum B convergentes, atque in eandem superficiem VC7 incidentes, sic refringuntur, ut intra rarum ad punctum A convergant. Sic radio incidentiæ existente AZ intra rarum, fiet in denso radius refractionis Z 32 qui à puncto B procedit; & è contrario, existente intra densum radio incidentiæ 32 Z qui ad punctum B tendit, fiet intra rarum radius refractionis ZA. Quo pacto rursùs alio modo satisfactum est secundo ac tertio ex prædictis quatuor casibus particularibus.

Sextò, centra circulorum illorum sex quos suprà assignavimus pro locis centrorum, intervallorum, & basium, multò aliter in hac secunda figura, quàm in prima, dispositа sunt. Nam in hac secunda figura centrum P quod ad locos centrorum pertinet, reperitur inter vertices C, E, quod tamen in prima figura erat ultrà. Item, in eadem secunda figura, centrum 27. quod ad secundum locum intervallorum pertinet, abit ultra verticem C, quod tamen in prima abibat ultra E.

Septimò,


A
H
F
35
6
8
G
13
E
M
L
4
B
V
30
7
12
N
9
K
R
Q
44
31
Z
18
P
32
D
Y
26
C
42
15
28
29
19
27

Septimò, quoniam ambo foci A, B in hac secundæ figura reperiuntur extra utrumque circulum intervallorum: fit ut tam ambæ rectæ quæ à puncto A procedentes, tangunt secundum locum basium GLNO, quàm ambæ quæ à puncto B procedentes, tangunt primum locum basium FIH: tam hæ tangentes, inquam, quàm illæ, tangant quoque utrumque circulum intervallorum ET 24 8, & 19 C 29, si scilicet tangentes illæ quantùm satis producantur.

Cæteras differentias quivis facilè percipiet: ideò nos ultrà progrediemur.

Assignavimus suprà differentiam quæ intercedit inter septem illos status in quibus punctum B reperitur inter A & C, diximusque primum in hoc à cæteris distingui, quòd in eo ratio AE exterioris ad BE interiorem (intellige respectu ovalis) major sit ratione refractionis à raro à densum. Huic autem statui omninò accommodata est secunda figura præmissa, in qua ideò primus locus intervallorum ET 24 8 totus extra ovalem existit versùs A & punctum F inter duo A & E constituitur.

Jam secundus status nobilissimus est, in quo scilicet ratio AE ad EB est ipsa ratio refractionis à raro ad densum, unde puncta A & F in unum idemque punctum coalescunt.

In tali autem statu, loco ovalis habemus circulum qui utilis est eodem prorsùs modo quo utilis est præmissa ovalis secundæ figuræ, putà portio illa quæ est circa verticem C usque ad contactus V, 7, quæ portio satisfacit secundo & tertio ex quatuor casibus particularibus refractionum, ut diximus in quinto ex septem capitibus, quibus præmissa secunda figura à prima discrepat. Nec quicquam circa talem explicationem immutandum est, ita ut illa conveniat tam ovali secundæ figuræ, quàm circulo tertiæ sequentis, in qua, etiamsi puncta B, C,

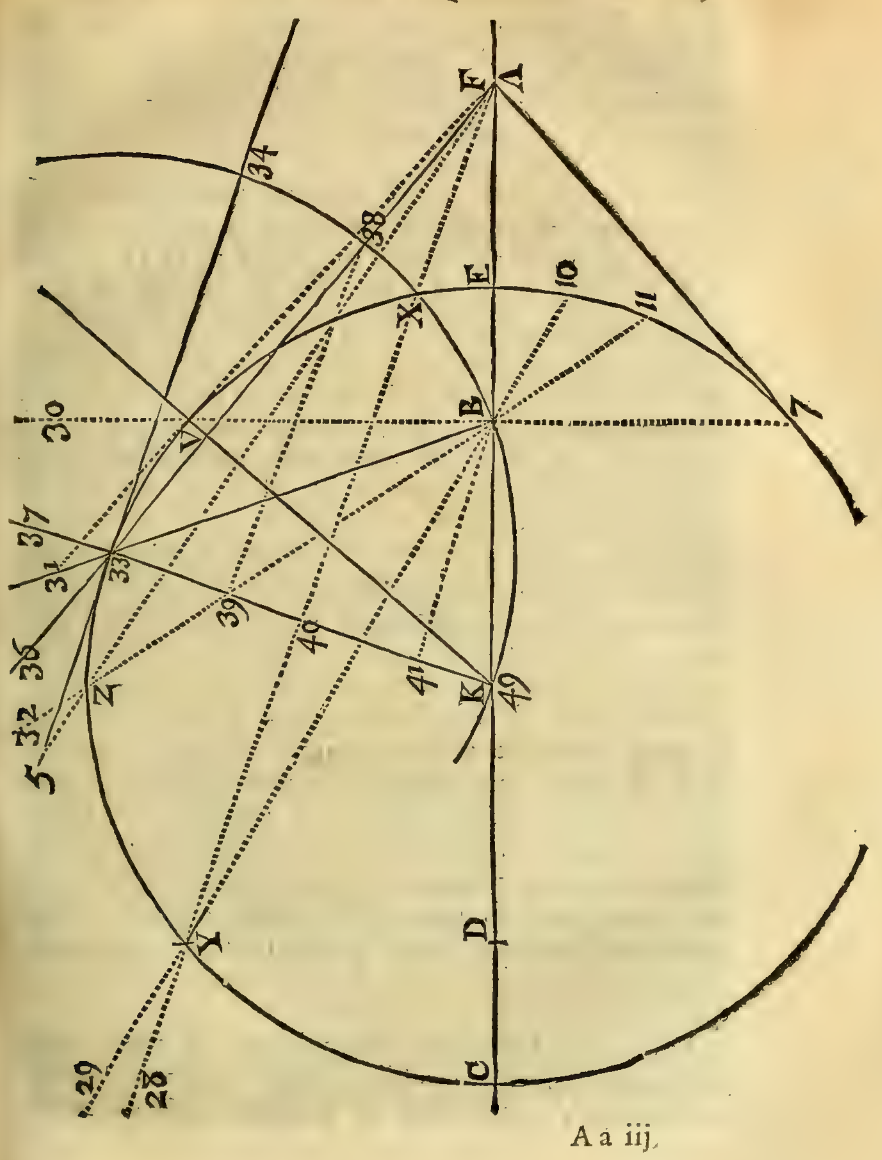
D, E eodem prorsùs modo diſpoſita ſint quo in 2ª figura, tamen, propter rationem refractionum à raro ad denſum quæ intercedit inter rectas AE, EB, fit ut ſex loci de quibus toties ſuprà dictum eſt, ſinguli amiſsâ ſuâ extenſione ſeu magnitudine, in puncta coaluerint; primus ſcilicet locus baſium in punctum A; ſecundus baſium in punctum B; ambo centrorum in punctum K, quod eſt centrum propoſiti circuli CVE7; primus intervallornm in punctum E; ac tandem ſecundus intervallorum in punctum C.

At verò, quòd proprietas adeò inſignis circulo CVE7 conveniat; poſito ſcilicet quòd tam ratio AE ad EB, quàm ratio diametri EC ad BD ſit ratio refractionis à raro ad denſum, ac proinde etiam ratio AC ad CB; (hæc enim tertia ex duabus prioribus ſequitur) quòd, inquam, quivis radius 36 33 à raro quod eſt extra circulum, putà ab aëre incidens in denſum quod eſt intra circulum, putà in vitrum, in punctum 33 quod eſt in circumferentia, ſi dirigatur ad punctum A, non tamen ad idem A perveniat, ſed frangatur in ingreſſu 33, ac fractus abeat in B, illud ex ſequenti demonſtratione manifeſtò patebit: quæ quidem demonſtratio circulo ſpecialis eſt, nec prolixa; univerſalis enim, quæ tam ovalibus quàm circulo conveniret, longiori indigeret apparatu, ut jam ſuprà monuimus.

Ad hoc autem tria notanda ſunt. Primum, quoniam eſt ut AE ad EB, ita AC ad CB, & quatuor puncta A, B, C, E ſunt in eadem recta linea, eſtque A extra circulum, B intra, at EC eſt diameter; fit neceſſariò ut eductâ ex B puncto rectâ perpendiculari ad diametrum EC, atque eâ utrinque productâ uſque ad circumferentiam, puncta in quibus ipſa circumferentiæ occurrit, ſint ipſa V & 7, in quibus rectæ AV, A7 ipſum circulum tangunt, ita ut ductâ rectâ KV, angulus KVA rectus

ſit, atque ita, ratio rectæ AV ad VB ſive KV ad KB, rationi rectæ AK ad KV ſit ſimilis: atque earum rationum converſæ ſimiles, ſcilicet BV ad VA, BK ad KV, & VK ad AK. Secundum, propter eandem rationem AE ad EB, & AC ad CB, fit ut duæ quæcunque rectæ A 33, B 33 quæ ad idem punctum 33 in circumferentia utcunque aſſumptum ducuntur, in eadem quoque ratione exiſtant, putà ut AE ad EB, ſive ut AC ad CB: nam circumferentia EV 33 C 7 talem locum exhibet, qualem quinto loco explicuimus, atque ideò etiam eadem eſt ratio AV ad VB, & AZ ad ZB, & AY ad YB, &c. unde, quoniam ponitur ratio AE ad EB eſſe ratio refractionis à raro ad denſum, erit quoque AV ad VB, A 33 ad 33 B, &c. ratio refractionis à raro ad denſum. Tertium, ductâ rectâ 5 33 34 quæ circulum tangat in puncto 33, tum rectâ 33 K ad centrum K, erit angulus K 33 34 rectus; ac eodem modo fient refractiones radiorum in punctum 33 incidentium à circuli circumferentia E 33 C, quo à linea recta tangente 5 33 34; ſiquidem in univerſum, linea quæcunque curva, & recta ipſam tangens, eaſdem efficiunt refractiones radiorum in punctum contactus incidentium. Poſitâ ergo curvâ C 33 E, vel rectâ 5 33 34 pro dioptrica, ſive pro ſuperficie refractiva, & exiſtente puncto 33 puncto incidentiæ, erit recta 33 K perpendicularis ad dioptricam.

His præmiſſis, centro 33 intervallo quocunque, putà 33 B, deſcribatur circulus ſecans perpendicularem 33 K in puncto 49, rectam 33 A in puncto 38, & rectam 33 34 in puncto 34; eritque arcus 49 34 quadrans; & rectæ 33 49, 33 B, 33 38, & 33 34 erunt æquales. Sed, quod præcipuum eſt, demiſſis in rectam 33 49 productam ſi ſit opus, perpendicularibus A 40, B 41, & 38 39: oſtendendum eſt 38 39 ad B 41 eſſe in ratione refractionis, putà ut AE ad EB; hoc enim demonſtrato, manifeſtum erit



ex lege refractionum quam undecimo exemplo suprà exposuimus, fore ut si radius incidentiæ sit 36 33 38 A, tunc radius refractionis sit 33 B, & vicissim si radius incidentiæ sit B 33, tunc radius refractionis sit 33 36: hoc autem sic demonstramus.

Ratio perpendicularis 38 39 ad perpendicularem B 41, componitur ex rationibus 38 39 ad A 40, & A 40 ad B 41: est autem 38 39 ad A 40, ut 38 33 ad 33 A, sive ut B 33 ad 33 A; & ut A 40 ad B 41, ita AK ad KB: quare ratio 38 39 ad B 41 componitur ex rationibus B 33 ad 33 A, & AK ad KB: ut autem B 33 ad 33 A, ita BV ad VA, ut jam secundo loco notavimus, & ita BK ad KV; ideoque ratio 38 39 ad B 41 componitur ex rationibus AK ad KB, & BK ad KV, quæ ambæ constituunt rationem AK ad KV. Ut ergo 38 39 ad B 41, ita AK ad KV, sive AV ad VB, sive AE ad EB, quæ est ratio refractionis, ut propositum est. Cùmque idem accidat omnibus punctis quæ in arcu VC7 assumi possunt, patet arcum illum esse locum ad propositas refractiones, quarum ratio erit ut AE ad EB; quæ sanè perinsignis est circuli proprietas huc usque, ut existimamus ignota.

Hoc pacto iis satisfecimus quæ initio duodecimi exempli ostendere polliciti sumus, nempe casum tertium ex tribus universalibus Dioptricæ casibus de quibus undecimo exemplo dictum est, aliquando ad superficiem sphæricam pertinere, sed multò magis universaliter ad alias superficies (nempe ovales de quibus suprà) quas antiquis notas fuisse nullibi apparet. Patet enim hunc secundum statum qui ad circulum, atque adeo ad sphæram pertinet, esse specialissimum, alios verò qui ad ovales, esse universaliores.

Porrò, qui supersunt status quinque, ad alias ovales pertinent, quas figurâ exhibere supervacaneum hoc loco duximus; neque enim ex prædictis difficile fuerit

easdem satis accuratè describere. Quamobrem, postquàm ea breviter exposuerimus in quibus illæ à prædictis præcipuè differunt, tunc ulteriùs exemplis parcemus, duodecim præmissis contenti, quæ sanè perillustria sunt; atque ita ad id quod initio propositum est, accedemus.

Tertius ergo status ad ovalem quandam pertinet, in qua sex loci basium, centrorum & intervallorum describuntur. Sed quia punctum A reperitur inter E & F, hinc fit ut quinque ex illis locis, integri intra ovalem constituantur, nempe præter primum basium, reliqui omnes; primus enim basium, vel totus est extra ovalem, vel aliquid tantùm habet intrà; punctum N est versùs E; punctum G est versùs K; punctum 8 est versùs B, atque ita pleraque ex punctis contrario modo disposita sunt quo in secunda figura: est tamen ovalis ipsa tota, ut omnes de quibus hucusque egimus, ad easdem partes cava, quod tribus proximis sequentibus statibus non accidit. Cùmque AE est ad EB in ratione refractionis à raro ad densum, tunc ipsa ovalis ultima est earum quæ ad easdem partes totæ cavæ existunt; ulteriùs enim, puncto A propiùs accedente ad E, tunc partes ovalis vertici E hinc inde vicinæ, incipiunt esse ad exteriores partes cavæ, ut mox declarabimus.

Quartus status omnia habet tertio similia, nisi quòd circà verticem E, partes aliquæ ipsius ovalis quæ ad talem statum pertinet, nempe partes illæ quæ circa verticem E proximè disponuntur, exteriùs versùs A cavæ sunt. At post aliquam distantiam hinc inde ab ipso vertice E, eadem ovalis incipit rursùs ad interiores partes versùs centrum K esse cava, nec posteà mutatur talis cavitas interior, sed durat per totum ovalis reliquum circa præcipuum verticem C; & quò minor est ratio AE ad EB, eò major est cavitas circa verticem E. Quo pacto ejusmodi ovalis aliquo modo accedit ad formam cor-

dis alicujus animalis, cum hac tamen differentia, ut pars quæ est circa E cava sit exteriùs, non ad formam anguli ut cor, sed ad formam quasi rotundam; ut si fingas ovalem aliquam quæ priùs tota interiùs cava erat, ictu quodam alterius ovalis fortioris circa verticem E inflicti, retusam esse ad interiores partes, ut communiter accidit corporibus rotundis debilioribus, dum in firmiora rotunda illidunt. In hac verò ovali, sicuti & in omnibus præmissis, semper reperitur aliqua pars circa verticem E, quæ ad Dioptricam inutilis est, nempe usque ad ea puncta V, 7, in quibus ductæ rectæ AV, A 7, ipsam ovalem tangunt, ut jam suprà sæpiùs dictum est.

Quintus status dum A est in E; quod ad sex locos basium, centrorum, & intervallorum attinet, non admodùm differt à tertio & quarto statu præmissis. Ejus verò ovalis circa verticem E exteriùs cava est quàm maximè. Cæterùm eadem integra ad Dioptricam utilis esse potest, estque prima earum quæ nullas partes habent inutiles; quæ proprietas duobus reliquis statibus etiam convenit. In hoc etiam statu hoc speciale est circa locos, quòd quatuor ex illis, nempe duo loci intervallorum, secundus centrorum, & secundus basium tangant se invicem, atque etiam ovalem in ipso vertice E; unde quæ ab eodem E vel A excitatur perpendicularis ad axem CE, eosdem quatuor locos tangit in ipso eodem E.

In sexto statu, ovalis adhuc cava est circa verticem E, sed minùs quàm in quinto in quo illa circa idem punctum E maximè cava erat; & quò major est ratio rectæ BE ad EA, eò minùs cava est eadem ovalis. In ea sex loci reperiuntur, sed ita ut quatuor de quibus in quinto statu dictum est, extra ovalem excurrant ultra E; unde evanescit tangens AL, quam tamen refert analogicè ea recta quæ ex puncto A excitatur pependiculariter ad axem CE;

CE; exhibet enim illa punctum L ubi secat secundum locum basium; punctum 17, ubi secat primum intervallorum; punctum 18, ubi secat secundum centrorum; & punctum 19, ubi secat secundum intervallorum, quod in septimo casu verum quoque reperitur. Sed & pro diversis rationibus refractionum in diversis mediis, atque etiam pro diversis rationibus BE ad EA, accidere potest ut evanescat tangens B 24, quæ ex puncto B educta tangebat quatuor locos, nempe duos intervallorum, primum centrorum, & primum basium, quam tamen analogicè hoc casu referet ea recta quæ ex puncto B ad axem CE perpendiculariter excitabitur, eo modo quo de tangente AL jamjam dictum est, quod quivis Geometra facilè intelliget.

At ubicunque existat hoc punctum B, sive extra quatuor illos locos; sive in vertice eorumdem, dum vertex ille est in B; sive intra ipsos, ut in hoc statu accidere potest: semper punctum B ad prædictos quatuor locos similiter positum est; ita ut duæ quæcunque rectæ ab eodem B eductæ, & vel tangentes vel secantes quatuor illos circulos, auferant ab illis totidem arcus similes, si sumantur ut sibi respondent. Eadem est ratio puncti A respectu suorum quatuor locorum, de quibus hoc & quinto statu dictum est. Unde inferre licet tam punctum A ad duos locos intervallorum simililiter positum esse, quàm punctum B ad eosdem, etiamsi positio puncti B positioni puncti A minimè similis existat.

Tandem, in septimo statu sex loci non longè aliter se habent quàm in sexto; sed ovalis circa verticem E non ampliùs cava est ad partes exteriores: verùm illa tota interiùs cava existit, nec quicquam in ea speciale reperitur quod sit alicujus momenti.

De tangentibus & rectis ad prædictas omnes ovales perpendicularibus, multa dici possent elegantissima,

quæque hanc materiam, atque adeo totam Geometriam maximè illustrarent: verùm illa ideò præterimus, quia propriè non sunt hujus loci. Hoc tamen monebimus: In omni statu in quo puncta A & C sunt ad easdem partes respectu puncti B, sive ipsa A, C sint simul, sive illorum alterum propiùs accedat ad B, quodcunque illud sit, vel A, vel C: tunc omnem rectam quæ ad ovalem perpendicularis erit, occurrere axi ejusdem ovalis in puncto aliquo quod erit inter ipsum B & alterum ex prædictis duobus A, C, quod eidem B propinquius erit. At verò in omni statu in quo punctum B existet inter prædicta A, C, tunc omnem rectam ejusmodi quæ ad ovalem perpendicularis existet, vel axi parallelam esse, vel eidem occurrere ultra puncta A, B, nullam autem vel in ipsis punctis, vel inter ipsa. Sed de his satis: nunc ad propositam nobis materiam de locis ad analysim aptis accedamus.

De locorum divisione in diversos gradus.

MULTI sunt locorum gradus, immò infiniti; alii enim simplicissimi sunt; alii autem magis ac magis compositi, idque in infinitum. Eorum tamen omnium Antiqui duo in universum genera statuerunt.

Primum genus est eorum qui solis constant lineis, sive illæ rectæ sint, sive curvæ. Ac de his sanè intelligi debet omnis sermo in quo de locis simpliciter agitur, nullo addito vocabulo quod contrarium indicet.

Secundum genus est eorum qui superficiebus constant, vocanturque illi communiter loci ad superficiem; quorum quidam per se subsistunt, nec ab aliis oriuntur; quidam contrà oriuntur sive generantur à locis simplicibus primi generis, dum illi circa axes aliquos conversi, superficies aliquas producunt.

Rursùs, primum genus locorum in tres classes communiter distribui solet, nimirùm in locos planos, in locos solidos, & in locos lineares.

Loci plani duo sunt tantùm, nempe linea recta, & circuli circumferentia.

Loci solidi tres sunt, nempe parabola, hyperbola, & ellipsis; qui ex sectione superficiei conicæ & plani alicujus quod nec per verticem coni transeat, nec basi sit parallelum, nec subcontrariè positum, originem ducunt.

Loci lineares sunt omnes aliæ quæcunque lineæ præter rectam, circuli circumferentiam, & conicas sectiones, putà conchoïdes omnis generis, spirales, cissoïdes, quadratrices, trochoïdes, & infinitæ aliæ, quæ tales sunt & tam multiplices, ut etiam nomine careant. Neque enim aliter comparari debent loci lineares cum locis planis aut cum solidis, quàm genus polygonorum quæ laterum multitudine triangulum aut quadrangulum excedunt, cum ipso triangulo aut quadrangulo. Nam, quemadmodum sub tali nomine polygoni continentur pentagonum, hexagonum, eptagonum, octogonum, &c. quæ omnes figuræ non minùs inter se differunt & specie & proprietatibus quàm triangulum à quadrangulo & utrumque horum à cæteris : sic sub uno nomine linearium infiniti loci continentur qui non minùs differunt inter se naturâ & proprietatibus, quàm linea recta aut circuli circumferentia à parabola, hyperbola, aut ellipsi; aut quàm hæ quinque lineæ ab iisdem locis linearibus, seu à conchoïdibus, spiralibus, cissoïdibus, &c.

At verò non omnes loci lineares ad analysim nostram apti sunt, sed illi tantùm quos ad æquationes analyticas revocari posse contingit. Quid sit autem locum aliquem ad æquationem revocare, posteà declarabimus, & exemplis illustrabimus. Nunc autem, quoniam à multis quæ-

ri ſolet an ejuſmodi loci tam plani quàm ſolidi & lineares, omnes in univerſum geometrici dici debeant, extiterunt non pauci inter Geometras vulgò habiti, qui præter locos planos, nullos alios admittebant, ac cæteros tanquam à Geometria prorsùs alienos reſpuebant, ita ut problema quodvis inſolutum exiſtimarent, quod beneficio locorum planorum ſolvi non poſſet, quantumcumque idem aut per locos ſolidos aut per lineares ſolveretur: ideò non abs re fuerit hoc loco diſquirere quid geometricum, quid verò minimè geometricum cenſeri debeat, poſitis tamen iis omnibus quæ vulgò in elementis omnibus geometricis admitti ſolent.

Sanè in univerſum, quæſtio eſt de nomine, ut manifeſtò patet: tamen, quia multi præ arrogantia, ea omnia damnare conſueverunt quæ ignorant, ne ſcilicet re quadam alicujus pretii privari videantur; ac ſic multa reſpuunt quæ à doctis communiter recipiuntur.

Ut talium ſic leviter ſub appoſitis ſuo modo falſis nominibus res bonas damnantium malitiam quivis veritatis ſtudioſus vitare poſſit, lubet rem ipſam à fundamentis reſumere, quibus intellectis, facile erit cuicunque propoſitionem aliquam geometricè aut ſecùs ſolutam, temerè affirmanti aut neganti reſpondere, atque ipſius affirmationem aut negationem falſam, levem, aut temerariam eſſe, ex ipſius ſcientiæ principiis evidenter demonſtrare.

Ac primùm omnium convenit propoſitiones arithmeticas à geometricis diſtinguere; ſiquidem illas arithmeticè, hoc eſt per operationes ſive regulas arithmeticas; has verò geometricè, hoc eſt per locos geometricos, ſolvi conſentaneum eſt, ut debito ſeu legitimo modo ſolutæ dici debeant. Neque tamen negamus utraſque operam ſibi mutuam præbere, ac ſibi invicem auxiliari, idque multipliciter; quod ideò non impedit ne arith-

metica arithmeticè, geometrica geometricè tractentur.

Arithmeticæ ergo propositiones solvuntur vel addendo, vel substrahendo, vel multiplicando, vel dividendo, vel radices extrahendo; atque id tam in numeris rationalibus seu unitati commensurabilibus, quàm in numeris irrationalibus seu surdis, vel unitati incommensurabilibus; &, sive in numeris simplicibus, sive in compositis ejusmodi operationes instituantur, juvante ubicunque Geometria si opus fuerit, cujus præcipuæ partes sunt distinguere atque imperare ubi & quando addere, aut substrahere, ubi & quando multiplicare aut dividere, ubi & quando radices extrahere conveniat.

Quo in opere non multùm refert utrùm solutio in minimis aut in simplicissimis numeris exhibeatur, vel in majoribus aut magis compositis; sæpè enim accidit ut vel multiplicationes, vel divisiones, vel radicum extractiones adeò intricatæ sint, ut ipsas explicare nimis arduum opus sit, nec quodpiam tantæ operæ prætium satis dignum existat.

Neque tamen diffitendum est ea ingenia longè aliis prælucere, quibus datum est quæstiones quascunque simplicissimo modo solvere: at illa bonis suis gaudeant, modò ne aliorum solutiones minùs simplices tanquam spurias ac minimè recipiendas, nimis arroganter damnare contendant.

In exemplo. Proponatur in numeris hæc æquatio cubica numericè solvenda. $B^{\text{solidum}} - C^{\text{plano}}$ in $A - A^{\text{cubo}} \propto O$, & B^{s}. sit numerus infrà positus, nempe apotome sicuti & C^{p}. 729.

$$B^{s}.\ \text{Apotome.} \left\{ \begin{array}{l} + \quad 142884 \\ - \gamma^{q}\ 17962705800 \end{array} \right. - 729\,A - A^{3} \propto O.$$

Ponamus autem quemdam vel nescire, vel non admodum curare methodum quâ ejusmodi æquatio brevissi-

mo aut ſimpliciſſimo modo ſolvi queat, ſed tantùm id curare, quo modo illa utcunque ſolvatur.

Equidem ex conſtitutione illius, patet ipſam irregularem eſſe, nec de tribus lateribus explicabilem, verùm de unico tantùm, eodemque ſuprà: hoc ex noſtro opere de æquationum cubicarum recognitione, cap. 3. prop. 6. patebit.

At illius conſtitutio ex Vieta elegantiſſimè deducitur. Sunt quippe quatuor quidam numeri continuè proportionales, quorum qui continetur ſub extremis vel mediis eſt tertia pars numeri radicum, ſive tertia pars affectionis ſub A; qui numerus in noſtro exemplo eſt C. 729, & ejus tertia pars eſt 243: differentia autem extremorum eſt ille numerus qui oritur diviſo B ſ. per eandem tertiam partem numeri C. Quia ergo numerus ille ſolidus eſt hæc apotome 142884 — γ 17962705800; eo per 243 diviſo, oritur hæc alia apotome 588 — γ 304200, quæ ideò eſt differentia numerorum extremorum. Eſt autem numerus quæſitus A in eadem ſerie, differentia numerorum mediorum. Eò itaque res reducitur, ut ex quatuor numeris continuè proportionalibus, datâ differentiâ extremorum, nempe 588 — γ 304200; dato etiam producto ex mediis vel ex extremis 243, inveniatur differentia mediorum. Et extremi quidem facili viâ habentur ex data differentia ipſorum, & producto eorumdem; nam ſemidifferentia eſt 294 — γ 76050, & hujus ſemidifferentiæ quadratum eſt hæc apotome 162486 — γ 26293831200, quod additum ipſi producto 243, dat hanc aliam apotomen 162729 — γ 26293831200, cujus radix quadrata eſt dimidia ſumma extremorum γ 88200 — 273. Huic apotome ſi addas ſemidifferentiam extremorum prædictam, nempe 294 — γ 76050, fit major extremorum quæſitorum, hoc nempe binomium γ 450 + 21. Quòd ſi ex eadem apotome γ 88200 —

273, ſeu ex dimidia ſumma extremorum, demas eandem ſemidifferentiam extremorum 294 — √76050, ſit minor extremorum quæſitorum, nempe hæc apotome √328050 — 567. Hoc pacto, datis extremis, quærendi ſunt duo medii proportionales, ut habeatur eorum differentia quæ dabit numerum A quæſitum.

At in quatuor numeris continuè proportionalibus, hoc univerſale theorema eſt: Productus ex majori extremo in quadratum minoris extremi eſt cubus minoris medii. Item, productus ex minori extremo in quadratum majoris extremi eſt cubus majoris medii. Hac igitur regula ex datis extremis, majori quidem √450 + 21, minori autem √328050 — 567, dabuntur duo cubi mediorum. Nam quadratum majoris extremi eſt binomium 891 + √793800: hoc multiplicatum per minorem extremum dat hoc aliud binomium √26572050 + 5103, & hic eſt cubus majoris medii. Simili modo, quadratum minoris extremi eſt hæc apotome 649539 — √421857865800; hoc multiplicatum per majorem extremum dat hanc aliam apotomen √19371024450 — 137781, & hic eſt cubus minoris medii.

Inventis ergo duobus cubis numerorum mediorum, ſupereſt ut cuborum ipſorum radices extrahantur. At verò, talium cuborum alter, nempe major, eſt binomium: alter autem, ſeu minor, eſt apotome; quicunque ergo artem calluerit quâ ex binomiis & apotomis cubicæ radices extrahuntur, is quæſtionem, ſi non ſimpliciſſimo modo, at certè accuratè omninò ſolverit; ſiquidem earum radicum differentia erit numerus A quæſitus, nec alio quovis modo, quamquam ſimpliciori, alius invenietur numerus. Quòd ſi reperiatur aliquis qui talem artem ignoraverit, is poſtquàm cubos prædictos invenerit, ibi ſubſiſtet, ac dicet numerum quæſitum A eſſe differentiam radicum cubicarum talium numerorum

exhibitorum sic $\surd^{cub.}$ hujus binomii | $\surd q$ 26572050 + 5103 | — $\surd^{c.}$ hujus apotomes | $\surd q$ 19371024450 — 137781. | Et sanè ea dici poterit aliqua esse solutio, quoniam ipsa ad numeros certos ac determinatos reducta est. Adde quod plerumque accidit ut binomia aut apotomæ non habeant radices cubicas explicabiles, unde ipsarum differentia per ejusmodi radicum extractionem exhiberi non potest, quamvis illa aliquando rationalis existat; quò fit ut eâdem, vel aliâ viâ quærenda sit, vel eâ ratione quâ suprà, per ipsos cubos irrationales exhibenda.

Verùm in proposito exemplo, radices cubicæ à perito rectè extrahi possunt, quibus exhibitis solutio longè erit elegantior; sunt enim radices illæ binomii quidem, hoc binomium $\surd q$ 162 + 9; apotomes verò hæc, apotome $\surd q$ 1458 — 27. Sint ergo hi numeri duo medii quæsiti, quorum differentia est hæc apotome 36 — $\surd q$ 648 quæ exhibet numerum A quæsitum; quo pacto habemus hoc modo satis longo atque intricato, solutionem quæstionis propositæ: atque etiamsi methodus talis solutionis simplicissima non sit, tamen numerus A inventus est simplicissimus.

Verumenimverò sagacior aliquis Analysta, multò compendiosiori viâ eandem inveniet solutionem. Is enim statim propositâ hâc eâdem æquatione cubica,

$$B\,f.\left\{\begin{array}{l} +\ 142884 \\ -\ \surd q\,17962705800 \end{array}\right. - 729\,A - A^3,$$

animadvertet illam ad minores numeros reduci posse; quandoquidem datur numerus 3, cujus quadratus 9 dividere potest CP ∞ 729, ita ut ejusdem numeri 3 cubus 27 dividere quoque possit B f. 142884 — $\surd q$ 17962705800; ac divisione per quadratum oritur 81, per cubum autem oritur 5292 — $\surd q$ 24640200,

Hoc

Hoc pacto dabitur alia æquatio in minoribus numeris, nempe hæc,

$$D\,c.\left\{\begin{matrix}5292\\ -\gamma q\,24640200\end{matrix}\right. - F\,p\,81\,E - E^{c} \infty O.$$

Cujus æquationis radix E cùm inventa fuerit, ac per 3 prædictum multiplicata, dabitur prioris æquationis radix A quæsita. Est tamen hæc nova æquatio ejusdem constitutionis cum ea quæ initio proposita est; quare concludemus in ea contineri quatuor numeros continuè proportionales, ita ut numerus contentus sub extremis vel mediis sit 27 tertia pars F p, sive numeri 81; differentia verò extremorum sit hæc apotome 196 —— γq 33800; quæ oritur diviso solido D per prædictum numerum 27. Datâ autem differentiâ extremorum, & producto ab iisdem, dantur vulgari methodo iidem extremi, major nempe hoc binomium γq 50 + 7, & minor hæc apotome γq 36450 —— 189. His datis extremis darentur cubi mediorum methodo superiùs traditâ; verùm, eidem Analystæ, quem ex sagacioribus aliquem supponimus, dabitur locus subtili sanè compendio; datur nempe cubus quidam numerus 27 per quem illorum extremorum alter dividi potest, putà minor sive γq 36450 —— 189, quâ divisione reperitur hæc apotome γq 50 —— 7; sumatur ergo talis apotome γq 50 —— 7 loco minoris extremi, majore eodem semper remanente binomio γq 50 + 7, ut suprà. Hac tamen lege, ut postquàm inter illos extremos duo medii inventi fuerint, tum alter illorum minori proximus multiplicetur per 9, quadratum scilicet numeri 3, cujus cubus 27 divisor fuerit minoris ipsius extremi, nempe γq 36450 —— 189: alter autem eorumdem inventorum mediorum ab extremo minore diviso remotior, multiplicetur per 3 radicem ejusdem cubi 27 divisoris; hac enim duplici multiplicatione dabuntur veri duo medii inter duos extre-

mos quos ex secunda æquatione præmissa ad minimos numeros reducta deduximus, nempe inter binomium γ q 50 + 7, & apotomen γ q 36450 — 189.

Resumamus ergo duos minimos extremos ultimò inventos post divisionem per cubum 27, qui sunt γ q 50 + 7, & γ q 50 — 7, inveniamusque inter eosdem, duos medios continuè proportionales.

Rursùs autem hîc quiddam accidit notandum. Nam si quis per traditam suprà regulam, datis extremis, quærat cubos duorum mediorum, is inveniet tales cubos esse eosdem ipsos extremos: quod ideò accidit, quia binomium & apotome quæ ipsos extremos constituunt, iisdem constant nominibus; ac prætereà quadrata ipsorum minum unitate tantùm differunt, quod quoties accidit, toties duo extremi sunt cubi duorum mediorum, unusquisque scilicet illius qui sibi proximus est.

Habeantur ergo duorum illorum extremorum radices cubicæ; binomii quidem, sive γ q 50 + 7, hoc binomium γ q 2 + 1: at apotomes, sive γ q 50 — 7, hæc apotome γ q 2 — 1; atque ita tandem habebimus quatuor continuè proportionales,

γ q 50 + 7, | γ q 2 + 1, | γ q 2 — 1, | & γ q 50 — 7,

in numeris multò minoribus quàm anteà. Quòd si intacto primo, ut suprà decrevimus, secundum illorum multiplicemus per radicem 3, tertium verò per ejus quadratum 9, at quartum per cubum 27, qui anteà divisor extitit, habebimus quatuor illos proportionales qui ad æquationem de E superiùs expositam, pertinent, quorum primus erit in utraque serie idem γ q 50 + 7; secundus γ q 18 + 3; tertius γ q 162 — 9; & tandem quartus, γ q 36450 — 189. Horum quatuor, differentia mediorum est 12 — γ q 72; is autem est numerus E quæsitus in æquatione, qui numerus, si tandem per 3 multipli-

cetur, per eum ſcilicet numerum cujus beneficio depreſſa eſt ſuprà æquatio de A, & ad æquationem de E reducta: dabitur numerus A quem initio quærebamus; & is erit idem qui anteà $36 - \sqrt{q}\,648$, ſed multò breviori multòque ſimpliciori methodo inventus, propter quam tamen non eſt quòd, qui illam callucrit, nimiùm arroganter ſuperbiat.

Hîc quærere poſſet aliquis, an detur certa aliqua regula quâ dignoſcamus num binomia aut apotomæ radices habeant cubicas explicabiles, & quomodo illæ eruantur.

Sciat igitur ille talem dari regulam, quam non abs re fuerit paucis indicare. Ac primùm, ponamus binomium aut apotomen propoſitam, eſſe primi vel ſecundi, quarti vel quinti ordinis, tum ſic fiet:

Ex quadrato majoris nominis dematur quadratum minoris, ac tum ſi differentia reperiatur eſſe cubus numerus habens radicem minimè ſurdam, ſed unitati commenſurabilem, benè eſt, nec alia præparatione eſt opus: ſin ſecùs, tunc aliqua præparatione utendum eſt, de qua dicemus poſteà. Ponamus ergo prædictam differentiam habere radicem cubicam, quæ radix vocetur B planum; at majus nomen binomii aut apotomes, vocetur M ſolidum; minus autem vocetur N ſolidum: tum alterutra ex ſequentibus duabus æquationibus cubicis ſolvatur, nempe

$$\tfrac{1}{4} M \text{ſ.} + \tfrac{3}{4} B \text{p.} A - A^3 \propto O,$$
$$\text{vel } \tfrac{1}{4} N \text{ſ.} - \tfrac{3}{4} B \text{p.} A - A^3 \propto O;$$

prior quidem, ſi binomium vel apotome primi vel quarti ordinis extiterit; poſterior autem, ſi ſecundi vel quinti. Talis autem æquationis radix reperiri debet eſſe numerus minimè ſurdus, atque ideò inventu facillimus. Quòd ſi illa radix non reperiatur eſſe rationalis, ſeu

unitati commenſurabilis, tunc certò pronuntiare licebit, binomium aut apotomen non habere radicem cubicam explicabilem. Eſto ergo illa cubicæ æquationis radix numerus rationalis integer vel fractus, tunc illa priori quidem æquatione erit majus nomen, à cujus quadrato ſi dematur B planum, relinquetur quadratum minoris nominis, ex quibus nominibus conſtituetur binomium vel apotome: atque hæc vel illud erit radix cubica quæſita. At ſecunda æquatione radix erit minus nomen, cujus quadrato ſi addatur B planum, fiet quadratum minoris nominis; atque ab illis nominibus conſtitutum binomium vel apotome, erit radix cubica quæ quæritur.

Jam verò exiſtente binomio vel apotome primi, ſecundi, quarti, vel quinti ordinis, quadrata nominum non differant cubo numero, ſed quocunque alio: tunc hac præparatione utemur. Differentia illa quæ cubus non eſt, vocetur C ſſ., ac per eandem differentiam multiplicetur utrumque propoſitorum nominum binomii vel apotomes cujus radix inveſtigatur, putà M ſ. & N ſ.; hac enim multiplicatione habebimus binomium aliud vel aliam apotomen ejuſdem ordinis, cujus quadrata nominum cubo numero different. Atque omninò non refert quis ſit multiplicator per quem multiplicentur nomina M ſ. & N ſ. modò quadrata nominum inde ortorum cubo numero differant; is ergo multiplicator, quicunque ille ſit, vocetur C ſſ. ſive ille ſit idem qui ſuprà, ſive non; eſt tamen primus communiter ſimpliciſſimus.

Talis ergo binomii vel apotomes tali multiplicatione conſtitutæ radix cubica inveniatur ea methodo quam jamjam tradidimus mediante æquatione cubica convenienti: tum radix inventa dividatur per C p. hoc eſt per radicem cubicam C ſſ. quæcunque ſit illa radix, ſurda, vel rationalis; quotiens enim talis diviſionis dabit radicem cubicam initio quæſitam.

Ponamus tandem propoſitum binomium vel apotomen, eſſe tertii vel ſexti ordinis; atque, ut ſuprà, majus nomen eſto M ſ. minus autem N ſ.; & C ſſ. eſto differentia quadratorum nominum ipſorum. Tum inveniatur numerus aliquis D ſſ., qui multiplicans C ſſ. faciat cubum, multiplicans autem vel M ſſ., vel N ſſ. faciat quadratum: (dantur infiniti tales numeri, & facilè inveniuntur) ac per D ſ., hoc eſt per radicem quadratam numeri D ſſ., multiplicetur utrumque nominum M ſ. & N ſ.; tali enim multiplicatione orietur aliud binomium vel alia apotome primi, ſecundi, quarti, vel quinti ordinis, cujus quadrata nominum different cubo numero; illius ergo radix cubica (ſi illa explicabilis ſit) habebitur per præmiſſam regulam mediante congruenti æquatione cubica, ut dictum eſt: hæc ergo radix cubica diviſa per D, hoc eſt per radicem ſolido-ſolidam, ſeu cubo-cubicam numeri D ſſ., dabit radicem cubicam binomii vel apotomes, cujus nomina ſunt M ſ. & N ſ., quam invenire propoſitum erat.

Plurima ſuper hac re dici poterant; ſed nos regulam pulcherrimam indicare duntaxat, non minutatim perſequi voluimus, & quæ dicta ſunt ſufficient Analyſtæ non omnino rudi ad cætera detegenda.

Nec eſt quòd quis dicat, hoc modo proponi obſcurum per obſcurius explicandum, dum inventionem radicis cubicæ alicujus binomii vel apotomes ad reſolutionem æquationis cubicæ reducimus. Quandoquidem enim talis æquationis ſolutio reperiri debet numerus rationalis integer vel fractus (aliàs enim, ſi ſurdus exiſtat non erit radix binomii vel apotomes explicabilis) non aliter, nec majori difficultate ſolvetur æquatio illa, quàm ſimplex diviſio abſolvenda eſſet; quod ſanè callere debet quicunque Analyſim vel mediocriter coluerit. Legatur Vieta lib. de Æquationum recognitione &

emendatione, ac præcipuè capite illo quo æquatio sic transſmutari poteſt, ut coefficiens ſit quæ præſcribitur : ſtatuatur enim coefficiens unitas; tum verò ſolidum comparationis erit cubus aliquis ſuo latere auctus vel mulctatus : cætera plana ſunt, unde nihil ultrà addemus.

Hoc exemplo ſatis declaravimus quid requiratur ad hoc ut problema aliquod arithmeticum arithmeticè ſolutum dici poſſit : qua de re tantis operibus egerunt Vieta, Cardanus, Bombellius, Tartalia, & alii quidam illuſtres præteriti ſæculi viri, inter quos longè excelluit ipſe Vieta, dum talium problematum ſolutionem, non quidem ſingularem pro ſingulis problematis, ſed univerſalem pro qualibet ſpecie problematum, per ſpecies ad id à ſe inventas inquiſivit.

Neque abs re fuerit Analyſtam monere, quæſtionem omnem in numeris propoſitam, in qua ex datis quibuſdam numeris, alius aliquis numerus quæritur ſecundùm leges quaſdam in eadem quæſtione præſcriptas, ſemper eſſe quæſtionem ſingularem; atque etiamſi illa ad æquationem analyticam revocata, ad æquationes cubicas, aut ad altiores pertinere videatur : tamen non temerè ſtatim pronuntiandum eſſe, talem quæſtionem ſolidam eſſe aut linearem, ſæpiſſimè enim accidit, ut illa vi inductionis logicæ plana ſit; dico vi inductionis logicæ, quoties ſcilicet ſolutio illius datur in numeris qui logicâ inductione initâ, neceſſariò reperiuntur. Ut ſi experiar num æquatio aliqua de unitate ſit explicabilis, num de binario, num de ternario, de quaternario, quinario, ſenario, &c. neque enim in infinitum abit tale experimentum, quandoquidem, ex hypoteſi, numeri in ipſa æquatione expreſſi ſunt, qui radicem quæſitam intra certos ac præfinitos terminos coercent. Aut ſi certâ aliquâ conjecturâ deprehenderim illam, non de integro numero, ſed de fracto explicabilem eſſe, cujus numeri

fracti denominator ex recognitione ipsius æquationis innotescat : tum inductione factâ, quæram numeratorem binarium, ternarium, quaternarium, quinarium, senarium, septenarium, &c. donec illum invenero, qui experiundo satisfaciat propositæ quæstioni; neque enim rursùs in infinitum abit tale experimentum. Eodem modo, si ex recognitione talis æquationis deprehendero ipsam nec de integro numero nec de fracto explicari posse, sed de surdo aliquo, cujus tales ex ipsa recognitione innotescant conditiones, ut ille, quamquam surdus, inductione factâ detegi possit : tales omnes æquationes planæ censeri debent, non autem solidæ aut lineares, sub quarum specie aliquâ contineri primo intuitu apparuerunt. Ac planè talis existit præmissa æquatio cubica numerica, in qua satis jamjam immorati sumus, quæ tamen prima fronte alicui minùs perito Analystæ, solida quædam quæstio ex iis quæ insolubiles vulgò censentur, potuit apparere.

Nunc ergo ad geometriam redeamus, & quid geometricum sit, aut censeri debeat explicemus. Geometricum in universum vocamus quodcunque intelligibile est in materia geometrica, nullâ habitâ ratione sensuum externorum, putà visus, auditus, tactus, gustus, vel olfactus, nisi quatenùs illi intellectum movere possunt ad suas operationes exercendas. Verbi gratiâ, dum species visibilis circuli alicujus materialis in oculum incidens visum movet, illa ex occasione causa esse poterit cur intellectus ab illo sensu excitatus talem figuram considerandam suscipiat, ac multas easque insignes proprietates detegat, atque evidenter ex certis atque indubitatis principiis demonstret. Ejusmodi igitur cognitio ab intellectu elicita, atque in ipso intellectu residens tanquam species aliqua intellectiva circa materiam geometricam, est id quod geometricum appellamus.

Materia verò gemetrica est omne extensum quatenùs extensum, & quidquid ad illud pertinet sub eadem ratione; quales sunt termini illius, quales figuræ, quales rationes & portiones magnitudinum ad invicem, & si quid aliud ad tale argumentum pertineat. Itaque lineæ omnes, omnesque superficies quæ certis atque intellectu planè perceptis regulis describuntur, omninò geometricæ sunt, sicuti & figuræ quæcunque talibus lineis, ac talibus superficiebus continentur. Nec refert quòd illæ omnes lineæ, superficies, & reliquæ, mediante motu aliquo vel simplici vel composito, ut plurimùm sub intellectum cadant. Nam primùm, motus ille, sive sit puncti alicujus, ad lineam aliquam describendam, sive sit alicujus lineæ ad describendam superficiem, sive superficiei ad solidum describendum, est simpliciter intelligibilis; non autem sensu externo perceptibilis, nisi quatenùs ad meram praxim refertur, quæ sensus externos respicit, nec ad puram geometriam, hoc est purè intelligibilem, reducitur; sed & puncta, lineæ, aut superficies quæ moveri intelliguntur, purè sunt geometricæ, abstrahuntque à materia sensibili; & per spatium purè geometricum, atque à materia sensibili abstructum, motus suos perficere intelliguntur, transeuntque à termino noto ad notum terminum per notum medium, secundùm leges notas, & clarâ ac distinctâ intellectus notione, aut firmo ratiocinio stabilitas; aliàs enim, nisi has sortiantur conditiones, illæ tanquam spuriæ, atque à Geometria prorsùs alienæ respuuntur.

Secundò, etiamsi, qui rerum geometricarum minùs periti sunt, putent lineas, superficies, & solida, motu punctorum, linearum, & superficierum reverà gigni, ita ut iidem existiment magnitudines illas tum primùm esse incipere, cùm primùm à tali motu producuntur: tamen ei qui rem penitùs inspexerit, manifestò patebit illam longè aliter se habere; quippe, posito tantùm spatio geometrico omnimo-

dè

dè extenſo, (illud autem ſpatium, etiam nemine cogitante, in rerum natura ponitur) ponuntur ſtatim tales magnitudines in tali ſpatio, etiam nemine cogitante & abſtrahendo ab omni motu, atque omnes ſimul in ipſo exiſtunt abſque omni intellectus operatione. At motus ad hoc inſervit, ut per omnes partes ipſarum magnitudinum intellectum ſucceſſivè perducendo, illum faciliùs ad earumdem cognitionem pertrahat. Sic enim comparatus eſt humanus intellectus, ut vix quippiam, præcipuè ſi extenſum eſt, ſimul ac totum apprehendat, ſed tantùm ſucceſſivè ac per partes; quod ſanè eſt motu intellectivo moveri per tale extenſum, nec tamen illud motu ipſo in rerum natura ponitur, ſed tantùm eodem mediante intelligitur, cùm priùs abſque omni motu, atque ab intellectu independenter extaret.

Cùm ergo Euclides ſphæram, conum, ac cylindrum; cùm Apollonius ſuperficiem conicam; cùm Archimedes ſphæroïdem, conoïdem, & helices; cùm alii conchoïdes, ciſſoïdes, quadratrices, trochoïdes, atque innumeras ejuſmodi lineas & figuras per motus deſcribunt; immò quidam lineam rectam per motum puncti, & circulum per motum rectæ lineæ: illi omnes ſic intelligendi ſunt, ut voluerint magnitudines ipſas priùs exiſtentes, eodem modo quo à ſe conciperentur, aliorum intellectui exponere, ſeu oſtendere; quod cùm aliter faciliùs non poſſent, hoc modo per motus, vel ſimplices, vel compoſitos omninò feliciter effecerunt.

Rursùs, quòd quædam lineæ aut quædam ſuperficies, beneficio inſtrumentorum mechanicorum faciliùs deſcribantur, quædam difficiliùs, id non facit ut illæ magis, hæ minùs ſint geometricæ: ejuſmodi enim mechanicæ deſcriptiones praxim reſpiciunt, & ad ſenſus externos referuntur, non autem ad puram Geometriam, quæ, ut ſæpè diximus, ſolum reſpicit intellectum.

Quòd etiam ex iisdem lineis aut superficiebus, quædam simpliciores, quædam verò magis compositæ intellectui videantur; id etiam non impedit quin hæ & illæ æquè geometricæ dici debeant; quippe illud non ex natura talium magnitudinum, sed ex debilitate intellectus humani procedere manifestum est: ex nostra autem imperfectione rerum natura non immutatur.

Demus itaque hoc humanæ imbecillitati, quòd quæ simpliciori modo, saltem nostro respectu, solvi poterunt, eo solvi debeant; & contra talem regulam peccasse censeatur quisquis, cùm simpliciori loco uti posset, ad magis compositum recurrerit. Dicemus autem paulò pòst de distinctione locorum in magis aut minùs simplices ex constitutione Geometrarum qui nos hac in re præcesserunt, ut sic quis cuique quæstioni locus proprius sit innotescat.

Sed ut magis elucescat in hac materia locorum, nec facilitatem descriptionis, nec majorem aut minorem simplicitatem intellectionis alio modo attendendam esse quàm respectu imbecillitatis intellectus humani: videamus quis sit Geometriæ finis in locis ipsis constituendis. Constat autem nullum alium finem apud Geometras reperiri, nisi ut talium locorum beneficio ea detegant quæ intellectui latebant, ut quod verum est, verum esse; quod falsum est, falsum esse; quod fieri potest, fieri posse, & quo modo, & quot modis, manifestum fiat, idque semper in materia geometrica; quod tamen non impedit ne talis cognitio posteà materiæ sensibili applicetur. Ac planè ejusmodi loci primò & per se quædam sunt cognoscendi instrumenta; secundariò verò, & per applicationem mechanicam, illi sunt instrumenta faciendi. Et quidem, quòd ad cognitionem, scientiam, vel intelligentiam attinet, sive illa faciliùs, sive difficiliùs acquiratur, & sive per media simplicia, sive per compo-

ſita, modò talia media ſint clarè ac diſtinctè nota, qualia ſunt quæ principiis purè geometricis innituntur, ita ut ab ejuſmodi principiis incipiendo, & per media ipſa progrediendo, tandem ad intelligentiam illam deveniamus: certùm eſt eandem fore perfectam, nec in genere intelligentiarum aut ſcientiarum, perfectiorem fore aliam, quamquam facilioribus aut ſimplicioribus mediis acquiſitam. Atque omninò una eademque intelligentia ſeu ſcientia eſt, ſed diverſis mediis acquiſita; quæ media, ſi faciliora aut ſimpliciora ſint, vel ſecùs, hoc ex debilitate intellectus humani repetendum eſt; aliàs enim, ſi perfecta eſſet humana intelligendi potentia, tunc vel mediis non egeremus, vel certè & principia cognitionis, & media omnia, ſed & ipſam cognitionem uno intuitu, nullo prorsùs labore nullaque difficultate haberemus, nec ſimplicis aut compoſiti ulla eſſet ratio.

Jam verò, ſi ad materiam ſenſibilem, ſeu ad praxim mechanicam applicetur cognitio aliqua geometrica, ita ut inde oriatur opus aliquod externum ex tali materia conſtans, multò minùs media aut operandi rationem accuſabimus in ipſo opere jam confecto, ſi illud his aut illis mediis æque benè abſolutum ſit; nec ullo jure tali reſpectu quis dixerit hæc aut illa media eſſe reſpuenda tanquam erronea ac minimè legitima, ſed tantùm alia aliis eſſe præferenda; quippe faciliora difficilioribus, & ſimpliciora magis compoſitis: quod ſanè ex noſtra agendi debilitate rursùs repetendum eſt; ſecus enim, poſitâ perfectâ agendi potentiâ, tunc agens & media & opus ipſum nullo labore conſequeretur, ac proinde nec facilitatis nec difficultatis, ſicuti nec ſimplicioris nec magis compoſiti ratio haberetur.

Propositum locum geometricum ad æquationem analyticam revocare; & qui simpliciores sint loci, aut secùs, explicare.

DICITUR locus aliquis geometricus ad æquationem analyticam revocari, cùm ex una aliqua, vel ex pluribus ex illius proprietatibus specificis, quædam deducitur æquatio analytica, in qua una vel duæ vel tres ad summum sint magnitudines incognitæ.

Ac duplici quidem modo talis locus ad talem æquationem revocari potest. Primus modus absolutus est, alter respectivus.

Modus absolutus dicitur ille in quo unicus proponitur locus per se absolutè ac nullo aliorum respectu considerandus, ita ut æquatio ex eo deducta ad ipsum præcisè pertineat, non verò ad ullum alium.

Modus respectivus ille est in quo duo communiter, aliquando etiam, sed rarò, tres vel plures loci proponuntur inter se comparandi, ut ex eorum sectione, vel tactione, vel datâ aliquâ distantiâ, vel omninò ex præscripta aliqua conditione, vel inter ipsos habitudine deducatur æquatio aliqua analytica quæ ad omnes istos locos simul tali respectu pertineat; ita tamen ut nihil referat si æquatio illa ad alios etiam locos pertinere possit.

Et hi quidem modi ambo admodum universales sunt, continentque sub se singuli infinitos particulares modos, non solùm habita ratione multitudinis locorum geometricorum qui & genere, & specie, & numero infiniti sunt, sed etiam in unico ex talibus locis dantur plerumque innumeri tales modi, ex quorum singulis innumeræ æquationes deduci possunt; siquidem tot dabuntur modi particulares, quot dabuntur diversæ loci illius proprietates specificæ: unde numerus talium modorum

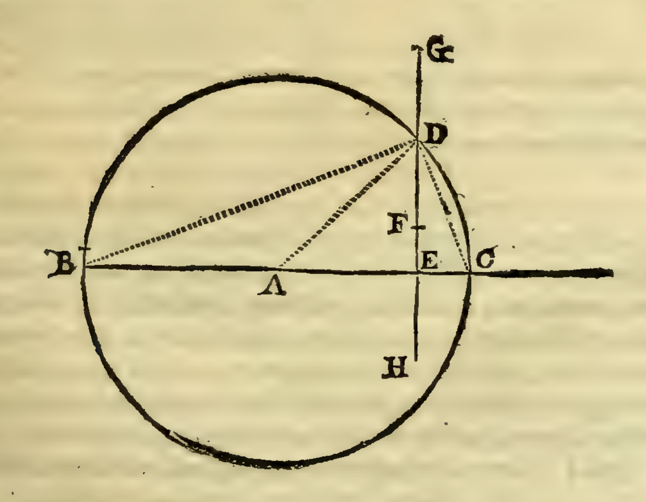
non magis finitus eſt, quàm artificis in indagandis proprietatibus vis & induſtria; ſed & ex infinita locorum ipſorum complicatione, id eſt, ſectione, tactione, &c. innumeri etiam oriuntur modi reſpectivi, ſiquidem duorum tantùm diverſimodè complicatorum modi nullo certo aliquo numero comprehendi poſſunt.

At verò, etiamſi nullus ex talibus modis ad noſtrum inſtitutum inutilis dici poſſit, ſi ſcilicet ad abundantiam doctrinæ reſpiciamus: tamen ſi neceſſitatis tantùm ratio habeatur, pauciſſimi ſufficiunt, iique non admodùm intricati aut difficiles exiſtunt.

Dicamus ergo pauca, primùm de modo abſoluto, tum de reſpectivo, atque utrumque, ſelectis aliquibus exemplis ex locis nobilioribus deſumptis, illuſtremus.

DE CIRCULO.

PROPONATUR ergo primùm circulus cujus centrum ſit A, circumferentia BDC, & ſit una dia-



metrorum BC, ad quam referre oporteat omnia circumferentiæ puncta, mediante aliqua æquatione analytica; ac fundamentum hujus relationis esto proprietas illa, quòd omnis recta, putà DE, cadens à circumferentia in diametrum ad rectos angulos, sit media proportionalis inter portiones diametri BE, EC; hæc ergo proprietas specifica dabit unum aliquem ex modis particularibus circa circulum. Ex illo modo innumeræ deducentur æquationes, quales sunt quæ sequuntur.

Prima Æquatio.

AB esto	b,	Item AB esto	b,
DE	a,	DE	a,
DE quadratum	a^2,	DE quadratum	a^2,
BE	e,	CE	e,
EC	$2b - e$,	BE	$2b - e$,
BEC rectang.	$2be - e^2$.	BEC rectang.	$2be - e^2$.

Ergo æquatio,

$$+ 2be - e^2 \propto a^2,$$

vel

$$+ 2be - e^2 - a^2 \propto 0.$$

Unde æquatio erit ut suprà,

$$+ 2be - e^2 - a^2 \propto 0.$$

Itaque propositâ lineâ curvâ BDC, atque ab eadem in aliquam rectam utrinque terminatam BC, demissâ perpendiculari DE; si talis reperiatur æquatio qualem jam invenimus: tum pronuntiare licebit ejusmodi curvam esse circuli circumferentiam; est enim reciproca proprietas, & simpliciter converti potest quæ de illa concipitur propositio, ut satis facilè consideranti apparebit. Omnis autem recta data referre poterit $2b$.

Quòd si loco circumferentiæ circuli assumpta esset ellipsis; tum sub iisdem speciebus, $2be - e^2$ fuisset ad a^2

in data ratione majoris aut minoris inæqualitatis, nempe ut transversum latus ad rectum, quam rationem supponimus esse datam. Conversa etiam vera est.

Rursùs, si DE in BC incidisset ad angulos obliquos, reliquis ut suprà positis, in omni ratione haberetur ellipsis. Sed hæc ex conicis clara sunt.

Secunda Æquatio.

Iisdem positis: ex DE detrahatur data EF quæ vocetur c, & DF vocetur i, atque ideò DE quadratum erit $+c^2+2ci+i^2$. Unde iisdem vestigiis insistendo, talis erit æquatio, $+2be-e^2 \propto c^2+2ci+i^2$, vel $-c^2 \begin{array}{l} +2be-e^2 \\ -2ci-i^2 \end{array} \propto o$.

Itaque ex tali vel simili æquatione concludemus circuli circumferentiam: immò, si $+c^2+2ci+i^2$ vocetur una specie a^2; (species enim illa de i quadrata est) tunc in primam æquationem omninò incidemus, ut manifestum est. Vicissim, facile erit ex prima in hanc secundam devenire.

De ellipsi eadem quæ suprà enuntiabimus.

Hæc æquatio non est reciproca, unde eam in ordinem non reduximus; siquidem ex illa non minùs ellipsim, parabolam, aut hyperbolam, quàm circulum concludere licet: quod etiam infrà satis patebit.

At verò ad tales æquationes reducetur alia quæ sequitur $+2be-u^2 \propto o$, intelligatur enim u^2 majus esse quàm e^2 & differentia eorum vocetur a^2. Fiet ergo manifestò hæc æquatio $+2be-e^2-a^2 \propto o$, & hæc est prima præcedentium, ex qua ad secundam facilè deducemur. Hîc autem longitudo u æqualis erit rectæ BD, vel CD, cujus quadratum æquale est, vel duobus quadratis BE, DE simul, vel duobus CE, DE simul, quandoquidem ipsum u^2 æquale ponitur esse duobus simul a^2+e^2.

Tertia Æquatio.

Iisdem positis, eidem DE addatur in directum quævis DG; & tota EG data sit sub specie c, & DG ignota vocetur i; atque ideò DE quadratum erit $c^2 - 2ci + i^2$. Unde iisdem vestigiis, $+ 2be - e^2 \propto c^2 - 2ci + i^2$, vel per antithesim, $-c^2 \begin{matrix} + 2be - e^2 \\ + 2ci - i^2 \end{matrix} \propto o.$

Ex tali ergo vel simili æquatione concludemus circulum.

Quòd si recta DG sit data sub specie c, & EG ignota vocetur i: tunc iisdem vestigiis in eandem prorsùs æquationem incidemus. Idem accidet, si DE producatur versùs E in H, & vel tota DH sit c, EH autem sit i, vel è contrario, EH sit c, DH autem sit i.

Jam, vel $c - i$, vel $i - c$ esto a; quo pacto dabitur prima æquatio, ut manifestum est.

Sicut autem secta est DE in F, vel producta in G vel H: sic potuit secari vel produci CE, & vel ipsâ solâ manente DE insectâ & sine productione, vel etiam utraque tam CE quàm DE; quod satis per se atque ex præmissis clarum est. Idem de BE quàm de CE dictum esto.

Quarta Æquatio: ex eo quòd omnes rectæ à centro circuli ad ejus circumferentiam ductæ, sint æquales.

Iisdem positis, esto AE ignota sub specie y; & quoniam AD seu AB est b, & DE est a, ideò talis erit æquatio, $b^2 \propto a^2 + y^2$, sive $b^2 - a^2 - y^2 \propto o$. Itaque, ex ejusmodi æquatione concludemus circulum, quia illa reciproca est.

Jam verò, ut suprà, esto a æqualis, vel $c + i$, vel $c - i$, vel

vel $i - c$, prout ſcilicet vel EF erit c, & DF erit i; vel EG erit c, & DG erit i; vel DG erit c; & EG erit i: tumque habebimus alterutram ex duabus ſequentibus æquationibus

$$\begin{matrix} +b^2 \\ -c^2 \end{matrix} - 2ci \begin{matrix} -i^2 \\ -y^2 \end{matrix} \infty\ o, \text{ vel } \begin{matrix} +b^2 \\ -c^2 \end{matrix} + 2ci \begin{matrix} -i^2 \\ -y^2 \end{matrix} \infty\ o:$$

ex quibus circulum quoque concludere licet, modò ſub ſimilibus ſpeciebus proponantur; ſic enim illæ ſunt reciprocæ, ſeu ſpecificæ.

Eodem modo hîc AE ſecari vel produci poterit quo ſuprà dictum eſt de ED, BE, vel CE.

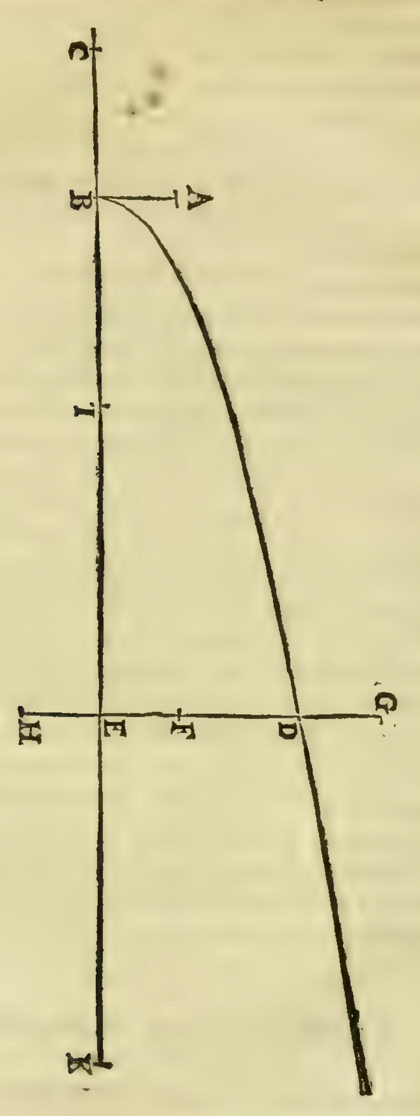
Quòd ſi proponatur aliqua ex his tribus $+d^2 - fi - u^2 \infty\ o$, vel $+d^2 + fi - u^2 \infty\ o$, vel $-d^2 + fi - u^2 \infty\ o$: tunc licebit illas ad alterutram ex duabus præmiſſis poſtremis reducere. Nam $+d^2$ intelligetur æquale eſſe $\begin{matrix} +b^2 \\ -c^2 \end{matrix}$, vel $-d^2$ æquabimus $\begin{matrix} +b^2 \\ -c^2 \end{matrix}$; at $+u^2$ ponemus æquale eſſe $\begin{matrix} +i^2 \\ +y^2 \end{matrix}$: unde ſequetur id quod propoſitum eſt.

Non ſunt tamen illæ tres reciprocæ; ſiquidem ex illis non minùs ellipſim, parabolam, aut hyperbolam, quàm circulum concludere licet. Licebit autem quartam hanc æquationem ad primam aut ad duas ſequentes reducere, poſito quòd $b - y$ ſit e, ut ſatis patebit ei qui attendere voluerit. Et reciprocè, tres priores poterunt ad quartam reduci, poſito quòd $b - e$ ſit y.

Hæc de circulo ad æquationem analyticam reducto, pauca quidem, ſed ea præcipua ſufficiant. Nunc pauca etiam de parabola dicamus.

De Parabola.

Esto parabola BD, cujus latus rectum ſit AB, diameter BE, ſive illa ſit axis, ſive non; atque ad hanc diametrum ordinatim applicata ſit DE. Oporteat


C
B
A
I
G
D
F
E
H
K

autem omnia parabolæ puncta referre ad diametrum BE, mediante aliquâ æquatione analyticâ, ac fundamentum relationis esto proprietas illa, quòd quadratum applicatæ cujusvis, putà DE, æquale sit rectangulo contento sub latere recto AB & sub BE portione diametri interceptâ inter verticem B & ordinatam DE; quæ proprietas parabolæ specifica est, dabitque modum unum particularem ex quo multæ deducentur æquationes, quales sunt quæ sequuntur.

Prima Æquatio.

AB esto	b,
DE	a,
DE quadratum	a^2,
BE	e,
ABE rectangulum	be.

Æquatio,

$be \propto a^2$,

vel

$be - a^2 \propto o$.

Itaque, propositâ curvâ aliquâ BD, atque in ea sumpto quovis puncto D; tum ductâ quâpiam rectâ BE quæ ad unas quidem partes B terminetur ad eandem curvam, ad alteras autem partes sit indefinita: si ducta recta DE datæ cuipiam rectæ terminatæ AB parallela, media proportionalis sit inter AB, BE: pronuntiabimus curvam illam esse parabolam. Est enim reciproca proprietas, ex vi hypothesis, quòd DE sit semper datæ parallela; aliàs enim posset æquatio præmissa circulum exhibere, ut notatum est ad secundam circuli æquationem, dum proposita est æquatio $2be - a^2 \propto o$. Hoc autem planè manifestum est.

Secunda & tertia Æquatio.

Nec aliter habebuntur secunda & tertia æquatio, quàm in circulo dictum est, divisâ scilicet DE in F, aut

eâdem productâ in G vel H; quo pacto talis erit secunda æquatio $be \infty c^2 + 2ci + i^2$, vel $- c^2 + be - 2ci - i^2 \infty o$, atque id ex divisa DE.

Tertia autem æquatio ex DE productâ talis erit $be \infty + c^2 - 2ci + i^2$, vel $- c^2 + be + 2ci - i^2 \infty o$.

Et hæ quidem omnes æquationes sub speciebus exhibitis sunt reciprocæ, existente rectâ DE datæ alicui rectæ semper parallelâ; unde ex quavis illarum parabolam concludere semper licebit, speciebus tamen immutatis.

Quòd si recta BE dividatur in I, vel eadem producatur, sive versùs B in C, sive versùs E in K, reliquis eodem modo quo suprà positis, multæ inde orientur æquationes, quædam scilicet manente DE indivisa ac sine productione, reliquæ autem ipsâ DE divisâ vel productâ. In exemplo enim esto BE divisa, ac BI esto data sub specie d, IE autem esto y; unde rectangulum sub AB, BE, quia æquale est duobus simul, ei scilicet quod continetur sub AB, BI, & ei quod continetur sub AB, IE, talem induet speciem $bd + by$: itaque positâ DE indivisâ sub specie a, talis erit æquatio $bd + by \infty a^2$, vel $bd + by - a^2 \infty o$. At positâ DE divisâ sub specie $c + i$, æquatio erit ejusmodi $bd + by \infty c^2 + 2ci + i^2$; vel $bd - c^2 + by - 2ci - i^2 \infty o$. Quod si CB sit data sub specie d, CE autem sit y, erit ipsius BE species $y - d$: contrà autem, si CE sit d, & CB sit y, erit ipsius BE species $d - y$; hinc autem facile erit reliquas æquationes deducere, atque ex singulis, sub iisdem speciebus, parabolam concludere.

Ad prædictas autem æquationes reduci poterunt quæcunque ad circulum suprà, tam directè quàm indirectè pertinebant, si species debitè atque ex arte permutentur: at propter talem permutationem, æquationes illæ erunt

reciprocæ. Sed hoc indicasse sufficiat; nunc ad hyperbolam progrediamur.

DE HYPERBOLA.

EX infinitis modis quibus hyperbola aliqua ad rectam quandam referri potest, duo videntur præcipui : alter quidem, cùm illa ad aliquam ex suis diametris refertur; alter autem, cùm illa refertur ad unam ex suis asymptotis.

Esto hyperbola BD, cujus vertex sit B, rectum latus AB, transversum BC, centrum L in medio ipsius BC, cæteris ut suprà in parabola positis. (Vide figuram parabolæ, & finge esse hyberbolam) nisi quod distinctionis gratiâ, species transversi lateris hîc erit f, unde CEB rectanguli species erit $fe + e^2$. Est autem in omni hyperbola tale rectangulum ad quadratum cujusvis ordinatæ DE ut transversum latus ad rectum : in speciebus ergo, ut f ad b, ita $fe + e^2$ ad a^2. Ductis itaque extremis inter se, tum etiam mediis inter se, fiet æquatio universalis ad omnem hyperbolam pertinens.

Prima Æquatio.

$bfe + be^2 \propto fa^2$, sive $bfe + be^2 - fa^2 \propto 0$.

Ex tali igitur æquatione concludemus hyperbolam cujus latus rectum erit b, & transversum f, existente a ordinatâ ad diametrum, e verò intercepta inter ordinatam & verticem, sive diameter sit axis, sive non, prout angulus ad E rectus erit vel obliquus.

Secunda Æquatio.

Secunda æquatio ex divisa DE in F, ita ut species

rectæ DE ſit $c + i$, talis erit, $bfe + be^2 \infty fc^2 + 2cfi + fi^2$, ſive $- fc^2 + bfe + be^2 - 2cfi - fi^2 \infty o$.

Tertia Æquatio.

Tertia æquatio ex DE productâ in G vel H, ita ut ſpecies ipſius DE ſit $c - i$, vel $i - c$, talis erit $bfe + be^2 \infty fc^2 - 2cfi + fi^2$, ſive $- fc^2 + bfe + be^2 + 2cfi - fi^2 \infty o$.

Poterit autem non tantùm recta BE, ſed etiam recta DE, vel utraque dividi, vel produci; unde multæ naſcentur æquationes magis intricatæ, quas, quia vix utiles eſſe poſſunt, curioſo Analyſtæ relinquimus.

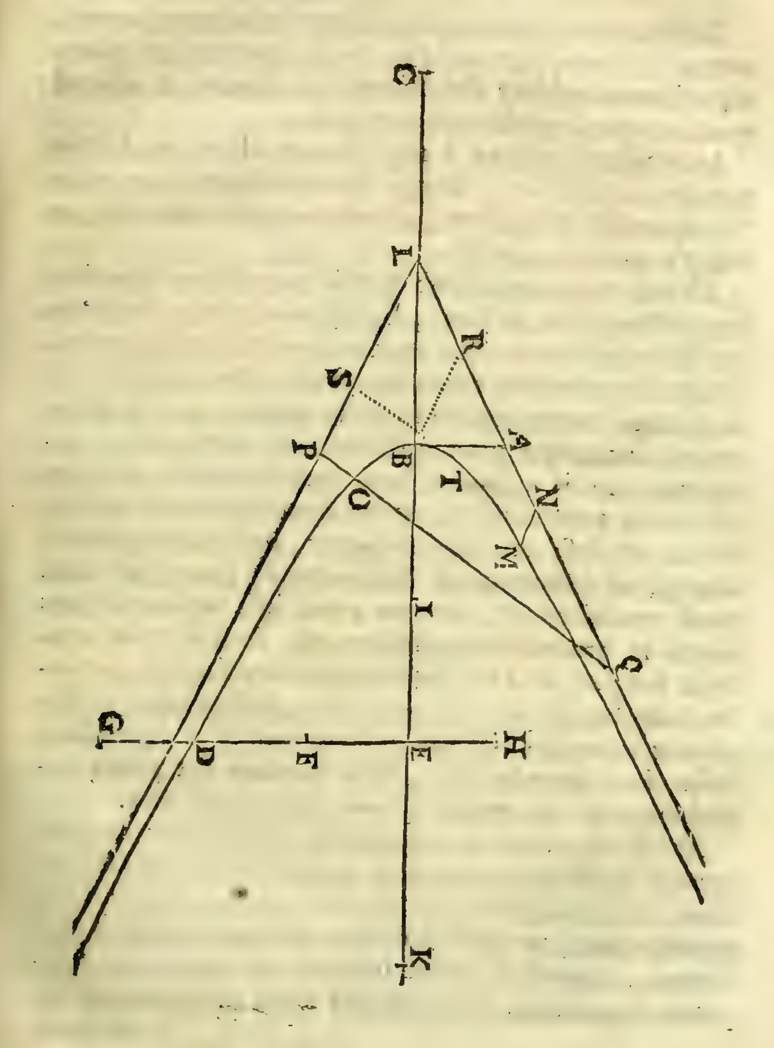
Quarta Æquatio.

Speciatim verò reſumamus primam hyperbolæ æquationem, putà $bfe + be^2 - fa^2 \infty o$, & ponamus tranſverſum latus f æquale eſſe lateri recto b, quod accidit in quacunque hyperbola cujus aſymptoti ſunt ad angulos rectos. Itaque diviſâ æquatione per f vel b, fiet hæc æquatio ſimplicior, $be + e^2 - a^2 \infty o$, vel $fe + e^2 - a^2 \infty o$.

Ex tali ergo æquatione concludere licebit hyperbolam rectangulam, cujus latus rectum erit b, ordinata a, ſive ad axem, ſive ad aliam quamcunque diametrum, & latus tranſverſum erit f æquale ipſi b, e autem erit quævis intercepta inter applicatam ſeu ordinatam & verticem.

At ex hac ſpeciali ac ſimplici æquatione multæ aliæ deduci poſſunt, ſi ſcilicet dividatur DE in F, vel ipſa DE producatur in G vel H, vel ſi BE dividatur in I, aut ipſa eadem BE producatur in K vel in L; vel rur-

sùs, si utraque tam DE quàm BE dividatur aut producatur, vel denique multis aliis modis, pro majori & majori Analystæ sagacitate.



Quinta Æquatio.

Resumamus adhuc primam hyperbolæ æquationem, nempe $bfe + be^2 - fa^2 \propto o$, oporteatque talem æquationem reddere simplicem, ita tamen ut illa ad quamcunque hyperbolam pertineat.

Intelligatur esse ut b ad f, ita a^2 ad u^2, unde fa^2 æquale erit ipsi bu^2. Itaque in æquatione, loco ipsius fa^2 succedat ipsum bu^2, & omnia applicentur ad b, ac tum $fe + e^2 - u^2 \propto o$.

Ex tali ergo æquatione licebit non solum hyperbolam rectangulam, ut suprà, directè concludere, sed etiam per fictionem poterimus eandem æquationem ad quamcunque hyperbolam extendere, cujus latus transversum sit f, latus autem rectum sit recta quævis, & e sit quæcunque intercepta inter ordinatam & verticem; at ordinata non erit u (nisi si latus rectum æquale ponatur esse lateri transverso f, ut fiat hyperbola rectangula.) Verùm ut ipsa ordinata habeatur, fiet ut transversum latus f, ad rectum quod vocabimus b, ita u^2 ad aliud quod vocabitur a^2, ac tum a erit ipsa ordinata: hoc autem ex præmissis manifestum est. Ex tali enim analogia fiet $fa^2 \propto bu^2$: at in æquatione simplici proposita habemus $fe + e^2 - u^2 \propto o$; quibus per b multiplicatis invenitur $bfe + be^2 - bu^2 \propto o$. Jam loco ipsius bu^2 succedat fa^2, & sic tandem fiet prima hyperbolæ æquatio nempe $bfe + be^2 - fa^2 \propto o$.

Porrò ad prædictas æquationes reduci poterunt quæcunque suprà ad circulum & ad parabolam directè aut indirectè pertinebant, si species debitè atque ex arte permutentur, ut convenientem sortiantur interpretationem: at propter talem mutationem non erunt reciprocæ æquationes illæ; omninò enim nulla æquatio re-

ciproca eſt, niſi ſub iiſdem omninò ſpeciebus ſub quibus illa ad locum aliquem directè pertinet.

In analyſi ſpecioſa communiter liberum eſt ex infinitis hyperbolarum ſpeciebus eam eligere quam libuerit: quo ſanè caſu præſtabit rectangulam aſſumere, propter illius majorem ſimplicitatem. Aliquando etiam ſectio ipſa ex hypotheſi data eſt, ſed raró, putà cum beneficio analyſeos quæritur aliqua ejuſdem ſectionis proprietas, ut ſi quis ex dato puncto extra axem datæ ſectionis, minimam rectam quæ ad ipſam ſectionem duci poſſit inquirat, incidet ille in æquationem ſolidam quæ ſolvi poterit beneficio circuli & hyperbolæ, ita ut vel circulus quivis, vel quæcunque hyperbola ad arbitrium eligi poſſit. Eligetur ergo ipſa hyperbola data, cui circulus conveniens ex arte accommodabitur: aliàs enim peccatum multi exiſtimarent, ſi neglectâ ipsâ hyperbolâ datâ, aſſumeretur vel alia hyperbola vel parabola vel ellipſis, ut liberum eſt in omni æquatione ſolida; at hunc rigorem, ut elegantiorem, concedimus, ſic non omninò neceſſarium exiſtimamus, propter rationes ſuprà allatas, cùm quid geometricum cenſeri debeat examinaremus.

Sexta Æquatio.

Iiſdem poſitis, ſunto hyperbolæ aſymptoti LN, LP ad angulum quemcunque; atque ex vertice B ducatur recta BR parallela uni aſymptoton LD, quæ BR occurat alteri aſymptoton LN in puncto R. Itaque, ex hypotheſi quòd data ſit hyperbola, data quoque erit utraque LR, RB, unde & rectangulum ſub ipſis datum eſt, ſit ſpecies illius b^2. Tum ſumpto in hyperbola quocunque puncto M, ducatur recta MN parallela cuivis aſymptoto, putà LP, occurrenſque alteri LN in puncto N; atque ſpecies rectæ LN eſto a, ſpecies autem rectæ

Vide Figur. ſequentem.

NM esto e. Quoniam itaque ex natura hyperbolæ, rectangulum sub LR, RB æquale est rectangulo sub LN, NM; dabitur hæc æquatio hyperbolarum generi propria seu specifica $b^2 \infty ae$, seu $b^2 - ae \infty o$.

Ex tali ergo æquatione semper hyperbolam concludere licebit, cujus b^2 erit rectangulum sub LR, RB, at a erit quævis portio unius asymptotωn, putà LN ad centrum terminata, e verò recta intercepta inter hyperbolam & alterum ipsius speciei a extremum, quæ tamen recta e alteri asymptoto parallela existet, putà asymptoto LP existente e ipsâ rectâ MN.

Quòd si recta LN dividatur vel producatur, ut species illius sit vel $c + i$, vel $c - i$, vel $i - c$, manente NM indivisâ; aut si hæc NM dividatur vel producatur, ut species illius sit $d + u$, vel $d - u$, vel $u - d$ manente LN indivisâ, aut si utraque LN, NM dividatur, aut utraque producatur, aut denique altera earum dividatur, altera producatur: habebuntur inde multæ æquationes inventu faciles, atque omni hyperbolæ specificæ; unde ex qualibet illarum hyperbolam concludere licebit.

Apparet quoque tales æquationes ad quamcunque hyperbolam posse pertinere, nisi aut angulus asymptotωn datus sit, aut rectum latus, aut transversum, aut alia quædam proprietas, quæ cum dato b^2, hyperbolæ ipsius speciem determinare possit.

Septima Æquatio.

Iisdem adhuc positis, ducatur quæcunque recta POQ secans hyperbolam in O, asymptotos autem in P & Q; atque illi PQ parallela existat TS tangens hyperbolam in T, occurrensque alteri asymptotωn, putà LP in S; & data sit positione & magnitudine ipsa TS, cujus species

sit b, ex hypothesi quod hyperbolæ [illegible] quoque [illegible] datæ; sit etiam recta OP species a, erit [illegible] OQ [illegible]. Omnium [illegible] [illegible] hyperbolæ, productum [illegible] OQ [illegible] est quadratum [illegible] 15; [illegible] in hyperbola [illegible] propria [illegible], seu b [illegible] — $a e \propto o$.

In tali ergo æquatione, valores suos [illegible] in [illegible] concludere licebit, atque id cum divisis [illegible] PO, OQ, quàm iisdem productis.

De Ellipsi.

IN ellipsi præcipuæ æquationes non multùm differunt á tribus circuli prioribus [illegible] æquationibus, ut ibi monuimus. Omninò autem [illegible] modo se habet circulus ad ellipses, quo hyperbolæ rectangula ad alias hyperbolas [illegible] ergo in tali hyperbola rectangula æquatio [illegible] fuit, quæ respectu totius generis hyperbolarum [illegible] composita extitit, sic in circulo, prædicta [illegible] æquationes [illegible], quæ in genere ellipsium [illegible] compositæ. At illud hic [illegible] exponamus.

Prima Æquatio.

Esto ellipsis BDC, cujus vertex B, rectum latus AB, diameter BE, sive illa sit axis sive non, DE ordinatim ad illam diametrum, cui parallela sit AG [illegible] autem ipsius AB [illegible] [illegible] tandem [illegible] y — [illegible]. At in [illegible] ellipsi [illegible] diametri [illegible] rectum AB [illegible] ad [illegible] itaque in [illegible] [illegible] æquatio [illegible]

ſit b, ex hypotheſi quòd hyperbola ſit quoque data; ſit etiam rectæ OP ſpecies a, rectæ verò OQ ſpecies eſto e. Quoniam itaque ex natura hyperbolæ, rectangulum POQ æquale eſt quadrato tangentis TS, fiet hæc æquatio hyperbolarum generi propria ſeu ſpecifica $b^2 \infty ae$, ſeu $b^2 - ae \infty o$.

Ex tali ergo æquatione, eadem quæ ſuprà in ſexta concludere licebit, atque id tam diviſis ipſis PO, OQ, quàm iiſdem productis.

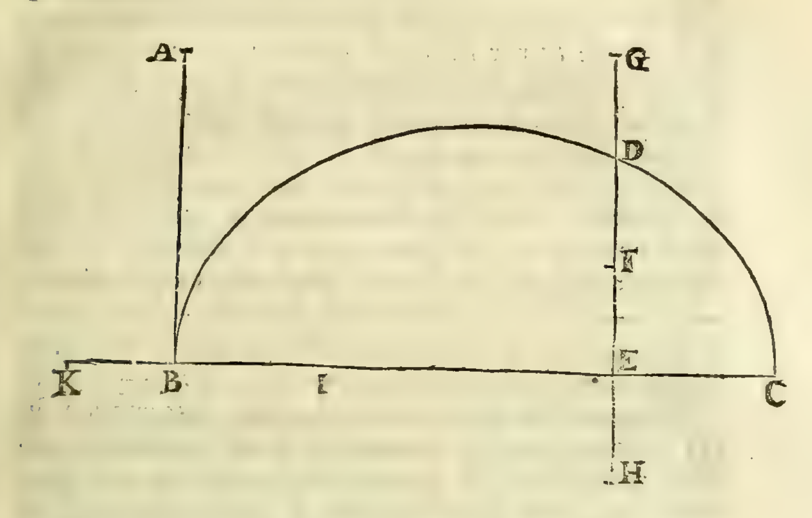
DE ELLIPSI.

IN ellipſi præcipuæ æquationes non multùm differunt à tribus circuli prioribus æquationibus, ut ibi monuimus. Omninò autem, non alio modo ſe habet circulus ad ellipſes, quo hyperbola rectangula ad alias hyperbolas minimè rectangulas. Sicuti ergo in tali hyperbola rectangula æquatio ſimplex fuit, quæ reſpectu totius generis hyperbolarum compoſita extitit, ſic in circulo, prædictæ priores tres æquationes ſimplices fuêre, quæ in genere ellipſium fient compoſitæ. At illud hîc breviter exponamus.

Prima Æquatio.

Eſto ellipſis BD, cujus vertex B, rectum latus AB, diameter BC, ſive illa ſit axis ſive non, DE ordinata ad illam diametrum, cui parallela ſit AB;. ſpecies auautem ipſius AB eſto b; ipſius BC, f; ipſius DE, a; ac tandem ipſius BE, e: unde rectanguli CEB ſpecies erit $fe - e^2$. At in omni ellipſi, ut diameter BC ad latus rectum AB, ita rectangulum CEB ad quadratum DE; itaque in ſpeciebus, ut f ad b, ita $fe - e^2$ ad a^2: hinc æquatio $bfe - be^2 \infty fa^2$, ſive $bfe - be^2 - fa^2 \infty o$.

Poterit autem vel recta BE, vel recta DE, vel utraque dividi vel produci; unde multæ naſcentur æquationes inventu non admodum difficiles; ſed id indicaſſe ſufficiat.



Ex ejuſmodi ergo æquationibus ſemper ellipſim concludere licebit, cujus latus rectum erit b, diameter f, ordinata ad diametrum a, vel quæcunque ipſam a in æquatione referet, ac tandem intercepta inter ordinatam & verticem erit e, vel quæcunque ipſam e in æquatione referet. Immò, dabitur quoque ipſius ellipſis ſpecies, ex hypotheſi quòd angulus ABC vel DEC datus ſit; ſi tamen angulus ille rectus eſſet, & rectæ b & f æquales, loco ellipſis haberemus circulum : quod demonſtrare non erit difficile.

Secunda Æquatio.

Poteſt præmiſſa prima æquatio reddi ſimplicior, ſi fiat ut b ad f, ita a^2 ad u^2; unde $fa^2 \propto bu^2$. Itaque

in æquatione illa, loco ipsius fa^2 succedat illi æquale bu^2, ac tum $bfe - be^2 - bu^2 \propto o$: omnia applicentur ad b, fietque æquatio simplex $fe - e^2 - u^2 \propto o$.

Et hæc quidem æquatio directè pertinet ad circulum, at indirectè & per fictionem pertinere poterit ad quamcunque ellipsim, cujus diameter erit f, latus autem rectum erit recta quæcunque; at verò ordinata non erit u, (nisi latus rectum æquale sit ipsi f diametro, & angulus DEC obliquus) sed ut ipsa habeatur ordinata, fiet ut f ad latus rectum quod vocabimus b, ita u^2 ad aliud quod vocetur a^2, ac tum a erit ipsa ordinata; ex tali enim analogia fiet $fa^2 \propto bu^2$: at æquatio simplex erat $fe - e^2 - u^2 \propto o$, quâ in b ductâ, fit $bfe - be^2 - bu^2 \propto o$. Jam loco ipsius bu^2 succedat ipsi æquale fa^2, & sic tandem fiet prima ellipsis æquatio $bfe - be^2 - fa^2 \propto o$.

Ad prædictas æquationes reducentur quæcunque suprà ad circulum, ad parabolam & ad hyperbolam directè pertinebant, si species debitè atque ex arte permutentur, at iis conditionibus de quibus sæpiùs suprà dictum est.

Corollarium.

IN omnibus præmissis æquationibus liquidò constat, quatuor curvas ex quibus illæ deductæ sunt, nempe circuli circumferentiam, parabolam, hyperbolam, & ellipsim ad suas diametros relatas eo modo quo suprà, non transcendere secundum gradum, hoc est quadratum incognitarum magnitudinum a, e, i, u, &c. Quòd si quis easdem ad alias rectas quàm ad ipsas diametros referat, ille rursùs in similes, sive ejusdem gradus æquationes incidet; unde in universum, ex talibus æquationibus aliquam ex ipsis quatuor curvis semper concludere licebit: & hoc sufficit ad omnia loca plana & solida Anti-

quorum invenienda & componenda; si tamen his æquationibus paucæ addantur quæ pertinent ad lineas rectas, dum illæ ad alias rectas referuntur; quæ sanè æquationes ipsum eundem secundum gradum non excedunt; at verò ad hanc inventionem & compositionem requiritur Analysta non vulgaris. Sed hoc etiam indicasse sufficiat: nunc pauca de locis linearibus ad æquationes geometricas absoluto modo revocatis supersunt dicenda, quod nos in conchoïde Nicomedis tantùm exequemur, siquidem illa etiam in sequentibus ad nostrum institutum satis erit, videturque eadem esse locorum omnium linearium simplicissimus.

DE CONCHOÏDE NICOMEDIS.

ETSI multa sint linearum curvarum genera quæ in infinitas species multiplicentur, tamen hac in parte, conchoïdum genus omnia alia genera longissimè, immò infinities infinitè superat. Siquidem nulla datur curva ex quâ infinitæ conchoïdes deduci non possint, atque omnes specie, immò etiam genere differentes; ac prætereà, cujusvis conchoïdis infinitæ rursùs dantur conchoïdes specie ac genere inter se distinctæ, ita ut propositâ quâcunque curvâ putà circuli circumferentiâ, statim ex ea innumeræ conchoïdes deducantur, quæ quamquam genere inter se distinctæ, tamen omnes sint primi cujusdam ordinis; tum ex unaquaque illarum innumeræ rursùs aliæ nascantur generé diversæ, quæ omnes secundi cujusdam ordinis existant, ex quibus singulis eodem modo innumeræ tertii cujusdam ordinis oriuntur; atque ita in infinitum infinities abit talis multiplicatio.

Nos verò ex omnibus illis generibus duo tantùm seligere decrevimus, quæ quamquam simplicissima existant

tant, tamen illa per ſe ſingula ad æquationes analyticas quinti ac ſexti gradus, hoc eſt quadrato-cubicas ac cubo-cubicas ſolvendas ſufficiunt; ita ut beneficio cujuſvis illorum generum poſſit angulus quicunque rectilineus in quinque partes æquales dividi. Horum generum prius erit illud cujus conchoïdes vulgò vocantur à Nicomede earum inventore, ſuntque conchoïdes circulares primi ordinis, de quibus Eutocius in Archimede, necnon alii permulti authores ſcripſere; quandoquidem per medium talis conchoïdis Nicomedes ipſe famoſiſſimum problema de cubo duplicando ſolvere aggreſſus eſt, quamquam ſanè modo non uſque adeò legitimo, cùm tale problema ad lineas ſimpliciores, putà conicas, pertineat: ſolidum enim illud eſt tantùm, at conchoïdes omnes ſunt loci lineares. Alterum duorum generum conchoïdum noſtrarum erit parabolicarum, de quibus primus egiſſe putatur Renatus *des Cartes* in ſua Geometria, qui etiam modo prorsùs legitimo iiſdem uſus eſt ad problemata analytica ſexti gradus ſolvenda, ad quem gradum illa quoque aſcendere cogit quæ ſunt quinti gradus; quod ſanè ei liberum, at non omninò neceſſe fuit, ſed modum quo aliter ab iis ſe expediret, aut non advertit, aut aliqua de cauſa neglexit.

In his duobus conchoïdum generibus hoc notatu dignum accidit, quòd quamquam ſimplicius ſit circulare quàm parabolicum, ſi linearum genitricium ratio habeatur, (ſimplicior enim eſt circuli circumferentia quàm parabola) tamen, cùm ad æquationes ventum fuerit, reperiuntur illæ in conchoïde parabolicâ ſimpliciores quàm in circulari; non quidem ratione gradûs ad quem illæ aſcenderunt, qui in utraque ſuâ naturâ ſextus eſt exiſtente æquatione univerſali, ſed ratione multiplicitatis affectionum, ſeu homogeneorum per ſigna + & — diſtinctorum; at illud magis in ſequentibus patebit.

Cùm

Cùm autem dicimus ejusmodi conchoïdes ad sextum gradum pertinere, hoc intelligendum est dum illæ ad æquationes analyticas revocantur modo respectivo, non autem simplici seu absoluto; quod etiam rursùs infrà clariùs innotescet.

Antequàm ad æquationes accedamus, pauca præmittenda sunt de natura conchoïdum in universum; tum etiam pauca de conchoïde circulari in specie.

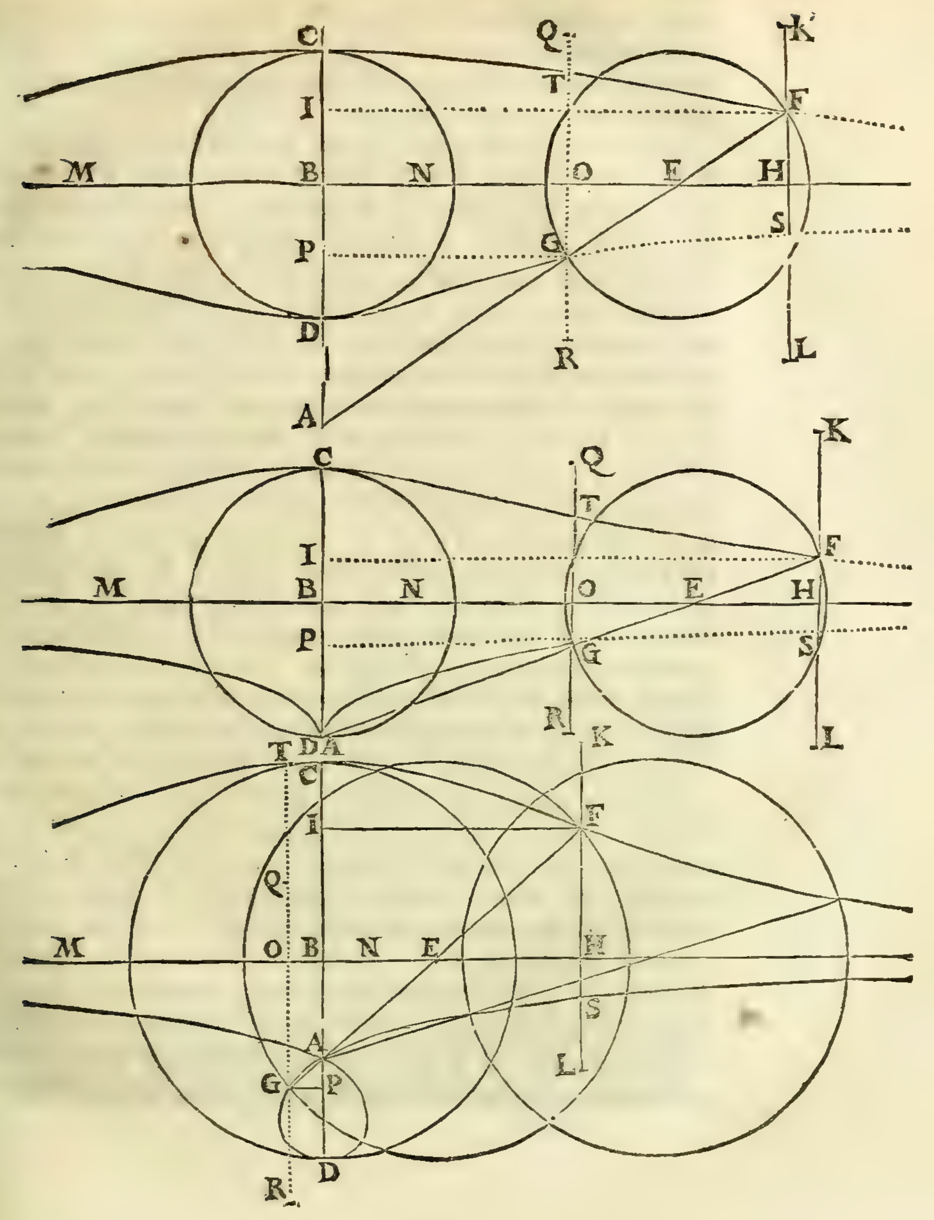
In universum ergo concipiatur quævis linea curva in plano jacens, quod planum moveri possit unà cum eadem curva motu quolibet tam lationis quàm circumvolutionis: hæc linea vocetur genitrix, à qua conchoïs describenda denominabitur, planum verò posteà vocabitur planum mobile: in hoc plano mobili notetur punctum quodcunque intra vel extra genitricem, quod vocetur polus mobilis: per hunc polum transeat quædam linea recta quæ circa talem polum liberè moveri possit, & tamen in ipso plano semper jaceat, ut recta illa sit instar regulæ mobilis quam communiter nomine Arabico vocare solent *alhidadam* in permultis instrumentis; hanc posteà vocabimus regulam. Concipiatur deinde quæcunque linea, recta vel curva, in aliqua superficie jacens, (nos hanc superficiem planam assumimus, quam tamen curvam etiam assumere licebit) quæ superficies, quia immobilis statui debet saltem ad faciliorem intelligentiam, dicatur superficies immobilis; & linea in ea concepta dicatur semita, quandoquidem per illam ac secundùm eandem moveri debet polus plani mobilis, dum planum illud posteà motu lationis secundùm præscriptas leges aliquas deferetur. Prætereà, in superficie immobili extrà semitam, ultrà citràve, notetur punctum quodcunque quod vocetur polus immobilis, circa quem movebitur regula de qua jam dictum est, ita ut eadem per duos polos, mobilem scilicet & immobilem, perpetuò

tranſeat, jaceatque interim ſemper in plano mobili.

His poſitis, ſi ſtatuamus planum mobile cum immobili, ita ut polus mobilis exiſtat in ſemita, & regula per utrumque polum tranſeat, tum moveatur planum mobile ſecundùm certam quandam ac conſtitutam legem, quæ tamen lex ad arbitrium Geometræ initio pendet, modò poſteà illa inviolatam ſervet, polo mobili ſecundùm ſemitam delato, neque ab ea uſquam evagante, notenturque interim puncta in quibus regula genitricem ſecat, ac per omnia illa ſectionum puncta, linea duci intelligatur: hæc erit conchoïs de qua nunc agimus.

Fieri autem poteſt, ac reverà fit ſæpiſſimè, ut in una eademque plani mobilis atque ideò lineæ genitricis poſitione, regula ipſam genitricem in duobus vel pluribus punctis ſecet; unde etiam accidit non rarò, ut conchoïs inde orta non ſit unica linea continua, ſed duplex, triplex, aut multis modis multiplex, ita ut partes illius aliquando, etiam in infinitum productæ, nunquam ſibi invicem occurrant; aliquando, è contrario, illæ partes ſe ſecent, & aliquando eædem ſe tangant tantùm: ſed & illud fieri poteſt, ut aliqua poſitione, regula lineæ genitrici nullo modo occurrat, quo pacto conchoïs non erit ad utramque partem infinitè extenſa, vel certè ipſa erit interrupta, non verò continua. Sed hæc indicaſſe ſufficiat in tam vaga atque multiplici linearum infinitis modis infinitarum deſcriptione.

In ſpecie. Ponamus in aliqua ex tribus his figuris, planum mobile eſſe illud in quo eſt circulus cujus diameter eſt CD vel GF; atque in eo plano lineam genitricem eſſe ejuſdem circuli circumferentiam; polum mobilem eſſe ipſius centrum B vel E, & regulam eſſe rectam AB, vel AE. Ponamus deinde planum immobile eſſe id in quo eſt recta BE in infinitum utrinque producta, quæ recta eadem ſit ſemita per quam feratur


C
Q
K
T
I
F
M
B
N
O
E
H
S
P
G
D
R
L
A
C
Q
K
T
I
F
M
B
N
O
E
H
P
G
S
R
L
T
D
A
K
C
F
I
Q
M
O
B
N
E
H
S
A
L
G
P
D
R

polus mobilis B vel E, atque unà cum ipſo planum mobile deferens circulum CD vel GF, polus verò immobilis in hoc plano immobili eſto A, per quem tranſeat regula AB vel AE.

Manifeſtum eſt ergo, quòd dum centrum circuli, ſive polus mobilis feretur ſecundùm ſemitam BE, regula per hunc polum mobilem ac per immobilem A ſemper tranſiens, poſitionem ſuam continuò mutabit. Jam lex motus eſto, ut planum mobile ſemper inter movendum jaceat ſecundùm ſuam planitiem in plano immobili; hæc enim lex ſola ſufficit ad certam atque indubitatam deſcriptionem. Hoc pacto, quia in quacunque circumferentiæ genitricis poſitione, regula ipſam circumferentiam in duobus punctis, nec pluribus, ſemper ſecat, quorum punctorum unum eſt ad unas partes ſemitæ versùs polum immobilem A, quale eſt punctum D vel G, alterum ad alteras partes ejuſdem ſemitæ, quale eſt C vel F: fit neceſſariò ut conchoïs circularis inde orta componatur ex duabus lineis ad utraſque partes ſemitæ BE exiſtentibus, quarum linearum unaquæque ex utraque parte in infinitum extenditur ſic ut ſemita utriuſque aſymptotos exiſtat. Illæ lineæ in figuris præmiſſis ſunt CTF, DGS, quarum exterior CTF (exteriorem voco eam quæ reſpectu poli immobilis A jacet ad alteras partes ſemitæ BE) circa verticem C, ad aliquam diſtantiam ex utraque parte ipſius verticis, interiùs cava eſt versùs ſemitam BE: eſt autem vertex C punctum id in quo recta AB ad ſemitam BE perpendiculariter producta occurrit ipſi conchoïdi; at ultra talem diſtantiam mutatur cavitas ipſa, fitque ad partes exteriores, convexitas verò reſpicit ſemitam uſque in infinitum. At conchoïs interior DGS, præter id quod de exteriori jam diximus, quibuſdam accidentibus obnoxia eſt, prout recta AB vel

ſemidiametro DB major eſt, vel eidem æqualis, vel ipsâ major; exiſtente enim AB majore quàm DB, idem accidit quod de exteriori jamjam attulimus, quodque in prima trium figurarum ſatis apparet; exiſtentibus verò rectis AB, DB æqualibus, ut in ſecunda figura, tunc conchoïs interior ad punctum A vel D qui vertex eſt, angulum conſtituit quolibet acuto rectilineo minorem, ut ſic conchoïs ex duabus lineis ad verticem AD ſeſe tangentibus componi videatur, quarum utraque ad partes ſemitæ BE ſemper convexa eſt uſque in infinitum. Verùm, exiſtente rectâ AB minore quàm DB, ut in tertia figura, tunc conchoïs inter puncta A, D ita involvitur, ut ſpatium comprehendat laquei inſtar, cujus funiculi poſtquàm ad punctum A decuſſatim ſeſe ſecuerunt, abeunt ex utraque parte in infinitum, ita tamen ut convexitas eorum ad partes ſemitæ BE ſemper reſpiciat.

Sic ergo ſe habet conchoïs circularis Nicomedis. Quòd ſi polus mobilis non ſit centrum circumferentiæ genitricis, ſed quodvis aliud punctum in plano mobili aſſumptum: fient aliæ conchoïdes circulares à prædicta & à ſe invicem diverſæ in infinitum; quod tamen indicaſſe ſufficiat. Sed & ſemita poterit eſſe non recta linea ut BE, verùm alia circuli circumferentia in plano immobili jacens; quo etiam pacto aliæ atque aliæ conchoïdes circulares gignentur, quales habentur apud Vietam in ſupplemento Geometriæ, quamquam ſanè idem, ſicuti de Nicomede diximus, modo non uſque adeo legitimo quàm par fuerat uſus eſt, in ſolvendis ſcilicet problematis ſuâ naturâ ſolidis, cùm conchoïdes illæ ſint loci lineares. Sed hoc rursùs indicaſſe ſufficiat, ut inde poſſit quivis colligere quàm immenſa ſit conchoïdum, etiam circularium, omnium inter ſe ſpecie differentium multitudo; nunc ad æquationes analyticas mo-

do abſoluto, ipſam Nicomedeam revocemus, ut protinùs ad conchoïdem parabolicam deveniamus. Itaque in conchoïde exteriori CTF cujuſvis ex tribus figuris præmiſſis ſunto ſpecies:

AB	b,
BC, EF	c,
FH, BI	a,
FI, BH	e,

Et quoniam ut recta AI ad IF, ita eſt FH ad EH: erit in ſpeciebus,

ut $b + a$ ad e, ita a ad $\frac{ae}{b+a}$

EH $\frac{ae}{b+a}$

EH quadratum $\frac{a^2e^2}{b^2+2ba+a^2}$.

Ponitur autem triangulum EFH eſſe rectangulum. Hinc æqualitas in quadratis laterum,

$$c^2 \propto a^2 + \frac{a^2e^2}{b^2+2ba+a^2}$$

& omnibus in communem diviſorem ductis,

$$b^2c^2 + 2bc^2a + c^2a^2 \propto b^2a^2 + 2ba^3 + a^4 + a^2e^2;$$

vel $b^2c^2 + 2bc^2a \begin{matrix} + c^2a^2 \\ - b^2a^2 \end{matrix} - 2ba^3 - a^4 - a^2e^2 \propto 0$:

unde ex tali æquatione ſub iiſdem ſpeciebus licebit pronuntiare ipſam æquationem ad conchoïdem circularem Nicomedis exteriorem pertinere.

Néque verò in conchoïde interiori DGS magna erit differentia; omnibus enim ritè ordinatis differet æquatio, non quidem speciebus, sed specierum affectionibus secundùm signa + & —, idque in quibusdam affectionibus tantùm, ut ex formula sequenti apparet. Sunto ergo species:

AB esto	b,
BC, EF, EG	c,
GO, BP	a;
GP, BO	e,

Ut $b - a$ ad e, ita a ad $\frac{a e}{b - a}$

OE $\frac{a e}{b - a}$

OE quadratum $\frac{a^2 e^2}{b^2 - 2 b a + a^2}$

Ponitur autem triangulum EOG esse rectangulum. Unde fiet æqualitas in quadratis laterum, nempe

$$c^2 \infty a^2 + \frac{a^2 e^2}{b^2 - 2ba + a^2}$$

& omnibus ductis in communem divisorem,

$$b^2 c^2 - 2 b c^2 a + c^2 a^2 \infty b^2 a^2 - 2 b a^3 + a^4 + a^2 e^2;$$

$$\text{vel } b^2 c^2 - 2 b c^2 a \begin{matrix} + c^2 a^2 \\ - b^2 a^2 \end{matrix} + 2 b a^3 - a^4 - a^2 e^2 \infty 0.$$

Itaque ex ejusmodi æquatione sub iisdem speciebus concludemus conchoïdem circularem Nicomedeam interiorem, ex qua æquatio illa ortum duxerit.

Porrò multis modis, immò innumeris, variari possunt magnitudines ignotæ *a* & *e*; quippe si altera earum vel ambæ datâ magnitudine augeantur vel minuantur, ut factum est suprà in circulo, parabola, hyperbola, & ellipsi. Finge enim productam esse HF in K, ita ut FK data sub specie *d*, HK autem in specie sit *i*: tum verò HF erit in speciebus *i* —— *d* quæ priùs erat *a*; unde loco speciei *a* & graduum ejus in æquatione, substitui poterunt *i*——*d* & gradus ipsius; quo pacto fiet alia quæpiam æquatio à præmissis diversa, ac multò pluribus nominibus constans, quæ sub suis speciebus ad conchoïdem Nicomedis pertinebit. Idem etiam concludemus si FH producatur in L, & ipsius HL species sit *d*, ipsius autem FL species sit *i*, sic enim rursùs HF erit in specie *i* —— *d*, &c. Quòd si iisdem productis, HK vel FL data sit sub specie *d*, & ipsius FK vel HL species sit *i*, erit ipsius FH species *d* ⊣⊢ *i* quæ priùs erat *a*; unde, &c. ut suprà.

Supple punctum V. in figura. Potuit etiam dividi FH in V, ita ut ex duabus portionibus FV, VH, altera, putà VH, data esset sub specie *d*, altera FV ignota sub specie *i*; atque ita ipsius HF species fuisset *d* ⊣⊢ *i* quæ priùs erat *a*; unde, &c. ut suprà.

Nec minùs produci potuit recta FI vel HB in M, vel eadem dividi in N. Sed hoc indicasse sufficiat.

Eodem modo ratiocinabimur de rectis GO & GP vel OB, quo de rectis FH & FI vel HB, ut manifestum est.

Infinitos modos relinquimus, quia prædictos sufficere putavimus, ad hoc ut quivis suopte ingenio quotvis alios ut libuerit, inquirat, & analyticè prosequatur.

Appendix

Appendix ad Isagogen topicam continens solutionem Problematum solidorum per locos.

Patuit methodus quâ lineæ locales deteguntur: inquirendum restat quâ ratione Problematum solidorum solutio possit ex supradictis elegantissimè derivari. Hoc ut fiat, coarctanda illa quantitatum ignotarum extra limites suos evagandi licentia. Infinita enim sunt puncta quibus quæstioni propositæ satisfit in locis: commodissimè igitur per duas æqualitates locales quæstio determinatur, secant quippe se invicem duæ lineæ locales positione datæ, & punctum sectionis positione datum quæstionem ex infinito ad terminos præscriptos adigit. Exemplis breviter & dilucidè res explicatur.

Proponatur *a* cubus + *b* in *a* quadratum æquari *z* plano in *b*.

Commodè utraque æqualitatis pars potest æquari solido *b* in *a* in *e*, ut per divisionem istius solidi, illinc per *a*, hinc per *b* res deducatur ad locos. Cùm igitur *a* cubus + *b* in *a* quadratum æquetur *b* in *a* in *e*; ergo *a* q + *b* in *a* æquabitur *b* in *e*:

Et erit, ut patet ex nostra methodo, extremitas ipsius *e* ad parabolam positione datam.

Deinde cùm *z* p in *b* æquetur *b* in *a* in *e*, ergo *z* p æquabitur *a* in *e*.

Et erit ex nostra methodo extremitas ipsius *e* ad hyperbolam positione datam. Sed jam probavimus esse ad parabolam positione datam. Ergo datur positione, & est facilis ab analysi ad synthesin regressus.

Nec dissimilis est methodus in omnibus æquationibus cubicis. Constitutis enim ex una parte solidis omnibus ab *a* adfectis, ex altera solido omninò dato, vel etiam

cum solidis ab a vel $a\,q$ affectis, poterit fingi æqualitas superiori similis.

Proponatur exemplum in æquationibus quadrato-quadratorum.

$a\,qq + b\,s$ in $a + z\,p$ in $a\,q \infty d\,pp$: ergo $a\,qq \infty d\,pp - b\,s$ in $a - z\,q$ in $a\,q$ æquentur hæc duo homogenea $z\,q$ in $e\,q$.

Cùm igitur $a\,qq$ æquetur $z\,q$ in $e\,q$: ergo per subdivisionem quadraticam, $a\,q$ æquabitur z in e, & erit extremitas E ad parabolam positione datam.

Deinde cùm $d\,pp - b\,s$ in $a - z\,q$ in $a\,q \infty z\,q$ in $e\,q$, omnibus per $z\,q$ divisis,

$$\frac{d\,pp - b\,s \text{ in } a}{z\,q} - a\,q \infty e\,q.$$

Et erit ex nostra methodo extremitas E ad circulum positione datum; sed est & ad parabolam positione datam : ergo datur.

Non dissimili methodo solventur quæstiones omnes quadrato-quadraticæ. Expurgabuntur enim methodo Vietæ cap. 1. de emend. ab affectione sub cubo & quadrato-quadrato ignoto ab una parte, reliquis homogeneis ab altera constitutis, per parabolam, circulum vel hyperbolam solvetur quæstio.

Proponatur ad exemplum inventio duarum mediarum in continua proportione.

Sint duæ rectæ B major, D minor, inter quas duæ mediæ proportionales sunt inveniendæ, fiet a cubus $\infty b\,q$ in d, posito nempe quòd major mediarum ponatur a.

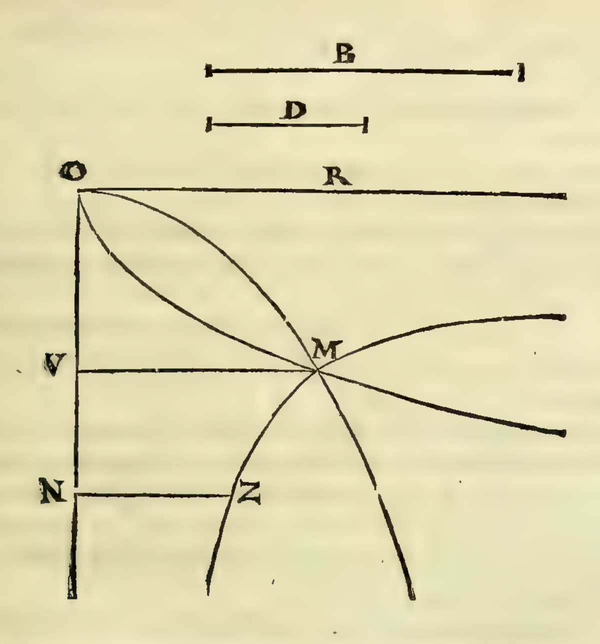
Æquentur singula homogenea b in a in e.

Illinc fiet $a\,q \infty b$ in e.

Istinc a in $e \infty b$ in d.

Ideoque quæstio per hyperbolæ & parabolæ intersectionem perficietur.

Exponatur enim recta quævis positione data OVN in qua detur punctum O. Sint rectæ datæ B & D inter quas duæ mediæ proportionales inveniendæ. Ponatur recta OV æquari *a*, & recta VM ipsi OV ad rectos angulos æquari *e*. Ex priori æqualitate, qua *a* q æquatur *b* in *e*, constat per punctum O tanquam verticem, describendam parabolam cujus rectum latus sit *b*, diameter ipsi VM parallela & applicatæ ipsi OV: transibit igitur hæc parabola per punctum M.



Ex secunda æqualitate quâ *b* in *d* æquatur *a* in *e*, sumatur punctum ubilibet in recta OV, ut N, à quo excitetur perpendicularis NZ, & fiat rectangulum ONZ æquale rectangulo *b* in *d*. Excitetur perpendicularis OR. Circa asymptotos RO, OV describenda hyperbola per-

punctum Z, ex noſtra methodo locali dabitur poſitione, & tranſibit per punctum M. Sed parabola etiam quam ſuprà deſcripſimus datur poſitione, & per idem punctum M tranſit: datur igitur punctum M poſitione, à quo ſi demittatur perpendicularis MV, dabitur punctum V, & recta OV major duarum continuè proportionalium quas quærimus.

Inventæ igitur ſunt duæ mediæ per interſectionem parabolæ & hyperbolæ.

Si ad quadrato-quadrata lubeat quæſtionem extendere, omnia ducantur in a, tunc aqq æquabitur bq in d in a.

Æquentur ſingula homogenea juxta ſuperiorem methodum bq in eq.

Fient duæ æqualitates, nempe aq & b in e.

Et d in a & eq.

Quæ ſingulæ dabunt parabolam poſitione datam. Fiet igitur conſtructio meſolabii per interſectionem duarum parabolarum hoc caſu.

Prior conſtructio & poſterior ſunt apud Eutocium in Archimede, & huic methodo facilimè redduntur obnoxiæ.

Abeant igitur illæ parapleroſes Vietææ quibus æquationes quadrato-quadraticas reducit ad quadraticas per medium cubicarum abs radice plana; pari enim elegantiâ, facilitate & brevitate ſolvuntur, ut jam patuit: perinde quadrato-quadraticæ ac cubicæ quæſtiones, nec poſſunt, opinor, elegantiùs.

Ut pateat elegantia hujus methodi, en conſtructionem omnium problematum cubicorum & quadrato-quadraticorum per parabolam & circulum.

Ponatur $aqq + zs$ in $a \infty dpp$: ergo $aqq \infty - zs$ in $a + dpp$. Fingatur quadratum abs $aq - bq$, aut alio quovis quadrato dato, fiet quadratum $aqq + bqq$

— *b* q in *a* q bis. Addantur ad ſupplementum ſingulis æqualitatis partibus *b* q q — *b* q in *a* q bis : fiet *a* q q + *b* q q — *b* q in *a* q bis ∞ *b* q q — *b* q in *a* q bis — *z* ſ in *a* + *d* p p ; ſit *b* q bis ∞ *n* q, & ſingulis homogeneis ſive partibus æqualitatis æquetur *n* q in *e* q : fiet illinc per ſubdiviſionem quadraticam *a* q — *b* q ∞ *n* in *e* ; ideóque punctum extremum *e* erit ad parabolam ex noſtra methodo : iſthinc fiet,

$$\frac{b\,qq}{n\,q} - a\,q - \frac{z\,\text{ſ in } a + d\,pp}{n\,q} \;\infty\; e\,q.$$

Ideóque ex noſtra methodo, punctum extremum *e* erit ad circulum. Deſcriptione igitur parabolæ & circuli ſolvitur quæſtio.

Hæc methodus facilimè ad omnes caſus tam cubicos quàm quadrato-quadraticos extenditur. Curandum eſt tantùm ut ex una parte ſit *a* q q ; ex altera quælibet homogenea, modò non afficiantur ab *a* cubo. At per expurgationem Vietæam omnes æquationes quadrato-quadraticæ ab affectione ſub cubo liberantur : ergo eadem in omnibus methodus. Cùm autem æquationes cubicæ liberentur ab adfectione ſub quadrato per methodum Vietæam, homogeneis omnibus in *a* ductis, fiet æquatio quadrato-quadratica, cujus nullum ex homogeneis afficietur ſub cubo ; ideóque ſolvetur per ſuperiorem methodum.

Id ſolùm in ſecunda æqualitate curandum eſt, ut *a* q ex una parte, ex altera *e* q ſub contraria affectionis nota reperiantur, quod eſt ſemper facillimum.

Sit enim in alio caſu, ut omnia percurramus, *a* q q ∞ *z* p in *a* q — *z* ſ in *d*. Fingatur quodvis quadratum abs *a* q — quovis quadrato dato ut *b* q, fiet *a* q q + *b* q q — *b* q in *a* q bis. Adjiciatur utrique æqualitatis parti ad ſupplementum *b* q q — *b* q in *a* q bis, fiet *a* q q

$+\, b^{qq} - b^{q}$ in a^{q} bis $\propto b^{qq} - b^{q}$ in a^{q} bis $+\, z^{p}$ in $a^{q} - z^{s}$ in d.

Ut igitur commoda fiat diviſio in ſecunda æqualitate, ſumenda differentia inter b^{q} bis & z^{p} quæ ſit verbi gratiâ n^{q}, & utraque æqualitatis pars æquanda n^{q} in e^{q}.

Ut illinc fiat $a^{q} - b^{q} \propto n$ in e.

Iſthinc $\frac{b^{qq}}{n^{q}} - a^{q} - \frac{z^{s}}{n^{q}}$ in $d \propto e^{q}$.

Advertendum deinde b^{q} bis debere præſtare z^{p}, alioquin a^{q} non afficeretur ſigno defectus, & pro circulo inveniremus hyperbolam, cui prumptum remedium; b^{q} enim ad libitum ſumimus, ideóque ipſius duplum majus z^{p} nullius eſt negotii ſumere. Conſtat autem ex methodo locali, circulum creari ſemper ex æqualitate in cujus parte altera quadratum unum ignotum afficitur ſigno $+$; in altera aliud quadratum ignotum ſigno $-$.

Si ſumas ad hoc exemplum inventionem duarum mediarum, erit $a^{c} \propto b^{q}$ in d.

Et $a^{qq} \propto b^{q}$ in d in a.

Adjiciatur utrinque $b^{qq} - b^{q}$ in a^{q}.

$a^{qq} + b^{qq} - b^{q}$ in a^{q} æquabitur $b^{qq} + b^{q}$ in d in $a - b^{q}$ in a^{q}.

Sit $b^{q} \propto n^{q}$.

Et ſingulæ æqualitatis partes æquentur n^{q} in e^{q}.

Fiet illinc $a^{q} - b^{q} \propto n$ in e.

Ideóque extremum e erit ad parabolam.

Iſthinc fiet $b^{q\frac{1}{2}} + d^{\frac{1}{2}}$ in $a - a^{q} \propto e^{q}$; ideóque extremum e erit ad circulum.

Qui hæc adverterit, fruſtrà quæſtionem meſolabii, triſectionis angularis, & ſimiles tentabit deducere ex planis, hoc eſt per rectas & circulos expedire.

TRAITE DES INDIVISIBLES.

POUR tirer des conclusions par le moyen des indivisibles, il faut supposer que toute ligne, soit droite ou courbe, se peut diviser en une infinité de parties ou petites lignes toutes égales entr'elles, ou qui suivent entr'elles telle progression que l'on voudra, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré-quarré, ou selon quelqu'autre puissance.

Or d'autant que toute ligne se termine par des points, au lieu de lignes, on se servira de points; & puis au lieu de dire que toutes les petites lignes sont à telle chose en certaine raison, on dira que tous ces points sont à telle chose en ladite raison.

Quand toutes les petites lignes ont entr'elles pareille différence, comme est la suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. alors elles sont toutes ensemble à la plus grande d'icelles prise autant de fois qu'il y en a de petites, comme le triangle au quarré qui a pour côté la plus grande ligne, c'est-à-sçavoir, comme 1 à 2, comme on voit au triangle qui est icy, que la surface contient la moitié de l'espace que contiendroit le quarré qui auroit 4 de côté comme le triangle; & encore qu'il ne fallût pas 10 points pour achever le quarré, parce que le côté AB seroit commun à l'autre moitié du quarré, néanmoins dans les indivisibles cela n'est pas considérable, parce que le triangle n'excéde jamais la moitié du quarré que

de la moitié de son côté : or y ayant une infinité de côtez audit quarré pris dans les indivisibles, la moitié d'un d'iceux n'entre pas en considération ; ainsi ce triangle-cy qui a 4 de côté n'excede la moitié du quarré collateral, (c'est-à-dire qui a pareil côté) que de 2 qui est $\frac{1}{4}$ de ladite moitié, ou la moitié du côté. Si le triangle avoit 5 de côté, il n'excederoit que de $\frac{1}{5}$ de la moitié du quarré collateral : s'il en a 6, il n'excedera que de $\frac{1}{6}$, & ainsi de suite ; & puisqu'on voit que l'excès diminuë toûjours, il s'anéantira enfin dans la division indéfinie.

De même si les lignes suivoient entr'elles l'ordre des quarrez, la somme de toutes ces lignes ou des points qui les représentent, seroit à la derniére prise autant de fois, comme la somme des quarrez au cube, ou comme la pyramide à la colonne, sçavoir comme 1 à 3 ; car quoique prenant un nombre fini de quarrez leur somme soit plus grande que le tiers du cube collatéral au plus grand quarré, néanmoins dans la division infinie elle ne seroit que le tiers ; car ladite somme ne passe jamais le $\frac{1}{3}$ du cube que de la moitié du plus grand quarré $+$ $\frac{1}{6}$ du côté. Or dans le cube il y a une infinité de quarrez, & partant la moitié d'un d'iceux n'est pas considérable, & encore moins $\frac{1}{6}$ de la ligne ou côté du même cube.

Ainsi le cube étant 64, pour avoir la somme des quarrez dont le plus grand soit collateral audit cube, on prendra le tiers d'icelui, sçavoir 21 $\frac{1}{3}$, auquel joignant la moitié du plus grand quarré, sçavoir 8, on aura 29 $\frac{1}{3}$, à quoi joignant encore $\frac{1}{6}$ de 4 qui est le côté, sçavoir $\frac{2}{3}$, on aura 30 pour la somme des quatre premiers quarrez. Et ainsi par les proprietez des puissances suivantes, on montrera que la somme des cubes est $\frac{1}{4}$ du quarré-quarré collateral au plus grand cube ; que la somme des quarrez-quarrez est $\frac{1}{5}$ de la cinquiéme puissance ; que la

somme

ſomme des cinquiémes puiſſances eſt $\frac{1}{6}$ de la ſixiéme puiſſance, & ainſi des autres. Mais il faut remarquer que les puiſſances ont ainſi rapport l'une à l'autre de proche en proche, & non point ſi on en omet une entre deux. Ainſi la ligne ou côté n'a point de rapport au cube, ni le quarré au quarré-quarré, ni le cube à la cinquiéme puiſſance, &c. car les lignes priſes à l'infini ne faiſant qu'un quarré, & y ayant une infinité de quarrez dans le cube, ſi l'on ajoûte ou ſi l'on ôte un ſeul quarré cela n'operera rien. La même choſe ſe montrera du quarré eû égard au quarré-quarré, & du cube eû égard à la cinquiéme puiſſance, &c.

La ſuperficie ſe diviſe auſſi en une infinité de petites ſuperficies, leſquelles ou ſont égales, ou ont une égale différence, ou gardent entr'elles quelqu'autre progreſſion, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré-quarré, &c. Et d'autant que les ſuperficies ſont enfermées dans les lignes, au lieu de comparer les ſuperficies, on comparera les lignes à une autre choſe, & la ſomme de toutes les petites ſurfaces ou des lignes qui les repréſentent, ſont à la grande ſurface priſe autant de fois comme 1 à 3, comme il a été dit.

De même les ſolides ſe diviſent en une infinité de petits ſolides ou égaux, ou qui gardent quelque proportion, comme il a été dit des ſurfaces : & d'autant que les ſolides ſont terminez par des ſurfaces, au lieu de dire que ces petits ſolides ſont au grand ſolide pris autant de fois, je dis, l'infinité des ſurfaces ſont à la plus grande priſe autant de fois, comme le cube au quarré-quarré de ſon côté, ou comme 1 à 4.

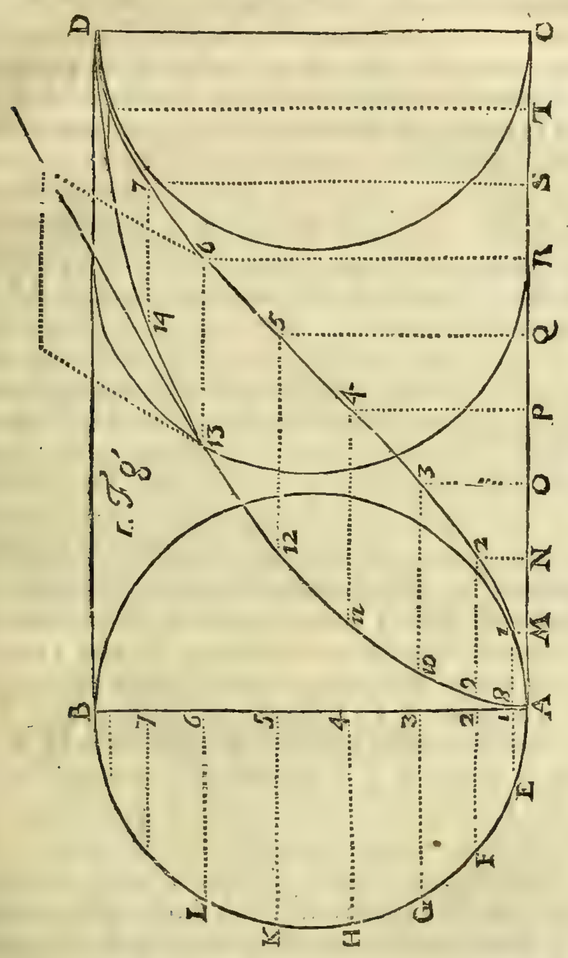
Par tout ce diſcours on peut comprendre que la multitude infinie de points ſe prend pour une infinité de petites lignes, & compoſe la ligne entiére. L'infinité de

lignes repréſente l'infinité des petites ſuperficies qui compoſent la ſuperficie totale. L'infinité des ſuperficies repréſente l'infinité de petits ſolides qui composent enſemble le ſolide total.

EXPLICATION DE LA ROULETTE.

NOUS poſons que le diamétre AB du cercle AEFGB ſe meut parallelement à ſoy-même, comme s'il étoit emporté par quelqu'autre corps, juſques à ce qu'il ſoit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité dudit diamétre marche par la circonférence du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamétre, enſorte que quand le diamétre eſt en CD, le point A eſt venu en B, & la ligne AC ſe trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette courſe du diamétre ſe diviſe en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle ſe diviſe auſſi en parties infinies toutes égales entr'elles & aux parties de AC parcouruës par le diamétre, comme il a été dit. En après je conſidére le chemin qu'à fait ledit point A porté par deux mouvemens, l'un diamétre en avant, l'autre du ſien propre dans la circonference. Pour trouver ledit chemin, je voy que quand il eſt venu en E il eſt élevé au-deſſus de ſon premier lieu duquel il eſt parti; cette hauteur ſe marque tirant du point E au diamétre AB un ſinus E1, & le ſinus Verſe A1 eſt la hauteur dudit A quand il eſt venu en E. De même quand il eſt venu en F, du point F ſur AB je tire le ſinus F2, & A2 ſera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonférence, & tirant le ſinus G3, le ſinus Verſe A3 ſera la hauteur de A quand il eſt parvenu en G; & faiſant ainſi de tous les lieux de la circonférence que

parcourt A, je trouve toutes ses hauteurs & élevemens pardessus l'extrémité du diamétre A, qui sont A1, A2,



A3, A4, A5, A6, A7; donc, afin d'avoir les lieux par où passe ledit point A, sçavoir la ligne qu'il forme pen-

dant ses deux mouvemens, je porte toutes ses hauteurs sur chacun des diamétres M, N, O, P, Q, R, S, T, & je trouve que M 1, N 2, O 3, P4, Q 5, R 6, S 7 sont les mêmes que celles qui sont prises sur AB. Puis je prends les mêmes sinus E 1, F 2, G 3, &c. & je les porte sur chaque hauteur trouvée sur chaque diamétre, & je les tire vers le cercle, & des extremitez de ces sinus se forment deux lignes, dont l'une est A 8 9 10 11 12 13 14 D, & l'autre A 1 2 3 4 5 6 7 D Je sçai comme s'est fait la ligne A 8 9 D; mais pour sçavoir quels mouvemens ont produit l'autre, je dis que pendant que AB a parcouru la ligne AC, le point A est monté par la ligne AB, & a marqué tous les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, le premier espace pendant que AB est venu en M, le second pendant que AB est venu en N, & ainsi toûjours également d'un espace à l'autre jusques à ce que le diamétre soit arrivé en CD; alors le point A est monté en B. Voilà comment s'est formée la ligne A 1 2 3 D. Or ces deux lignes enferment un espace, étant séparées l'une de l'autre par tous les sinus, & se rejoignant ensemble aux deux extrémitez AD. Or chaque partie contenuë entre ces deux lignes est égale à chaque partie de l'aire du cercle AEB contenuë dans la circonférence d'icelui; car les unes & les autres sont composées de lignes égales, sçavoir de la hauteur A 1, A 2, &c. & des sinus E 1, F 2, &c. qui sont les mêmes que ceux des diamétres M, N, O, &c. ainsi la figure A 4 D 12 est égale au demi-cercle AHB. Or la ligne A 1 2 3 D divise le parallelograme ABCD en deux également, parce que les lignes d'une moitié sont égales aux lignes de l'autre moitié, & la ligne AC à la ligne BD; & partant selon Archiméde, la moitié est égale au cercle, auquel ajoûtant le demi-cercle, sçavoir l'espace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle & demi pour l'espace A 8 9 D C; &

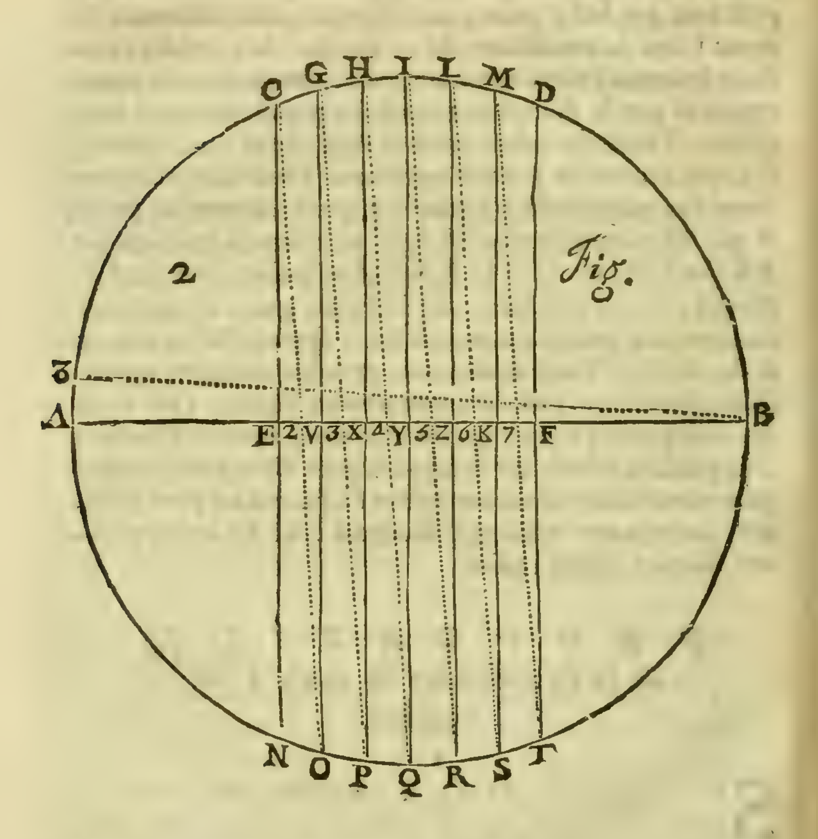
faiſant de même pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle.

Pour trouver la tangente de la figure en un point donné, je tire dudit point une touchante au cercle qui paſſeroit par ledit point, car chaque point de cercle ſe meut ſelon la touchante de ce cercle. Je conſidére enſuite le mouvement que nous avons donné à notre point emporté par le diamétre marchant parallelement à ſoy-même. Tirant du même point la ligne de ce mouvement, ſi je paracheve le parallelogramme (qui doit toûjours avoir les quatre côtez égaux lorſque le chemin du point A par la circonférence eſt égal au chemin du diamétre AB par la ligne AC) & ſi du même point je tire la diagonale, j'ai la touchante de la figure qui a eû ces deux mouvemens pour ſa compoſition, ſçavoir le circulaire & le direct. Voilà comme on procéde en telles opérations quand on poſe les mouvemens égaux. Que ſi on les avoit poſez en quelqu'autre raiſon, comme ſi lorſque l'un parcourt dans un temps l'eſpace d'un pied, l'autre parcouroit dans le même temps l'eſpace d'un pied & demi, ou en autre raiſon, il faudroit tirer les conſéquences ſuivant ladite raiſon.

PROPORTION
de la circonférence du cercle à ſon diamétre.

SOIT le cercle AIBQ, ſon diamétre AB, & ſoient tirez les ſinus CE, GV, HX, IY, LZ, MK, DF. Que les arcs CG, GH, HI, IL, LM, MD ſoient égaux: je dis que la ligne EF eſt à la circonférence CD, comme tous les ſinus enſemble, ſçavoir CE, GV & tous les autres, ſont à autant de ſinus totaux ou demi-diamé-

tres. Je le montre ainsi. Je continuë CE jusques en N, GV jusques en O, & ainsi des autres. Je tire ensuite la diagonale de C en O qui coupe la ligne EV en passant. Je tire aussi toutes les autres diagonales, & partant je



fais des triangles semblables, ausquels triangles semblables les lignes DF & NE ne sont point employées, mais cela n'importe à cause de la division infinie dans laquelle nul fini ne porte préjudice. Je tire par-après la

ligne B 8 faiſant l'arc 8 A égal à CG; & du point 8 j'abaiſſe la perpendiculaire 8 A pour avoir un triangle ſemblable aux triangles C 2, E, G 3 V, & aux autres ſuivans. Nous feignons que la circonférence CD eſt diviſée par infinis ſinus, & que la ligne à 8 A étant ſi proche de la circonférence 8 A, devient elle-même circonférence & égale à 8 A, ou à CG, & à chacune des autres quiont été diviſées en infini. De plus, nous diſons que la ligne B 8 peut être tant approchée par une diviſion infinie de la ligne AB diamétre, qu'elle devient elle-même diamétre.

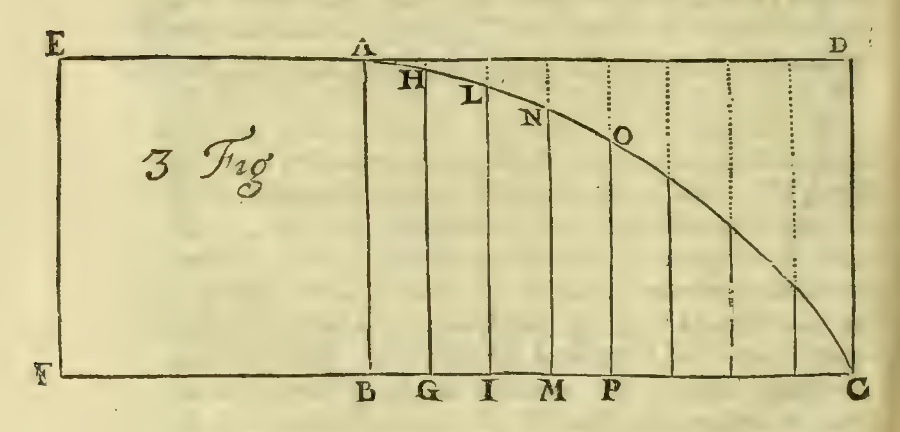
Puis on dira : Comme CE eſt à E 2, ainſi OV eſt à V 2, & ainſi de tous les triangles qui ſuivent la même régle. En après, le triangle CE 2 eſt ſemblable au triangle GV 3, parce qu'ils ont les angles C & G égaux, ſoûtenant circonférences égales NO, OP, car toutes ſont égales depuis N juſques en T, & partant comme tous les doubles ſinus CN & autres ſont à la ligne EF, ainſi CE à E 2 : or comme CE à E 2, ainſi B 8, qui eſt devenu diamétre, à 8 A devenu circonférence, qui ſera égal à CG & aux autres. Ainſi, comme tous les ſinus à la ligne EF, ainſi le diamétre B 8 devenu diamétre, à 8 A devenu circonférence ; & au lieu de dire 8 A, je dis CG; & coupant les antécedens en deux, je dis, comme les ſinus d'enhaut à la ligne EF, ainſi le demi-diamétre ou ſinus total à CG; & multipliant CG autant de fois que la ligne CD contient de diviſions, tous les ſinus d'enhaut ſeront à EF, comme autant de demi-diamétres ou ſinus totaux qu'il y a de parties égales à CG depuis C juſques en D, ſont à la circonférence CD : & changeant, comme tous les ſinus d'enhaut ſont à autant de ſinus totaux ou demi-diamétres, ainſi la ligne EF eſt à la circonférence CD.

Que ſi la ligne EF avoit été le demi-diamétre, & que

les sinus eussent été abaissez du quart de la circonférence, le demi-diamétre eût été au quart de la circonférence comme tous les sinus divisans la circonférence sont à autant de sinus totaux ou demi-diamétres.

FIGURE COURBE égale au Quarré.

SUPPOSANT que le demi-diamétre du cercle est quart de cercle comme tous les petits sinus infinis à tous les sinus totaux, c'est-à-dire, autant de petits sinus à autant de sinus totaux : je trouve que le quarré du demi-diamétre est égal à la figure qui est faite par tous les sinus posez à angles droits sur la circonférence; car en la figure ABC, les lignes GH, IL, MN, PO, qui sont les



sinus de toute la circonférence BC, font par l'extrémité de leur sommet la ligne AC; & continuant de faire & prolonger lesdits sinus ensorte qu'ils soient égaux au sinus total ou demi-diamétre, ils forment la figure ABCD. Je fais aussi sur AB son quarré ABEF.

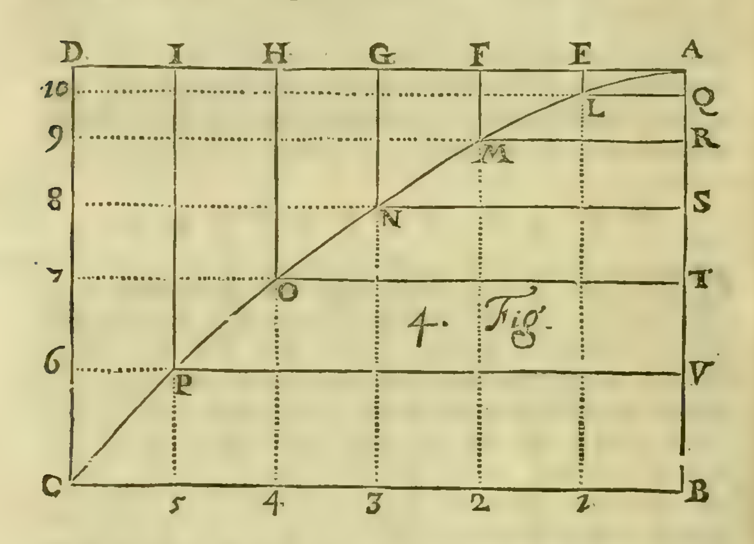
Puis

Puis je dis : Comme le demi-diamétre AB eſt à la circonférence BC, c'eſt-à-dire au quart de la circonférence, ainſi tous les ſinus ſont à autant de ſinus totaux ou demi-diamétres ; & par les infinis, comme la figure ABC ſera à la figure ABCD composée des infinis ſinus totaux & du quart de la circonférence BC ; donc, comme le demi-diamétre eſt à la circonference, ainſi la figure ABC eſt à la figure ABCD. Mais comme la ligne AB eſt à la ligne BC, ainſi le quarré d'icelle eſt au rectangle fait de AB & BC ; donc la figure ABC eſt à la grande ABCD comme le quarré ABEF eſt au rectangle ABCD ; ainſi le quarré de AB a même raiſon au rectangle AC que la figure ABC ; & partant le quarré de AB qui eſt ABFE eſt égale à la figure ABC, ce qu'on vouloit prouver.

DE LA PARABOLE.

SOIT la Parabole BALMNOPC, le ſommet A, le diamétre AB, la ligne touchante AD, laquelle ſoit diviſée en infinies parties égales AE, EF, FG, GH, HI, ID, & de tous les points ſoient tirées les lignes paralleles au diamétre AB juſques à la ligne CB, ſçavoir E 1, F 2, G 3, &c. & des points où leſdites lignes coupent la Parabole, ſoient tirées les ordonnées LQ, MR, NS, OT, PV. Mais les lignes AQ, AR ſont entr'elles comme le quarré de la ligne LQ au quarré de la ligne MR ; & la ligne AR eſt à AS comme le quarré de MR au quarré de NS, & ainſi de toutes les autres lignes. Or la ligne AD étant diviſée en parties égales, & les parties dicelles étant égales aux lignes ordonnées, ſçavoir AE à QL, AF à RM, AG à SN, AH à TO, & AI à VP, il s'enſuit que chaque quarré d'icelles lignes ſurpaſſera le précedent ſelon la progreſſion des nombres impairs, que les quarrez ſeront faits des côtez differens

toûjours de l'unité, & que le côté du premier étant 1, les autres côtez seront 2, 3, 4, 5, 6. De plus, les portions du diamétre comprises & coupées par les ordonnées sont les mêmes que EL, FM, GN, HO, IP, DC; & par ainsi ces lignes sont entr'elles comme les quarrez 1, 4, 9, 16, 25, 36 sont entr'eux. Je dis donc que toutes ces lignes prises ensemble seront à la ligne DC prise autant de fois qu'icelles lignes, comme la somme des quarrez (suivant l'ordre que j'ai dit, c'est-à-dire, à commen-



cer à l'unité, & suivre toûjours en augmentant de l'unité) est au quarré DC pris autant de fois qu'il y a de divisions en la ligne AD, c'est-à-dire, en la présente division, six fois. Or multiplier un quarré autant de fois que vaut son côté, c'est-à-dire, par son côté, c'est faire un cube : il est donc vrai que la somme de toutes ces lignes EL, FM, GN, HO, IP, DC est à la ligne DC prise autant de fois qu'il y a desdites lignes, com-

me la somme des quarrez susdits est au cube du plus grand nombre. Mais le cube est le triple de la somme des quarrez, partant le triligne CPONMLAD sera le tiers du rectangle CDAB, & par ainsi la Parabole ABCPONMLA sera les deux tiers du parallelogramme ou quarré CDAB ; ce qui a été démontré par Archiméde d'une autre maniére.

Que si nous voulons considerer une autre nature de Parabole comme M. Fermat, faisant que les portions du diamétre soient l'une à l'autre comme le cube au cube, il se trouvera que la même Parabole que dessus, ou plûtôt le dehors d'icelle COAD, sera au rectangle ABCD comme la somme des cubes à un quarré-quarré, c'est-à-dire, comme 1 à 4. Si nous feignons que les portions du diamétre, c'est-à-dire, les petites lignes EL, FM, GN, HO, IP, DC sont l'une à l'autre comme les quarré-quarrez entr'eux, il se trouvera que la somme de toutes ces lignes seront à la ligne CD prise autant de fois, comme la somme des quarré-quarrez au quarré-cube, c'est-à-dire, comme 1 à 5, & par ainsi la Parabole vaudra 4 & le rectangle 5 ; & de cette sorte on pourra continuer & trouver des Paraboles qui changent de valeur, & cela se peut faire de toutes les puissances jusques où on voudra.

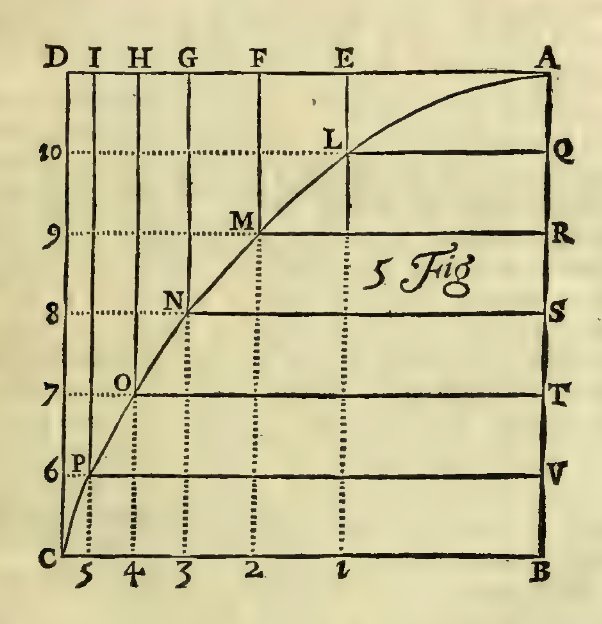
Quant au solide de notre Parabole, il se fait en feignant que tout le rectangle tourne sur son axe, & qu'il se fait un grand cylindre par la révolution de ABCD. La révolution de la premiére partie EAB1 se peut nommer cylindre, mais celle de chacune des autres se nomme Rouleau, parce que nous les devons considérer chacune à part, & ceci est pour les grands cylindres ; mais en considérant les petits, comme la révolution que fait EAQL, FARM, & tous les autres, nous rejettons ce qui est au dedans de la Parabole, & ne considérons que ce

qui eſt dehors ; car toutes les parties de ces petits cylindres ou rouleaux qui ſont dans la Parabole ne peuvent faire une partie auſſi grande que fait le rouleau D I 5 C ; & par ainſi nous rejettons toutes ces parties qui n'en valent pas une, qui n'eſt de nulle conſidération dans les indiviſibles.

Et par les petites lignes, c'eſt-à-dire par les portions du diamétre, nous conſidérons l'eſpace qui eſt hors la Parabole, & compris dans ces lignes. Tous ces cylindres ſont entr'eux comme leurs baſes, c'eſt-à-dire, comme leurs cercles ; mais les cercles ſont entr'eux comme le quarré du demi-diamétre de l'un au quarré du demi-diamétre de l'autre : comme en notre figure le quarré de la ligne AE eſt au quarré de AF comme le premier quarré au ſecond quarré, & le quarré de AF eſt à celui de AG comme le ſecond quarré au troiſiéme, &c. Mais un quarré ſurpaſſe ſon prochain de deux fois ſon côté, ſçavoir le côté du moindre quarré, plus l'unité : il arrive donc que toutes les lignes, ſçavoir AE, EF, FG, GH, HI, ID ſont toutes differentes des quarrez, c'eſt-à-dire, chacune priſe deux fois plus l'unité ; or toutes ces unitez ne ſe conſiderent point dans les indiviſibles comme choſe finie. Nous prenons donc toutes ces lignes comme deux fois un côté chacune, puis après nous diſons que les petites lignes EL, FM, GN, & les autres ſont entr'elles comme des quarrez ; nous les conſiderons comme des quarrez, & diſons que l'eſpace ELQ vaut deux côtez d'un quarré par ſon quarré EL, & le quarré de FM par le double de ſon côté FA fait l'eſpace FMR, & pareillement le quarré de GN par deux GA fait l'eſpace GNS, &c. Or un quarré par deux fois ſon côté vaut deux fois le cube ; donc toutes ces petites lignes enſemble, ou l'eſpace qu'elles contiennent hors la parabole ſont comme deux fois la ſomme des cubes au quarré de CD pris au-

tant de fois qu'il y a de divisions en la ligne DA, c'est-à-dire, au quarré de CD par le quarré du même CD, c'est-à-dire, au quarré-quarré.

Il faut maintenant considerer ABCD, ou la Parabole CPOMAB se tournant sur son axe comme la précedente, mais avec cette difference, que la ligne AB est divisée en parties égales entr'elles. Nous considerons le solide ou cylindre que fait DC qui a pour base le cercle duquel le demi-diamétre est la ligne DA, les petits cy-



lindres ont pour demi-diamétre de leurs cercles les lignes EA ou LQ son égale, MR, NS, OT, PV, &c. or tous ces petits cylindres sont entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, leurs cercles, & les cercles sont entre eux comme les quarrez de leurs demi-diamétres : or les

quarrez de ces petites lignes ſont entr'eux comme les lignes AQ, QR, RS, ST, TV, ſçavoir en égale difference de l'unité, c'eſt-à-dire, que les quarrez de toutes ces lignes ſont entr'eux comme l'ordre des nombres naturels. Ainſi le quarré de LQ étant 1, celui de MR vaudra 2, celui de NS 3, celui de OT vaudra 4, & celui de RV vaudra 5. Or les cylindres étant entr'eux comme les quarrez des demi-diamétres de leurs baſes ou cercles, il s'enſuit que tous les quarrez de ces petites lignes ſont au quarré de la grande BC pris autant de fois, comme la ſomme de la ſuite des nombres naturels, à commencer à l'unité, ſont au quarré du dernier.

Mais le conoïde parabolique, c'eſt-à-dire, le ſolide fait par la révolution de CNLAB, eſt au cylindre total, ſçavoir à celui qui eſt fait par la révolution de ABCD, comme toutes les petites lignes à la grande priſe autant de fois; partant le conoïde parabolique eſt au cylindre, comme la ſomme des nombres, c'eſt-à-dire le triangle, eſt au quarré, ou bien comme la moitié à ſon tout; car la ſomme des nombres eſt au quarré (en terme d'indiviſible) comme la moitié au tout; comme ſi la ſomme eſt 10 triangle de 4, le quarré eſt 16, dont la moité 8 eſt excedée de 2 par ledit triangle. Or cela paſſe pour être la moitié de l'autre; car ſi on continuoit dans la ſuite des nombres on verroit que le triangle excederoit toûjours la moitié du quarré d'une moindre portion, laquelle partant s'anéantiroit enfin dans l'infini.

Maintenant il faut conſiderer la figure ABCD comme faiſant ſon tour ſur AD, lors la ligne CD ſera le demi-diamétre de la baſe ou cercle du cylindre total: les lignes PI, OH, NG, MF, LE ſont les demi-diamétres du cercle ou baſe de chacun de leurs cylindres. Or par la proprieté de la Parabole, la ligne EL eſt à FM comme le quarré au quarré, & ainſi toutes les autres petites

lignes de ſuite ; partant le quarré de EL ſera au quarré de FM comme un quarré-quarré à un quarré-quarré, & ainſi toutes les autres petites ; donc toutes enſemble elles ſeront entr'elles comme le quarré-quarré de DC pris autant de fois qu'il y a de petites lignes, c'eſt-à-dire, comme la ſomme des quarré-quarrez au quarré-cube ; & telle eſt la raiſon du ſolide fait par la révolution de CDA au cylindre total fait par la révolution de CB, c'eſt-à-dire, qu'ils ſont entr'eux comme 1 à 5.

Maintenant nous conſiderons que la figure tourne ſur la ligne CD parallele à l'axe. Par cette révolution la ligne AD eſt le demi-diamétre de la baſe ou cercle du grand cylindre ; les lignes 10 L, 9 M, 8 N, 7 O, 6 P ſont chacune le demi-diamétre du cercle ou baſe de leur cylindre qui ſont l'une à l'autre comme leurſdites baſes ou cercles, & les cercles ſont entr'eux comme les quarrez deſdites lignes : donc tous les quarrez de ces petites lignes ſeront au quarré de la grande ligne priſe autant de fois, comme les petits cylindres au grand cylindre. Mais je ne connois pas la raiſon des petits quarrez aux grands quarrez, laquelle je cherche par une grandeur qui leur ſoit égale, & je dis que le quarré de L 10 vaut le quarré de Q 10 & le quarré de QL moins le rectangle de Q 10 QL pris deux fois ; le quarré de M 9 vaut le quarré de R 9, & celui de MR moins le rectangle de 9 RM pris deux fois, & ainſi des autres juſques à l'infini. Or faiſant la comparaiſon, nous diſons que les quarrez de Q 10 & QL comparez au ſeul quarré Q 10 font égalité de raiſon entre les deux grands qui ſont égaux : le même ſoit entendu de tous les autres quarrez. Les grands étant égaux, il ne reſte qu'à connoître la valeur des petits LQ, MR, &c. Mais nous avons vû ci-devant qu'ils ſont au grand quarré comme la moitié au tout : ſi donc nous joignons un tout avec ſa moitié, & le comparons

à un autre tout, nous ferons une raiſon de 3 à 2. Poſons que le grand quarré vaille 2, l'autre qui eſt composé du grand & de ſa moitié vaudra 3 ; partant la raiſon ſera de ce dernier au premier de $\frac{3}{2}$ ou de 3 à 2 ; & pourſuivant, on ôtera ce qui étoit de trop dans les deux quarrez mis ci-deſſus pour trouver la valeur du quarré L 10, & nous avons dit que deux fois le rectangle Q 10 QL étoit de trop pardeſſus le quarré L 10, & ainſi des autres ; il faut donc ôter les rectangles deux fois à chaque quarré. Or tous ces rectangles ont pour même hauteur Q 10, donc ils ſeront entr'eux comme leurs baſes ou petites lignes, & les ſolides entr'eux comme leurs baſes. Mais nous avons vû que ce ſolide fait par le tour de la parabole étoit le tiers du cylindre total : or il faut ôter deux fois le rectangle, partant il faudra diminuer de deux tiers la raiſon que nous avons trouvée de 3 à 2, & mettant 9 à 6 au lieu de 3 à 2 & de $\frac{9}{6}$ on en ôtera $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{6}$, & reſtera $\frac{5}{6}$ pour la valeur de CAB tourné ſur DC, & le reſte au cylindre entier, ſçavoir CAD, vaudra $\frac{1}{6}$ du grand cylindre ABCD.

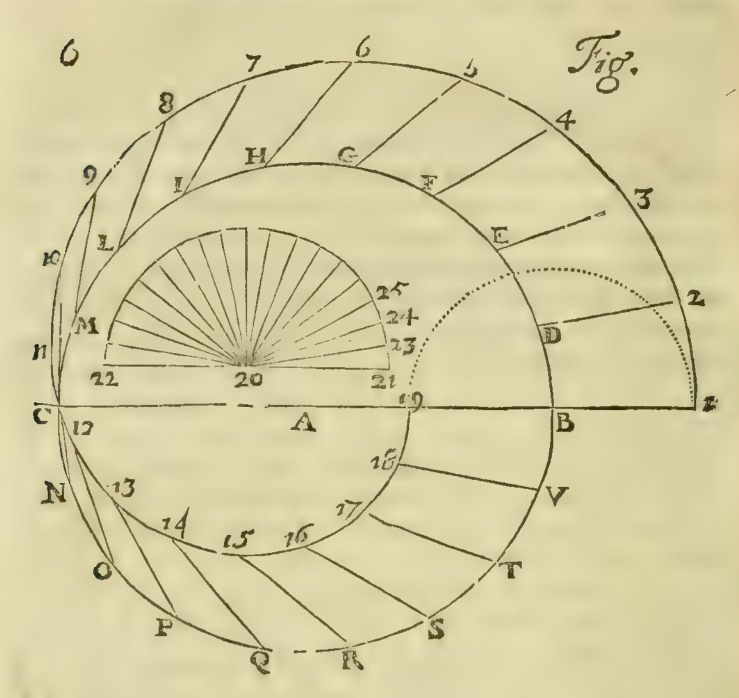
DE LA CONCHOÏDE.

LA Conchoïde ſe fait, quand d'un point on tire pluſieurs lignes qui coupent une même ligne ſoit courbe ou droite, & que toutes les lignes tirées depuis ladite ligne ſont toutes égales, telles que ſont B 1, D 2, E 3, F 4, G 5, &c. tirées par le moyen du cercle CGBR, diviſé (ſelon la regle des indiviſibles) en parties infinies égales, & par icelui a été composée la Conchoïde 19C 1, en laquelle, comme en toutes les autres, les lignes depuis la circonférence du cercle juſques à ladite Conchoïde ſont toutes égales. Or toutes ces lignes qui diviſent la circonference du cercle commençant au point C & finiſſant

finissant en 1, 2, 3, 4, 5, &c. divise tant la Conchoïde que le cercle en triangles semblables, lesquels par la force des indivisibles se convertissent & deviennent secteurs, & sont l'un à l'autre comme quarré à quarré (quoique dans le fini il y ait quelque chose à dire;) ainsi le secteur C 1 2 est au secteur CBD ou CBV son égal, comme le quarré de C1 au quarré de CB. En après, le secteur CBD ou CBV son égal est au secteur C 19 18 comme le quarré de CB au quarré de C 19. Mais pour joindre les deux quarrez qui appartiennent à la Conchoïde afin de les comparer aux quarrez du cercle, je regarde la valeur du quarré de C 1 qui vaut les quarrez de CB, B1, plus le rectangle deux fois sous CB B1; le quarré C 19 est égal aux quarrez de CB, B 19 ou B 1 son égal (car B 19 commence à la circonference du cercle, & va au point de la Conchoïde 19, & partant doit être égale à B1 qui part de la même circonference, & va au point 1 de la Conchoïde) moins deux fois le rectangle CB B 19. Or le plus détruisant le moins, ces deux grandeurs jointes ensemble font le quarré CB deux fois, plus le quarré de B 1 deux fois; par ainsi le secteur C1 2, & le secteur C 19 18 seront aux secteurs CBD, CBV, comme deux fois les quarrez CB, B1 à deux fois le quarré CB, & prenant la moitié, le quarré CB + le quarré B1 sera au quarré CB comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs CBD, CBV; & tout l'espace de la Conchoïde est à l'espace du cercle comme les quarrez CB, B1 au quarré CB, ou bien comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs CBD, CBV.

Je fais un demi cercle de l'intervale B 1, & je le divise en autant de triangles semblables qu'il y en a au cercle premier; & au lieu de compter le quarré B1, je dis le quarré 20 21; donc comme le quarré CB + le quarré 20 21 sont au quarré CB; ainsi l'espace du cer-

cle & demi-cercle enſemble ſont à l'eſpace du cercle. Mais nous avons montré que toute la Conchoïde eſt au cercle comme le quarré CB + le quarré B1 ou leurs

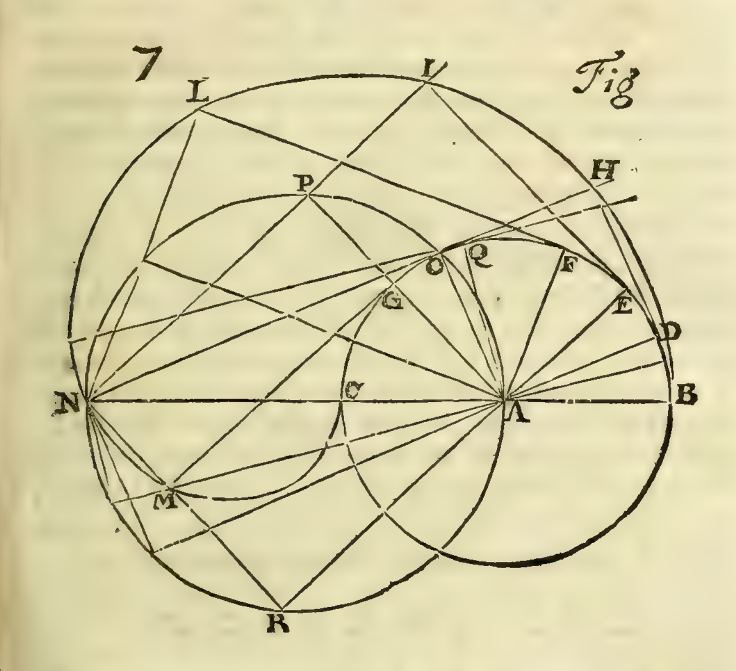


ſecteurs, eſt au quarré CB; par ainſi, toute la Conchoïde eſt au cercle en même raiſon que le cercle & demi-cercle eſt au même cercle; & partant la Conchoïde eſt égale au cercle & demi-cercle pris enſemble.

Conchoïde.

SOIT la baſe d'un cône oblique le cercle BFC duquel le centre eſt A; le ſommet du cône eſt en l'air, avec telle obliquité, que de ce ſommet la perpendicu-

laire tombe ſur le point N. Nous ſuppoſons par les indiviſibles, que par tous les points du cercle ſoient tirées des touchantes, comme DH, EI, FL, GM, &c. Nous diſons que ſi du ſommet du cône on tire une perpendiculaire ſur chacune de ces touchantes, & que ſi du point N ſur lequel tombe la perpendiculaire tirée du ſommet, on tire une ligne à ce même point de la tou-



chante, l'angle ſera droit, & ladite ligne perpendiculaire à ladite touchante ; & la ligne qui paſſe par l'extrémité de chacune deſdites touchantes & où ſe fait le ſuſdit angle droit, ſçavoir la ligne BHILNMC, ſe trouve être une Conchoïde.

Pour le prouver, il faut conſtruire un cercle qui ait

pour diametre NA, lequel cercle soit NPOAR, & faire voir que toutes les lignes comprises entre sa circonférence APNR & la ligne BHILNMC, sont toutes égales entr'elles; nous prouvons que AOHD est un parallelogramme; car l'angle D est droit, puisque DH est touchante & AD demi-diametre; l'angle H est aussi droit pour avoir été tiré tel du point N sur lequel tomboit la perpendiculaire tirée du sommet du cône; l'angle O est droit pour être fait dans le demi-cercle NPOA, & partant le quatriéme OAD le sera aussi; & partant c'est un parallelogramme, & les côtez opposez sont égaux; & par ainsi AD sera égale à OH comprise entre l'autre cercle & la ligne courbe, & AD est égale à AB pour être toutes deux le rayon d'un même cercle. Passons outre, & considerons PI EA. L'angle E est droit, étant fait par la touchante; l'angle I est droit, ayant été fait tel par la ligne NI; l'angle P est droit, comme étant fait dans le demi-cercle, & partant le quatriéme l'est aussi, & les côtez opposez du parallelogramme, sçavoir PI & AE ou son égale OH, sont égaux; & partant AB, OH, PI sont égales, & ce sont les lignes comprises entre les deux circonferences, sçavoir entre le cercle NPAR, & la ligne courbe BHILNMC, & on prouvera le même de toutes les autres lignes; & partant cette ligne courbe est une Conchoïde.

DES ANNEAUX.

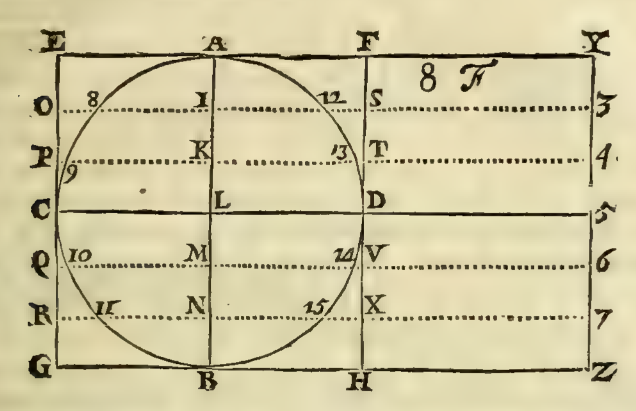
SI on décrit alentour d'une figure un parallelogramme (nous avons pris un cercle en cet exemple) & qu'on fasse tourner le tout sur un des côtez du parallelogramme, le solide fait par ce parallelogramme est au solide fait par la figure, comme le plan du parallelogramme est au plan de la figure.

Nous expliquerons ceci par un cercle autour duquel eſt écrit le parallelogramme EFHG : au milieu du cercle on a tiré la ligne AB parallele au côté FH du parallelogramme ; la nature de cette ligne doit être telle, que toutes les lignes tirées dans le cercle ſoient coupées en deux également par cette ligne. Suppoſant donc que le tout a tourné ſur la ligne FH, dans ce tour le parallelogramme a fait pour ſolide un cylindre, & le cercle a fait pour ſolide un Anneau bouché qu'on nomme *Annulus ſtrictus*, c'eſt-à-dire, qu'il ſe diminuë peu à peu enſorte que rien n'y peut entrer. Or ces deux ſolides ſont égaux entr'eux, excepté les vuides, qui étant remplis au grand ſolide ſont de plus en icelui qu'au petit ; il faut donc tirer leſdits vuide du grand pour ſçavoir ce qu'il reſte pour le petit, & tout ſe meſure par les quarrez des lignes qui ſont dans la figure. Je commence donc par la moitié du parallelogramme, & je conſidére que cette moitié fait un cylindre dans ſa révolution, & que le demi-cercle fait une figure differente de ce cylindre, de ces petits eſpaces qu'il faut ôter du cylindre. Conſidérant les quarrez du cylindre, je dis que le quarré de IS eſt égal aux quarrez de S 12 & I 12 plus deux fois le rectangle de S 12 I 12 ; le quarré TK eſt égal aux deux quarrez T 13, K 13 plus deux fois le rectangle K 13 T ; le même ſe doit entendre des autres quarrez appartenant au cylindre AFHB. Mais ſi nous ôtons chaque quarré qui compoſe le vuide, & qui ſont hors le cercle de chacun des quarrez du ſolide, il nous reſtera tout le dedans du cercle, c'eſt-à-dire, du petit ſolide. Si donc du quarré SI on ôte le quarré S 12, il reſtera le quarré I 12 plus deux fois le rectangle S 12 I : ceci eſt tiré du premier quarré du cylindre. Quand je tire du ſecond quarré du cylindre le quarré T 13, il me reſte le quarré K 13 plus deux fois le rectangle

K 13 T, & ainsi des autres. Puis donc que j'ai de reste le quarré 12 I plus deux fois le rectangle, S 12 I je joins le quarré avec une fois le rectangle, & par-là j'ai le rectangle SI 12, & le rectangle S 12 I. Je retiens ces restes; & passant à l'autre moitié du cercle pour la joindre avec lesdits restes, je considere ce qu'elle fait quand le tout tourne sur la même ligne qu'auparavant, & ce que font les grands quarrez S 8, T 9 & les autres. Je regarde combien ils surpassent les petits quarrez I 8, K 9, & les autres qui sont dans le demi-cercle, & je dis ainsi : Le quarré S 8 est égal aux deux quarrez SI, I 8 plus deux fois le rectangle SI 8; le quarré T 9 est égal aux quarrez TK, K 9 plus deux fois le rectangle TK 9, & ainsi des autres. Or il faut ôter de tous ces quarrez les quarrez du cylindre, sçavoir de SI, TK, & autres, & nous aurons de reste le quarré de I 8 plus deux fois le rectangle SI 8, le quarré de K 9 plus deux fois le rectangle TK 9, & ainsi des autres, & ceci se doit joindre à l'autre espace du demi-cercle.

Pour faire cette jonction, je prens le quarré de 8 I que je joins au rectangle S 12 I que j'avois de reste à l'autre demi-cercle, & je fais le rectangle SI 12 que j'avois déja une fois, & partant je l'ai deux fois. Au second demi-cercle, les quarrez 8 I, 9 K étant ôtez il m'est resté deux fois le rectangle SI 8 qui est le même que le précedent, & par ainsi j'aurai quatre fois le rectangle SI 8; donc quatre fois ce rectangle sera au quarré de SO, comme le solide de l'anneau est au cylindre total; & au lieu de dire quatre fois le rectangle, je double les lignes ou côtez du rectangle, & je dis que le rectangle tout seul SO par 8 12 est au quarré SO, comme le solide de l'anneau est au cylindre total. Mais tous ces rectangles pris à l'infini sont tous d'égale hauteur entr'eux & avec le parallelogramme total; ils seront donc entre-

eux comme leurs bases ou lignes, c'est-à-dire, comme l'espace de ces lignes comprises dans le cercle est à l'espace des grandes lignes qui composent le parallelogramme : donc comme le solide au cylindre, ainsi le plan du solide est au parallelogramme; ce qu'il falloit prouver.



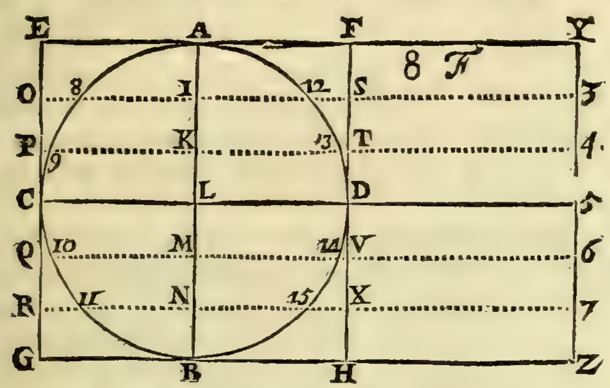
Nous trouverons la même chose en faisant tourner toute la figure sur la ligne YZ. Il faut premierement examiner ce que fait ABZY par sa révolution, & ce qu'il differe d'avec ABHF. Le quarré ZB vaut les quarrez de ZH & HB plus deux fois le rectangle ZHB; le quarré 7N est égal aux quarrez 7X, XN plus deux fois le rectangle 7XN, & ainsi de chacun des autres grands quarrez. Il en faut ôter tous les quarrez qui composent l'espace HY, sçavoir le quarré FY, S3, T4, & les autres, lesquels étant ôtez, resteront le quarré SI plus deux fois le rectangle 3SI, & le quarré de TK plus deux fois le rectangle 4TK; prenant le quarré SI, & le joignant à l'un des rectangles, je ferai le rectangle 3IS, & le rectangle 3SI; puis à 4T, si on joint le quarré de KT à l'un des rectangles, on fera le rectangle 4KT, & le rectangle 4TK. Il faut retenir tout ceci, & passer

à la consideration du solide qui se fait par la revolution de AB GE tournant sur même YZ. Nous disons que le quarré de 3O est égal aux deux quarrez de 3 I & IO plus deux fois le rectangle 3 IO ; que le quarré 4 P vaut les quarrez de 4 K ; KP plus deux fois le rectangle 4 K P, & ainsi des autres. De la valeur de ces quarrez il en faut ôter tous les quarrez qui remplissent l'espace ABZY, sçavoir les quarrez 3 I, 4 K, 5 L, & les autres ; & partant il reste le quarré O I plus deux fois le rectangle 3 I O ; & ajoûtant au rectangle 3 S I qui étoit resté au calcul de l'autre cylindre le quarré OI, je ferai le rectangle 3IO ; & par ainsi dans le précedent cylindre j'aurai deux fois le rectangle 3 I S ; & dans ce dernier, le quarré OI étant ôté, il reste deux fois le rectangle 3IO qui est le même que 3 I S ; partant le tout ensemble sera quatre fois le rectangle 3 I O ; partant le quadruple du rectangle 3IO sera au quarré de EY, comme le cylindre, ou plûtôt le rouleau GEFH est au cylindre total EGZY.

Il faut maintenant considerer ce que fait le cercle par sa révolution, tournant sur la même ligne YZ, & le comparant au cylindre total ; ce qui se doit faire en considérant une portion, sçavoir la moitié de la figure A 12 B 9 A. Nous prendrons donc premierement la moitié A 12 15 B, & dirons : Le quarré de 3 I vaut les quarrez 3 12, & 12 I plus deux fois le rectangle 3 12 I ; le quarré de 4 K vaut les quarrez 4 13, & 13 K plus deux fois le rectangle 4 13 K, & ainsi des autres. De cette équation il faut ôter les quarrez 3 12, 4 13, & tous les autres qui sont hors le cercle. Au rectangle 3 12 I j'ajoûte le quarré I 12, & je fais le rectangle 3 I 12, & le rectangle 3 12 I. J'ajoûte pareillement le quarré K 13 au rectangle 4 13 K, & je fais le rectangle 4 K 13, & le rectangle 4 13 K ; ce qu'il faut retenir afin de l'ajoûter

à

à l'autre moitié que je cherche maintenant, & je dis que le quarré de 3 8 vaut les quarrez de 3 I & I 8 plus deux fois le rectangle 3 I 8; le quarré 4 9 vaut les quarrez 4 K & K 9 plus deux fois le rectangle 4 K 9. Or il faut ajoûter tout ceci à la quantité que j'avois trouvée dans l'autre moitié du cercle, laquelle est le rectangle 3 I 12 & 3 12 I; & ajoûtant au rectangle 3 12 I le quarré 8 I, je fais le rectangle 3 I 8, tellement que j'ai le rectangle 3 I 12 deux fois, & j'ai trouvé en la discussion de la seconde



moitié (les vuides étant ôtez, c'est-à-dire, les quarrez de I 3, K 4 &c.) le quarré 8 I (que j'ai ajoûté au rectangle que j'avois trouvé auparavant) plus deux fois le rectangle 3 I 8 qui est le même que 3 I 12; tellement que j'ai quatre fois le rectangle 3 I 8, qui est au quarré de EY comme l'anneau ou solide fait par le cercle roulant sur YZ, au cylindre total. Le rectangle 4 K 13 pris quatre fois est au même quarré EY comme le solide du cercle est au cylindre total fait par EGZY.

Il faut considerer le rapport que nous avons trouvé du rouleau par le tour du parallelogramme EGHF au grand cylindre. La proportion est comme quatre fois le rectangle 3 I O au grand quarré EY, ainsi le rouleau

EGHF au cylindre total. Pour conclure, nous disons que quatre fois le rectangle 3 I O trouvé dans le rouleau GF, est au grand quarré EY, comme le même rouleau GF au grand cylindre GY. Ensuite j'ai quatre fois le rectangle 3 I 8 qui est au grand quarré EY, comme le solide fait par le cercle A 8 B 12 au cylindre total. Il se trouve que le grand quarré est consequent en l'une & en l'autre des comparaisons; partant les solides seront entr'eux comme les rectangles entr'eux : mais les rectangles sont tous d'égale hauteur; rejettant la hauteur ils seront entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, comme les lignes du cercle aux lignes du rouleau : or ces lignes, en cas d'indivisibles, comprennent l'espace de chaque figure; donc comme le solide ou anneau est au rouleau GF, ainsi le plan A 8 B 12 est au plan GF; ce qu'il falloit démontrer.

Par tout ce discours nous n'avons trouvé que des raisons entre les solides & entre les plans : maintenant nous considerons si les solides sont égaux ou non. Je parlerai premierement du cylindre que fait le parallelogramme EFHG quand il roule sur la ligne FH : sa base est un cercle qui a pour demi-diametre la ligne GH; sa hauteur est la ligne HF : au lieu du cercle je prens ce qui lui est égal, sçavoir le parallelogramme qui a le demi-diametre pour un côté, & la moitié de la circonference pour l'autre; & par ainsi j'ai trois côtez ou lignes, qui me doivent servir pour les comparer avec le solide que je pretens être égal à ce cylindre. Le solide donc a pour base le parallelogramme EFHG, pour hauteur la circonference d'un cercle duquel le demi-diametre est LD. Or les solides, selon Euclide, sont entr'eux en la raison composée de leur base & de leur hauteur; il faut donc considerer ce qu'ils ont de commun. Je trouve que dans le cylindre il y a trois lignes, sçavoir GH, HF, & la

demi-circonference du cercle qui a pour demi-diametre la ligne GH : dans l'autre ſolide j'ai les lignes GH, HF, & la circonférence du cercle qui a pour demi-diametre la ligne LD. Mais dans l'une & dans l'autre j'ai deux lignes communes, ſçavoir GH & HF, entre leſquelles il ne peut avoir autre raiſon que d'égalité, puiſqu'elles ſont égales, & partant on les peut ôter, & la compoſition des raiſons demeurera entre la circonference d'un cercle & la demi-circonference de l'autre. Mais les circonferences ſont entr'elles comme leurs diametres : or le diamétre total du cercle entier qui eſt DC eſt égal au demi-diametre GH; partant la circonference entiere appartenant à DC ſera égale à la demi-circonference appartenant au demi-diametre GH; & par ainſi le cylindre ſera égal au ſolide; ce qu'il falloit prouver.

Maintenant il faut conſiderer toute la figure, lorſque le parallelogramme EYZG ſe tournant ſur la ligne YZ fait le grand cylindre. Je dis que le rouleau GF eſt égal au ſolide qui a pour baſe le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonference d'un cercle qui aura pour demi-diamétre la ligne L 5. Je dis encore que l'anneau (c'eſt-à-dire le ſolide qui ſe fait par la révolution du cercle quand le tout roule ſur YZ) eſt égal au ſolide qui a pour baſe le cercle ACBD, & pour hauteur la circonference d'un cercle qui a pour demi-diametre la ligne L 5.

Pour prouver cette égalité il faut faire voir que les quatre ſolides ſuivans ſont proportionnaux, ſçavoir le rouleau qui ſe fait quand le parallelogramme EFHG roule ſur la ligne YZ. Le ſecond eſt l'anneau qui ſe fait par le cercle quand le grand parallelogramme GY tourne ſur la ligne YZ. Le troiſiéme eſt celui qui a pour baſe le parallelogramme EFHG, & pour hauteur la circonference du cercle dont le demi-diametre eſt la ligne ZB.

Et le quatriéme eſt celui qui a pour baſe le cercle ACBD ; & pour hauteur la circonference du cercle dont le demi-diametre eſt la ligne L 5, & par ainſi, faiſant voir comme le premier deſdits ſolides eſt égal au troiſiéme, le ſecond par conſequent doit être égal au quatriéme. Or nous avons montré que comme quatre fois le rectangle ZBH eſt au quarré de GZ, ainſi le rouleau GF eſt au grand cylindre GY. Maintenant il nous faut examiner comment la figure qui a pour baſe le parallelogramme EF HG, & pour hauteur la circonference du cercle dont le demi-diametre eſt la ligne L 5, eſt égale au même grand cylindre GY.

Nous ſçavons que les ſolides ſont entr'eux en raiſon composée de leur baſe & de leur hauteur : je conſidere quelles ſont les parties de l'un & de l'autre des ſolides, & je trouve que le grand cylindre a deux parties, ſçavoir la ligne GZ qui eſt le demi diametre de ſa baſe qui eſt un cercle, l'autre ligne eſt HF. Mais d'autant que nous avons beſoin de trois côtez en ce ſolide ou grand cylindre, pour le comparer au ſolide qui a pour baſe le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonference du cercle duquel la ligne L 5 eſt demi-diametre, lequel ſolide a trois lignes, ſçavoir GH, HF, & la circonference du cercle qui a L 5 pour demi-diametre. Pour avoir trois côtez au grand cylindre, au lieu de prendre ſon demi-diametre qui repréſente ſon cercle, je prens ce qui eſt égal au cercle, ſçavoir le demi-diametre GZ, & la demi-circonference du même cercle (le rectangle fait de ces lignes eſt égal au cercle ſelon Archiméde.)

J'aurai donc trois côtez ou lignes au grand cylindre, ſçavoir GZ, HF, & la demi-circonference du cercle dont GZ eſt le demi-diametre. Il y a donc dans ces deux ſolides deux côtez qui ſont ſemblables, ſçavoir HF en chacun d'iceux ; & partant ils ne ſervent de rien pour la

composition des raisons qui demeurera entre les lignes GH, GZ antécedent & consequent, & la circonference entiere du cercle qui a L 5 pour demi-diametre, à la demi-circonference du cercle qui a GZ pour demi-diametre. Mais d'autant que les circonferences sont entr'elles comme leurs diametres, au lieu des circonferences je prens le diametre entier qui est deux fois L 5, & pour la demi-circonference je pose son demi-diametre GZ; partant la raison sera composée des raisons de la ligne CH à GZ, & de la ligne L 5 doublée à la ligne GZ.

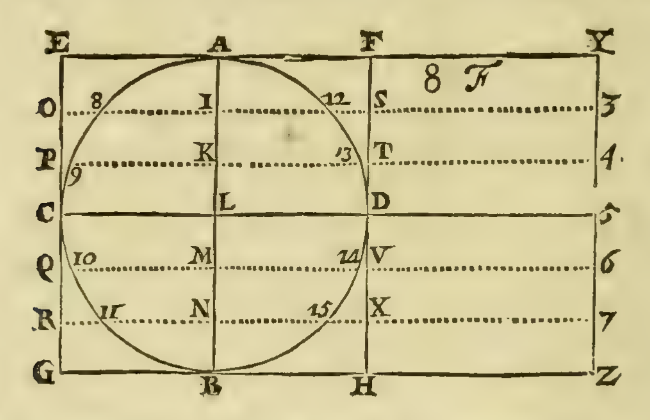
Or si on multiplie les antécedens l'un par l'autre, & pareillement les consequens, on aura ladite raison composée; donc GZ par GZ, c'est-à-dire le quarré de GZ est au rectangle de GH par le double de L 5 ou ZB en ladite raison composée; partant les solides seront entr'eux comme le rectangle de ZB deux fois par GH au quarré de GZ. Au lieu de ZB deux fois par GH, on prendra GH deux fois par ZB: or ZB par GH deux fois, est quatre fois le rectangle ZBG; partant le solide qui a pour base le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonference du cercle qui a L 5 pour demi-diametre est au cylindre total, comme quatre fois le rectangle ZBG est au quarré GZ; donc le rouleau & le solide auront même raison au cylindre total; & par ainsi le rouleau qui se fait quand le parallelogramme EFHG roule sur la ligne YZ est égal au solide qui a pour base le même parallelogramme EFHG, & pour hauteur la circonference du cercle qui a pour demi-diametre la ligne ZB.

Puisque ces deux solides sont égaux, qui sont le premier & le troisiéme dans les quatre proportionnaux, les deux autres qui sont le second & le quatriéme seront aussi égaux entr'eux. Ces deux solides sont l'anneau qui se fait par le cercle, quand le grand parallelogramme tour-

ne ſur la ligne YZ : l'autre ſolide eſt celui qui a pour baſe le cercle ACBD, & pour hauteur la circonferen-ce du cercle duquel le demi-diamétre eſt la ligne L 5.

Il faut maintenant voir ce qui ſe fait quand le roulement ſe fait ſur la ligne AB. Nous avons ici repreſenté la figure comme un cercle ; le même ſe doit entendre d'une ellipſe : & partant il faut voir ce que fait la ſphére qui ſe forme par la révolution du demi-cercle ABC ſur le diametre AB, ou le ſphéroïde qui ſe forme par la révolution de la demi-ellipſe ſur la même ligne AB.

Il faut entendre que le quarré I 12 eſt au quarré de K 13, comme le rectangle BIA eſt au rectangle BKA,



& le quarré K 13 eſt au quarré LD, comme le rectangle BKA au rectangle BLA, & ainſi des autres, tant au cercle qu'en l'ellipſe. Or, tant la ſphére que le ſphéroïde qui ſont formez par le roulement, ſont au cylindre qui ſe fait en même temps, comme tous les quarrez I 12, K 13 & autres petits au grand quarré BH pris autant de fois. Mais pour la raiſon des petits quarrez, j'ai pris la raiſon des petits rectangles qui eſt la même : il faut donc avoir un grand rectangle pour le comparer aux petits

rectangles, afin de laiſſer les grands quarrez. Je prendrai le rectangle BLA qui vaut le quarré de LD ou MV, ſçavoir les grands quarrez; & pour faire la comparaiſon, je dis que le rectangle BIA avec le quarré de LI eſt égal au quarré de LA ou LD ſon égal, ou quelqu'autre des grands quarrez; le rectangle BKA plus le quarré de LK eſt égal au même grand quarré LD, & ainſi de tous les petits rectangles qui ſe pourront faire; partant les grands quarrez excéderont les petits rectangles de tous les petits quarrez LI, LK qui vont toûjours en diminuant, & par ainſi font une pyramide que nous ſçavons être la troiſiéme partie de ſon parallelipipede ou cube. Si donc nous ôtons le tiers, il reſtera les deux tiers pour la valeur de la ſphére ou ſphéroïde, qui ſeront par cette raiſon les deux tiers de leur cylindre; ce qu'il falloit prouver.

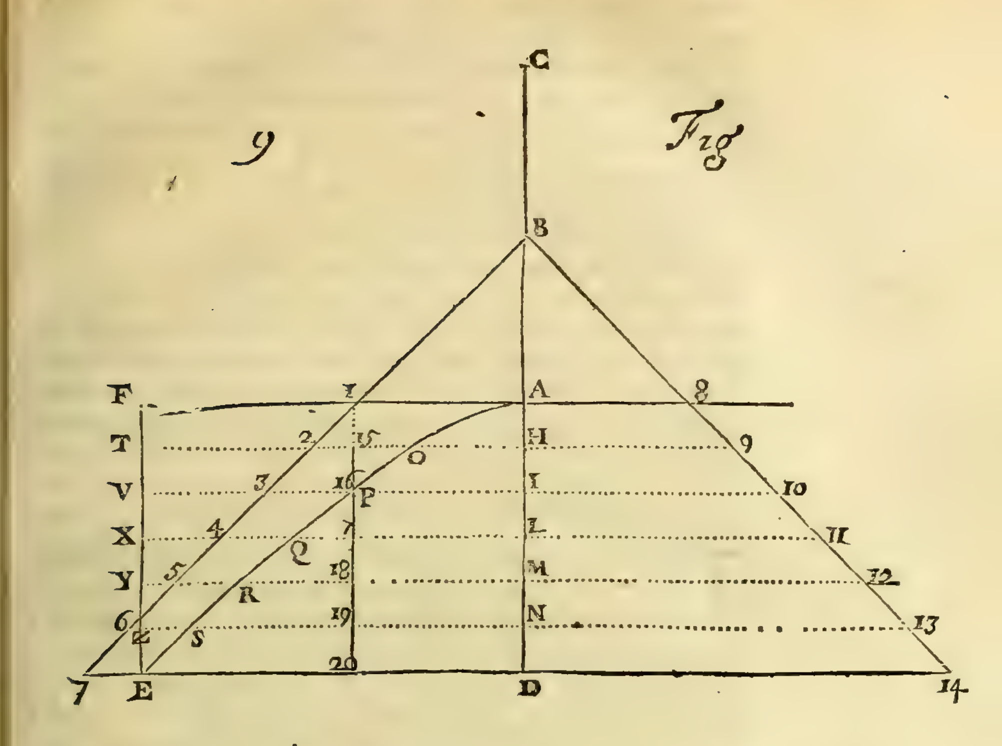
DE L'HYPERBOLE.

DANS l'Hyperbole AEDBC le ſommet eſt C, c'eſt-à-dire que du point C on commenceroit l'hyperbole oppoſée; AC eſt le diametre tranſverſal coupé en deux au point B qui s'appelle le centre de l'hyperbole. Il faut voir quand l'hyperbole tourne ſur la ligne AD, qui eſt l'axe, quelle raiſon le ſolide ou conoïde hyperbolique qui ſe fait, peut avoir avec ſon cylindre, c'eſt-à-dire, le ſolide qui ſe fait quand le parallelogramme FD tourne auſſi ſur l'axe AD.

Nous ſçavons que le conoïde eſt au cylindre, comme tous les quarrez enſemble compris dans l'eſpace AED, ſçavoir le quarré de HO, de IP, LQ, & les autres, ſont au quarré de ED pris autant de fois qu'il y en a de petits. Il reſte à chercher la raiſon des quarrez entr'eux avec le grand.

La proprieté de l'hyperbole eſt que le quarré HO eſt au quarré IP, comme le rectangle CHA eſt au rectangle CIA; le quarré IP eſt au quarré LQ, comme le rectangle CIA au rectangle CLA, & ainſi des autres; & par ainſi tous les petits rectangles ſont au grand rectangle CDA pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme tous les petits quarrez ſont au grand quarré pris autant de fois qu'il y en a de petits. Mais pour ſçavoir quelle eſt cette raiſon, je change les petits rectangles en leurs égaux, & au lieu du rectangle CHA je poſe le rectangle CAH plus le quarré HA; au lieu du rectangle CIA, je poſe le rectangle CAI plus le quarré IA, & ainſi des autres; pour le grand, il n'y faut rien changer. On fera enſuite la comparaiſon, premierement des rectangles CAH, CAI, & des autres petits entr'eux & au grand CDA pris autant de fois qu'il y en a de petits; & nous trouvons que tous les petits rectangles ſont de même hauteur, ſçavoir CA, & par ainſi, ils ſeront entr'eux comme leurs baſes. Nous avons donc pour les petits rectangles un ſolide qui a pour hauteur la ligne CA, & pour baſe tous les nombres naturels qui compoſent un triangle. Si au lieu de la ligne CA je prens ſa moitié AB, j'aurai un ſolide qui aura pour baſe le quarré de AD, & pour hauteur la ligne BC; ceci eſt pour les petits rectangles. Pour le grand rectangle, ſon ſolide a pour hauteur DC, & pour baſe DA pris autant de fois qu'il y a de petits rectangles, c'eſt-à-dire le quarré DA; partant les deux ſolides ont tous deux le même quarré DA pour baſe; & partant nous n'avons à conſiderer que leur hauteur DC pour le grand, & BC pour le petit; partant tous les petits rectangles ſont au grand rectangle pris autant de fois, comme DC eſt à BC.

Il reſte maintenant à conſiderer comment tous les petits quarrez ſont au même grand rectangle. Or tous les



petits quarrez, ſçavoir ceux de AH, AI, AL, AM, AN, ſont une pyramide qui a pour baſe le quarré de AD, & pour hauteur la même AD. (car les quarrez diminuez à l'infini font une pyramide) Mais la pyramide eſt le tiers de ſon parallelipipede; c'eſt-à-dire du ſolide qui a pour baſe le même quarré que la pyramide, & qui ſe hauſſe autant que la pyramide, ſçavoir de la ligne DA; donc au lieu de la hauteur DA, j'en prens le tiers, & j'ai le ſolide qui a pour baſe le quarré DA, & pour hauteur le tiers de DA; joignant donc ce tiers de DA

avec BC que j'avois trouvé devant, j'ai le tiers de DA plus BC ou AB son égale, à la toute DC.

Pour le faire plus élegamment, je dirai : Comme le tiers de AG (car j'ai ajoûté à AC la ligne CG égale à BC) avec le tiers de DA qui est comme le tiers de DG à la ligne DC; ainsi le conoïde hyperbolique ou petit solide est au cylindre fait par AFED. Que si nous voulons avoir la raison du cône qui se feroit, si le triangle AED se tournoit sur la ligne DA (pour avoir ce triangle il faut tirer la ligne droite AE.) Euclide dit que le cône est le tiers de son cylindre : prenant donc le tiers de la ligne DC, elle sera au tiers de la ligne DG, ou toute la ligne DC à toute la ligne DG, comme le cône au conoïde hyperbolique ; ce qu'il falloit montrer.

Autre spéculation sur l'Hyperbole.

DU centre de l'Hyperbole B j'ai tiré les asymptotes B 7, B 14. Si par le point A je tire la touchante 8 A 1, & que je tire d'un asymptote à l'autre infinies paralleles, comme les lignes 9 H 2, 10 I 3, & les autres, le rectangle 8 A 1 est égal au rectangle 9 O 2, 10 P 3; & ainsi tous ces rectangles sont égaux entr'eux. Quand le triangle B 7 D tourne sur DA, il se fait un cône qui est égal à tous les quarrez qui sont dans le plan, sçavoir au quarré de A 1, H 2, I 3, & à tous les autres, & dans le plan 1 B A. Si donc de tous ces quarrez j'en ôte premierement le vuide 1 B A, & tout ce qui est au dehors du plan EDA, il me restera le conoïde hyperbolique qui se fait par EDA tournant sur DA. Or le quarré H 2 vaut le rectangle 9 O 2 plus le quarré de HO; le quarré I 3 vaut le rectangle 10 P 3 plus le quarré de IP; le quarré de L 4 vaut le rectangle 11 Q 4 plus le quarré de LQ, & ainsi des autres. Mais chacun des re-

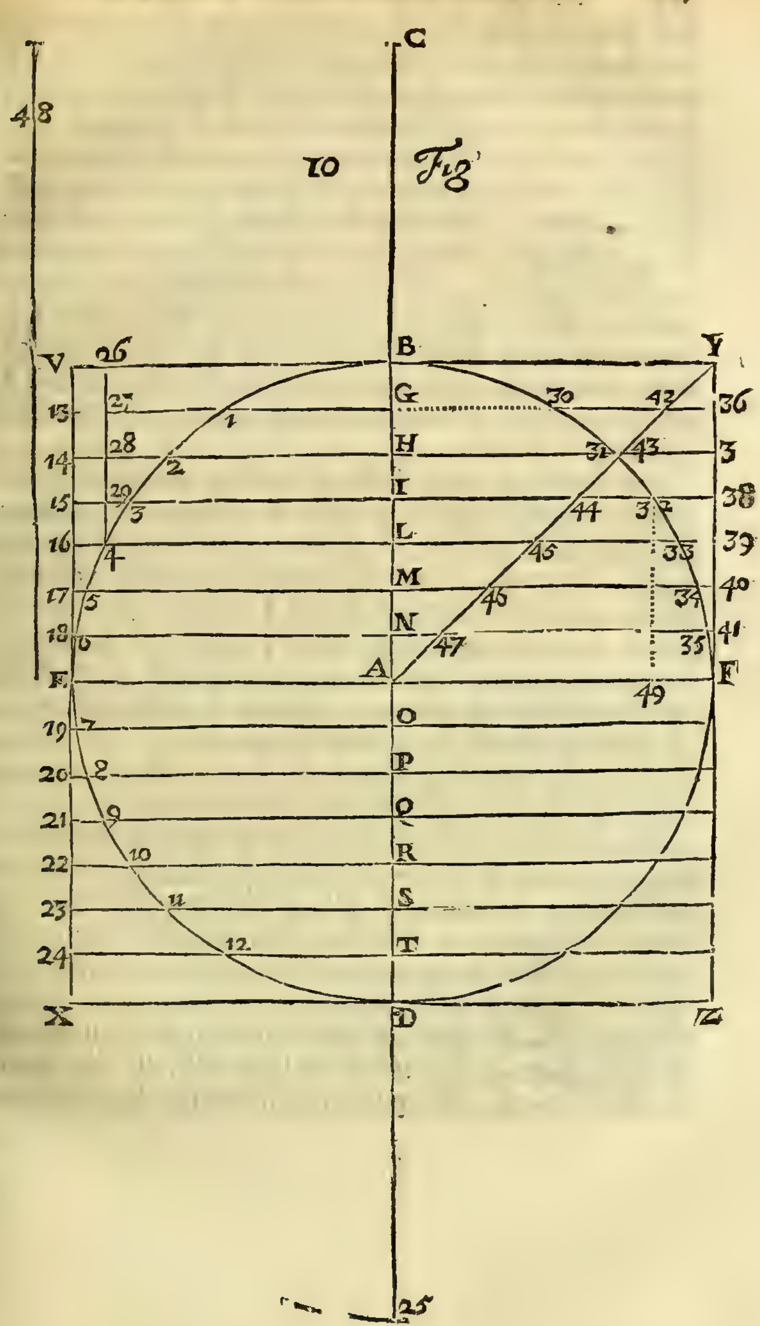
ctangles eſt égal au quarré de A 1, lequel pris autant de fois qu'il y a de rectangles, fera le cylindre 1 20 DA; partant ôtant ce cylindre, il reſtera les quarrez de HO, IP, LQ, qui ſont égaux au conoïde hyperbolique; ce qu'il falloit montrer.

PROPORTION DE LA SPHERE ou Sphéroïde, ou de leurs portions, au Cylindre circonſcrit, & au Cône inſcrit.

ON conſiderera ici ce que fait la figure qui eſt en la page ſuivante tournant ſur BD, & ne prenant que la portion 26 B L 4 que fait le cylindre & la portion de la Sphére ou Sphéroïde qui ſe fait par la révolution de la figure 4 1 B L. Le quarré de G 1 & les autres petits ſont au grand quarré 4 L pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme la portion de la ſphére ou ſpéroïde (car c'eſt la même raiſon en l'une & en l'autre) eſt au cylindre 26 B L 4. Il eſt donc queſtion de chercher la raiſon de ces petits quarrez au grand quarré. Or tous les petits quarrez ſont au grand, comme les rectangles DLB, DIB, DHB, DGB ſont au grand rectangle D L B; partant tous leſdits petits rectangles ſont au grand rectangle DLB pris autant de fois, comme tous les petits quarrez ſont au grand quarré pris autant de fois. Pour trouver la raiſon des petits rectangles au grand rectangle pris autant de fois, je change la valeur des petits rectangles en d'autres qui vaillent autant, & je dis ainſi : Le rectangle DBL moins le quarré BL vaut le rectangle DLB; le rectangle DBG moins le quarré BG vaut le rectangle DGB; le rectangle DBH moins le quarré BH vaut le rectangle DHB; le rectangle DBI moins le quarré BI vaut le rectangle DIB; partant dans les petits rectangles je trouve un ſolide qui a pour hauteur

DB, & pour baſe les petites lignes LB, LG, LH, LI qui ſont la ſomme de nombres naturels qui eſt un triangle lequel eſt toûjours la moitié de ſon quarré; partant je double le triangle pour avoir le quarré; & par ainſi j'aurai un ſolide qui aura pour hauteur DA moitié de DB (car doublant le triangle j'ai ôté la moitié de DB) & pour baſe le quarré de LB comme l'autre ſolide. Pour le grand rectangle, ſçavoir DLB pris autant de fois, il compoſe un ſolide qui a pour hauteur la ligne DL, & pour baſe le même quarré LB. Les baſes étant égales, il n'y a que les hauteurs à conſidérer, ſçavoir DB & BL. Mais il faut ôter des petits rectangles les quarrez qui étoient de moins : or ces petits quarrez compoſent une pyramide qui a pour baſe le quarré de LB, & pour hauteur LB. Au lieu de la pyramide je prens un parallelipipede qui lui ſoit égal : je retiens le même quarré LB, & pour hauteur le tiers de LB, qui eſt la hauteur du parallepipede égal à la pyramide (car toute pyramide eſt le tiers de ſon parallelipipede.) Il faut ôter ce ſolide de l'autre qui a même baſe, & partant il ſuffit d'ôter la hauteur du dernier de la hauteur de l'autre. Voilà touchant le ſolide fait par les petits rectangles. Il reſte maintenant à chercher le ſolide du grand rectangle. Or ce ſolide n'eſt autre que celui qui a le quarré LB pour baſe, & DL pour hauteur. Celui-ci n'a point d'autre baſe que les autres, partant nous ne regarderons que la hauteur DL en celui-ci, puis nous dirons que comme le tiers de la ligne 25 L (car DA moins le tiers de LB vaut le tiers de la ligne 25 L) eſt à la ligne DL, ainſi le ſolide fait par la figure 42 BL eſt à ſon cylindre fait par le parallelogramme 264 LB.

Que ſi nous voulons avoir le cône qui ſe feroit par la même révolution, ſi on tiroit une ligne B4. Nous ſçavons que le cône eſt le tiers de ſon cylindre; je pren-


C
48
10
Fig
V
26
B
Y
G
H
I
L
M
N
A
E
F
O
P
Q
R
S
T
X
D
Z
25

drai donc le tiers de DL (laquelle repréſente le cylindre) & je dirai que comme le tiers de la ligne 25 L eſt au tiers de la ligne DL, ainſi notre ſolide eſt au cône: or qui dit le tiers d'une ligne au tiers d'une autre, dit la ligne entiere à la ligne entiere; partant le ſolide ſera au cône, comme la ligne 25 L eſt à la ligne DL; ce qu'il falloit trouver. Dans la même figure il faut conſiderer que, lorſqu'elle tourne ſur la ligne AB quand le cylindre VEFY ſe fait, il ſe fait auſſi un ſolide par la révolution du plan ABF, qui s'appelle un creux. Il ſe fait encore un autre ſolide par le plan B 30 FY. Nous en avons encore un autre qui ſe fait ſur le triangle AYB qui eſt un cône. Il faut voir quel rapport ont entr'eux tous leſdits ſolides.

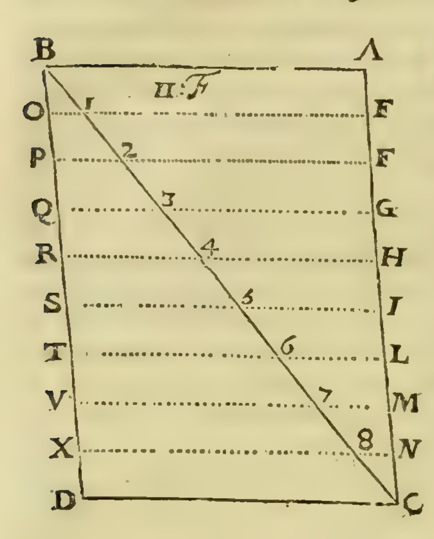
Les diviſions étant faites à l'infini, & toutes les lignes tirées telles qu'on les voit en la figure, les figures ſont entr'elles comme les quarrez de ces lignes ſont entr'eux. Or pour ce qui eſt du cône que nous voulons égaler au ſolide fait par B 30 FY, il faut dire que la grande ligne du cylindre total eſt coupée en deux également au point I, ſçavoir la ligne 15 I 38, & en deux parties inégales au point 32; partant le rectangle 15 32 38 avec le quarré I 32, vaut le quarré I 38. Si donc du quarré I 38 j'ôte le quarré I 32, il me reſte le rectangle 15 32 38 qui appartient au ſolide B 30 FY.

Puis après nous entrons dans les proprietez de l'ellipſe; (car ce que je conclurai s'entendra du cercle comme de l'ellipſe.) Le diametre EF, le diametre BD & le côté droit du diametre EF, ſçavoir la ligne 48, ſont trois proportionelles; & la premiere EF eſt à la troiſiéme 48, comme le quarré de la premiere EF eſt au quarré de la ſeconde DB. De plus, le rectangle E 49 F eſt au quarré de l'ordonnée 49 32 comme la ligne EF eſt à la ligne 48 côté droit d'icelle; partant le rectangle E 49 F eſt au

quarré 49 32, comme le quarré EF eſt au quarré DB, ou le quarré de AF au quarré de AB. Au lieu de AF je poſe ſon égale BY; donc le quarré BY eſt au quarré BA, comme le rectangle E 49 F au quarré 49 32; ou bien prenant leurs égaux, le rectangle 15 32 38 au quarré IA égal au quarré 49 32. Mais le quarré BY eſt au quarré BA, comme le quarré I 44 eſt au quarré IA; partant le rectangle 15 32 38 ſera au quarré IA, comme le quarré I 44 eſt au même quarré IA; partant le rectangle 15 32 38 ſera égal au quarré I 44; & par ainſi le cône ſera égal au ſolide de B 30 FY. Mais le cône eſt le tiers de ſon cylindre; ſi donc j'ôte le tiers du cylindre total, il reſtera les deux tiers pour le ſolide ou le creux qui ſe fait par le plan AFB, qui eſt ce qu'on cherchoit.

Or, non-ſeulement le cône eſt égal au ſolide extérieur, mais chaque partie eſt égale à chaque partie; c'eſt-à-dire que le ſolide fait par N 47 46 M, eſt égal au ſolide fait par 35 41 40 34; le ſolide 45 LM 46 eſt égal au ſolide 33 39 40 34, & ainſi des autres. Par tout ceci nous venons à la connoiſſance du centre de gravité de tous ces ſolides; car le centre de gravité du cylindre AY eſt au milieu de la ligne AB: or le centre de gravité du cône eſt aux $\frac{3}{4}$ de la ligne AB; le centre de gravité du ſolide qui lui eſt égal, ſe trouve au même lieu dans la ligne BA aux $\frac{3}{4}$ d'icelle; partant, ſelon Archiméde, le centre de gravité de la ſphére ou ſpéroïde reſtant du cylindre ſera connu, parce qu'il eſt en la raiſon réciproque des deux ſolides, ſçavoir de la ſphére ou ſphéroïde, au ſolide de dehors, c'eſt-à-dire à B 30 FY, aux lignes qui ſont depuis le centre de gravité du grand cylindre, au centre de gravité du petit ſolide, & à la ligne qui part du centre de gravité du même grand cylindre au centre de gravité de la figure reſtante que je cherche, qui eſt de la ſphére ou ſphéroïde.

PROPORTION DU COSNE au Cylindre.



EN cette figure le triangle est au parallelogramme, comme tous les nombres naturels sont au quarré du plus grand; c'est-à-dire, comme 1 à 2. Que si vous le faites tourner sur la ligne BD, le cône qui se fera de BDC sera au cylindre qui se fera sur ABDC comme 1 à 3 selon Archiméde.

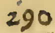
DE LA CONCHOÏDE.

NOUS considerons premiérement le grand triligne A 7 14. Le centre de la conchoïde est A; la conchoïde 14 7 est la premiere, & la seconde conchoïde est 16 17; la régle qui les sépare BC; les lignes qui partent de cette régle ou ligne & qui vont aux deux conchoïdes, sçavoir C 7, M 6, L 5, & les autres, sont toutes égales entr'elles, & pareillement les lignes C 17, M 22, L 19 sont égales entr'elles & aux autres ci-dessus, sçavoir à C 7, M 6, &c. Nous disons donc ainsi:

Le grand triligne est divisé (selon les indivisibles) en secteurs semblables infinis qui ressemblent aux triangles, mais

mais par les indivisibles nous les prenons pour secteurs : or les secteurs semblables sont entr'eux comme leurs quarrez ; nous devons donc chercher la raison & la valeur des quarrez pour tirer nos conséquences. Au lieu de chaque quarré nous considerons son égal ; & par ainsi nous trouvons que le quarré A 7 vaut les quarrez AC, C 7 plus deux fois le rectangle AC 7 ; le quarré A 17 vaut les quarrez AC, C 7 ou C 17 moins le rectangle AC 17 pris deux fois. Tout ceci mis ensemble vaut le quarré C 7 deux fois, plus le quarré AC deux fois, les rectangles qui sont par plus & moins se détruisant l'un l'autre ; or ces quarrez nous représentent les deux trilignes, sçavoir A 7 14, & A 17 16.

Je dis que le grand triligne A 7 14, & le petit A 17 16 sont égaux à deux fois les quarrez AC, & C 7. [La petite figure qui est ici a été faite, d'autant que dans l'espace C 7 B 14 il n'y a point de secteurs qui remplissent ledit espace, mais seulement des quarrez qui sont entr'eux comme les secteurs. Je prens donc des secteurs tous semblables, dont les angles soient égaux aux angles en A, & la hauteur égale aux lignes C 7, M 6, & autres : ces secteurs sont au grands secteurs ; comme les quarrez de C 7, M 6, L 5, & autres, sont aux grands quarrez A 7, A 6, A 5, & autres.] Ayant donc l'égalité susdite entre les trilignes A 7 14 & A 17 16, & les quarrez AC & C 7 pris deux fois : au lieu des quarrez C 7 je prens des secteurs semblables, qui garderont la même raison entr'eux que lesdits quarrez ; partant au lieu de dire, deux fois les quarrez C 7, M 6, & les autres, je prens deux fois les secteurs compris dans la petite figure T V Y X, & je dis, deux fois les petits secteurs avec deux fois le triangle ACB sont égaux au triligne A 7 14, & au triligne A 17 16 ; & c'est ici la premiere conséquence ou conclusion.



12. Fig.

Pour la ſeconde, c'eſt quand nous ôtons du grand triligne A 7 14 le petit triligne A 17 16, alors nous avons d'un côté l'eſpace 16 17 7 14 pour comparer avec deux fois les petits ſecteurs, le triangle ABC, & l'eſpace 16 17 CB. Alors l'eſpace d'une conchoïde à l'autre, c'eſt-à-dire 16 17 7 14, eſt égal à deux fois les petits ſecteurs plus deux fois l'eſpace 16 17 CB; & c'eſt ici une autre concluſion.

J'avois omis de dire que quand du grand triligne & du petit triligne j'en ôte le petit, il reſte le grand A7 14 qui eſt égal à deux fois les petits ſecteurs, au triangle ACB & à l'eſpace 16 17 CB, qui eſt une autre concluſion.

Que ſi on veut retrancher du grand triligne A 7 14 le triangle ACB, il reſtera l'eſpace 7 C B 14 qui ſera égal à deux fois les petits ſecteurs avec une fois CB 16 17, qui eſt une quatriéme concluſion.

Maintenant il nous faut voir quelle raiſon il y a entre le triangle ABC & l'eſpace B C 7 14. Cela ſe fera conſidérant le quarré A 7 duquel nous ôterons le quarré AC. Ayant donc diviſé le triligne A 7 14 en ſecteurs tous ſemblables & infinis, ainſi qu'il a été fait ci-deſſus aux autres concluſions, & ſçachant que les ſecteurs ſont entr'eux comme leurs quarrez, nous diſons que le quarré A 7 eſt égal aux quarrez AC & C 7 plus le rectangle A C 7 pris deux fois. Si j'en ôte le quarré AC, il me reſte le quarré C 7 plus le rectangle AC 7 deux fois. Il faut conſidérer quels ſolides ils font.

Tous les quarrez C 7, M 6, & les autres ſont tous égaux; & par ainſi tous joints enſemble font un parallelipipede ou ſolide qui a pour hauteur & largeur la ligne C 7, & pour longueur une ligne telle qu'on voudra, ſçavoir autant qu'on aura pris de fois & ajoûté les quarrez l'un à l'autre; c'eſt le premier ſolide qui ſe forme.

L'autre se fait du rectangle AC7 pris autant de fois que les susdits quarrez, & forme un solide qui a pour hauteur C 7 comme l'autre, mais sa longueur est diverse, sçavoir des lignes AC, AM, AL, & des autres qui toutes sont inégales.

Or ces deux solides se doivent mettre ensemble afin de les comparer à celui qui est composé des quarrez AC, AM & autres qui tous sont inégaux; & partant ce solide sera racourci de deux côtez. Or ce solide se peut considérer comme si j'avois fait un cercle du centre A & de l'intervale AD : car alors la ligne BC sera une touchante dudit cercle au point D; la ligne AD sera le sinus total; & les lignes AN, AO, AP seront toutes des sécantes, & ainsi le solide sera formé des quarrez des sécantes. Or ces deux solides étant de même hauteur, sçavoir de la ligne C 7 & autres, il est aisé de les joindre ensemble, & de tous deux en faire un solide composé de tous les quarrez C 7, M 6, &c. d'une part, & de la ligne C7 multipliée par la somme des lignes AC, AM, & les autres prises deux fois (parce que le rectangle AC 7 est deux fois dans le quarré A 7) c'est-à-dire, qu'il faut doubler les lignes AC, AM, & autres.

Le solide qu'il faut comparer à celui-ci est fait par la somme des quarrez des lignes AC, AM, & des autres qui toutes sont inégales. Nous disons donc, Comme le solide fait par la somme des quarrez AC, AM, & autres, est au solide composé des deux ci-devant mis; ainsi le triangle ABC est à la figure C 7 14 B. Mais dans le premier solide les lignes C 7, M 6 me sont données, & partant leurs quarrez : de plus les lignes AC, AM, & autres me sont aussi données, d'autant que la lignes AD (que je prens pour sinus total ou demi-diametre d'un cercle que je feins être fait) m'est donnée, & la ligne DE sur lesquelles j'ai formé ma conchoïde; & par le

moyen de AD ſinus total & de l'angle BAD, je connois toutes les ſécantes de ce cercle que je poſe être décrite ſur le rayon à AD : ces ſécantes ſont AN, AO, AP, & les autres qui ſuivent. Dans le dernier ſolide tous les quarrez de AC, AM me ſeront donnez, puiſque les lignes ſont données ; & ainſi je joins les quarrez C 7, M 6 avec le rectangle fait de AC doublé & C 7, le tout pris autant de fois qu'il y a de quarrez. Or CA, & MA ſont ſécante ; donc par le calcul il nous ſera facile d'en trouver la valeur que nous comparerons avec le ſecond ſolide qui eſt compoſé de l'aggregé ou ſomme des quarrez des ſécantes ; & telle ſera la raiſon de ABC à l'eſpace BC 7 14.

TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT un eſpace égal à un Quarré donné, & ce d'un ſeul trait de Compas.

ON demande qu'il ſoit tracé ſur un cylindre droit d'un ſeul trait de compas un eſpace égal au quarré de la ligne AB. Pour le faire je coupe en deux également la ligne AB au point C, & je décris le cercle FME, le diametre duquel FE ſoit égal à AC. Sur ce cercle j'éleve un cylindre dont la hauteur ſoit du moins le double de FE, & au milieu de cette hauteur ſoit le point F ; puis ouvrant le compas de l'intervale FE, je décris un eſpace ſur la ſuperficie du cylindre. Je dis que cet eſpace vaut le quarré de AB.

Pour le prouver, je diviſe le cercle en parties infinies aux points EGHI & autres : de chacun de ces points j'éleve des perpendiculaires au plan du cercle en nombre infini, comme les points ſont infinis : du point E qui eſt l'extrémité du diamétre, je tire à chaque point de la diviſion des lignes droites EG, EH, EI, &

autres qui ſont dans le demi-cercle ELF. Or toutes ces petites lignes ſont des ſinus du quart d'une circonférence ; ce qui ſe connoîtra, faiſant du rayon FE & du centre F un cercle qui ait pour diametre le double de EF ; mais ici je me contente de la quatriéme partie de la circonférence. Si donc du centre F je tire des lignes en nombre infini qui ſoient toutes égales à FE, elles iront juſques à la circonférence de ce cercle, & couperont toutes les petites lignes EG, EH & les autres à angles droits, car l'angle ſe trouve dans le demi-cercle ELF ; & partant toutes les petites lignes ſont les ſinus du quart d'une circonférence.

Nous ſçavons que le demi-diametre du cercle eſt au quart de la circonférence, comme tous les petits ſinus ſont au ſinus total pris autant de fois. Nous ſçavons auſſi que le quarré du demi-diametre eſt égal à la figure qui eſt faite par les infini petits ſinus qui diviſent ce quart de circonférence. Or le demi-diamétre eſt FE qui eſt égal à la ligne droite AC moitié de AB ; partant ſon quarré quatre fois vaudra le quarré de AB. Or les ſinus EG, EH, &c. ſont égaux aux perpendiculaires élevées des points GH, &c. juſques au retranchement fait par le compas, comme il ſera montré ; & par ainſi la figure ou l'eſpace tracé par le compas qui eſt ouvert de la grandeur EF, l'un des pieds poſé ſur F qui eſt un point pris en quelque endroit que ce ſoit de la ſurface du cylindre, & l'autre pied, par exemple ſur le point E, & tournant ſur la ſuperficie du cylindre tant qu'il revienne au même point E : cet eſpace compris ſur le cylindre vaut quatre fois l'eſpace compris des petits ſinus qui diviſent le quart de la circonférence ; car le compas parcourt les quatre quarts de la circonférence du cylindre, s'il ſe peut ainſi dire. Or le cylindre eſt préſumé prolongé tant en haut qu'en bas autant qu'il

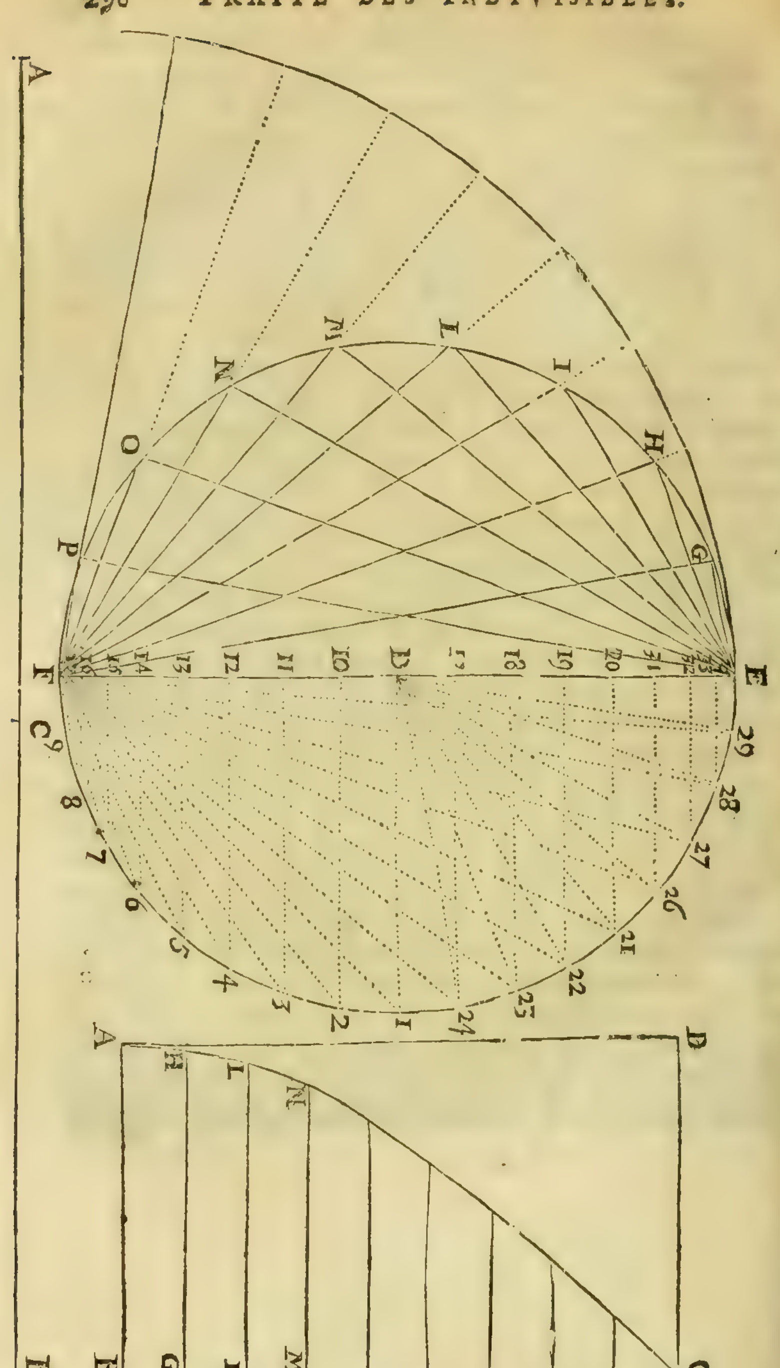
faudra, dessus & dessous ledit point F, & le cercle FME parallele à sa base pour satisfaire à la question.

Reste à montrer que la ligne EH est égale à la perpendiculaire élevée du point H, quand elle a été retranchée par le compas ouvert de la grandeur FE. Pour cet effet, il faut tirer la ligne FH, & concevoir deux triangles, l'un de la ligne FH & FE portée à l'extrémité de la perpendiculaire tirée du point H, & qui monte vers le haut du cylindre & de ladite perpendiculaire qui sort de H jusques au retranchement fait par FE portée sur la surface du cylindre. Ces trois lignes font un triangle rectangle qui est égal au triangle FEH; car en tous les deux triangle la ligne FH est commune; l'angle en H est droit, car il se fait de la ligne FH & de la perpendiculaire sur le point H en l'un des triangles, sçavoir en celui qu'on veut montrer égal à FEH & pareillement l'angle en H de l'autre triangle FEH est droit, étant dans le demi-cercle; la ligne FE qui a coupé la perpendiculaire élevée sur le point H est égale à FE; partant la ligne EH est égale à ladite perpendiculaire qui part du point H, & qui est coupée par la ligne FE par la révolution du compas. Le même se prouvera de toutes les autres lignes, EG, EI, EL, EM, & autres.

On considere ici deux triangles qu'on veut prouver être égaux : l'un est FHE; l'autre a pour base FH, pour catet la perpendiculaire tirée du point H jusques au retranchement fait par le compas, & l'hipotenuse sera égale à FE, puisque c'est l'ouverture du compas.

Or cette figure se trouve être la même que la troisiéme figure ci-devant, si on suppose que la circonférence EHLF est égale à BC dans la troisiéme figure*, & qu'elle est divisée infiniment en sinus GE, HE; IE, & les autres, tout ainsi que la ligne BC de la troisiéme figure est divisée en sinus infinis, sçavoir GH, IL, MN, &c. Or nous devons considérer cette troisiéme figure ou bien la présente, car il n'importe pas, & voir ce qu'elles font. Par exemple, quand la troisiéme figure tourne sur la ligne BC, elle fait un cylindre avec le rectangle BD, & un autre solide avec la figure courbe

ACB


A
B
C
D
E
F
G
H
I
L
M
N
O
P

ACB. Je trouve que le cylindre eſt double du petit ſolide fait de la figure courbe. Pour le prouver je me ſers de la treiziéme figure préſente, & je feins avoir tiré une infinité de lignes du point F à tous les points, comme FP, FO, FN, & autres, qui ſont toutes égales aux premieres tirées du point E aux mêmes points, ſçavoir à EG, EH, EI, &c. Je dis enſuite que les quarrez de GE & GF ſont égaux au quarré de FE : il en eſt de même des quarrez de EH & HF, & ainſi des autres ; partant tous ces quarrez enſemble ſeront égaux au quarré de EF pris autant de fois. Mais dans ces petits quarrez je n'ai beſoin que de ceux qui compoſent la figure, ſçavoir des quarrez de EG, EH, EI, & autres tirez du point E, qui font la moitié de tous ceux que j'avois comparez avec le grand quarré FE ; partant tous ces petits quarrez ſeront à autant de fois le grand quarré FE comme la moitié au tout. Mais les ſolides ſont entr'eux comme tous les quarrez pris enſemble ; partant le petit ſolide fait de la figure courbe ABC en la troiſiéme figure, ſera au cylindre fait de BD, comme 1 à 2 ; ce qu'il falloit démontrer.

On conſidérera encore en la même figure un autre trait de compas. Je poſe une des pointes ſur le point F que je prens dans la circonférence du cercle F 1 E L, lequel cercle eſt la baſe mitoyenne du cylindre qu'on ſuppoſe toûjours prolongé en haut & en bas autant qu'il eſt neceſſaire. On met donc l'un des pieds du compas en F, & l'ouverture d'icelui eſt F 1 qui eſt la ſoutendante du quart de la circonférence totale F 5 1. Or cette circonférence eſt diviſée en parties égales & infinies aux points 2, 3, 4, &c. ſur chacun deſquels j'éleve des perpendiculaires, comme ci-devant : des mêmes points je tire des perpendiculaires ſur le demi-diametre FD qui le diviſent en une infinité d'autant de parties inégales.

Il faut maintenant considérer les proprietez de toutes ces lignes. Nous voyons qu'il se fait plusieurs triangles rectangles dont les côtez sont F2, F1, & la perpendiculaire sur le point 2, laquelle est en l'air ; le second, F3, F1, & la perpendiculaire en l'air sur le point 3 ; F4, F1, & la perpendiculaire en l'air sur le point 4, & cette perpendiculaire tirée en l'air s'augmente à mesure que la soutendante diminuë. Car les quarrez des deux lignes F2, & la perpendiculaire en l'air sur le point 2, sont égaux au quarré de F1 ; les quarrez de F3, & de la perpendiculaire sur 3 en l'air sont égaux au même quarré F1, & ainsi des autres. Mais le quarré F1 est égal au rectangle EFD, le quarré F2 est égal au rectangle EF 10, le quarré F3 au rectangle EF 11, & ainsi des autres quarrez & rectangles, partant tous les rectangles EFD, EF 10, EF 11, & les autres, sont entre-eux comme les quarrez F1, F2, F3, &c. & partant tous les rectangles EF 10, EF 11, & autres tous ensemble sont au grand rectangle EFD, comme tous les quarrez F2, F3, &c. sont au grand quarré F1. Quand du rectangle EFD j'ôte le rectangle EF 10, il reste le rectangle EF par 10 D qui est égal au quarré de la perpendiculaire tirée du point 2 en l'air ; quand du même rectangle EFD j'en ôte le rectangle EF 11, il reste le rectangle EF par 11 D qui est égal au quarré de la perpendiculaire tirée du point 3 en l'air. (Or j'ai besoin des quarrez de ces perpendiculaires, d'autant qu'en tournant la troisiéme figure sur BC, ces lignes représentent les demi-diametres des cercles qu'il faut comparer avec le quarré du demi-diametre de la base du cylindre.) Mais tous les rectangles susdits ont une même hauteur, sçavoir FE ; & partant ils sont entr'eux comme les lignes FD, F 10, F 11. Si on ôte de la base d'un rectangle la base d'un autre rectangle, il restera leur différence : comme si de

FD j'ôte F 10, il restera D 10; si de FD j'ôte F 11, il restera D 11, & ainsi des autres. Or ces restes sont homologues avec les quarrez des lignes perpendiculaires qui restent quand j'ai ôté le quarré F 2 du quarré F1 : du même quarré F1 j'ai ôté le quarré F3, puis F4, &c. il reste les quarrez des perpendiculaires tirées en l'air des points 2, 3, 4, &c. partant les lignes D 10, D 11, & autres garderont entr'elles la même raison que les quarrez desdites perpendiculaires. Mais les lignes D 10, D 11, D 12, &c. sont sinus; car les lignes 2 10, 3 11, 4 12, &c. sont perpendiculaires sur le diametre EF; donc les quarrez des perpendiculaires sont au quarré de la grande FI prise autant de fois, comme tous les petits sinus sont au sinus total DF pris autant de fois. Mais les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois, comme le demi-diametre du cercle est au quart de la circonférence; partant le solide fait par la révolution de la figure courbe ACB sur la ligne BC, sera au cylindre fait du rectangle BD, comme le demi-diametre du cercle est au quart de la circonférence.

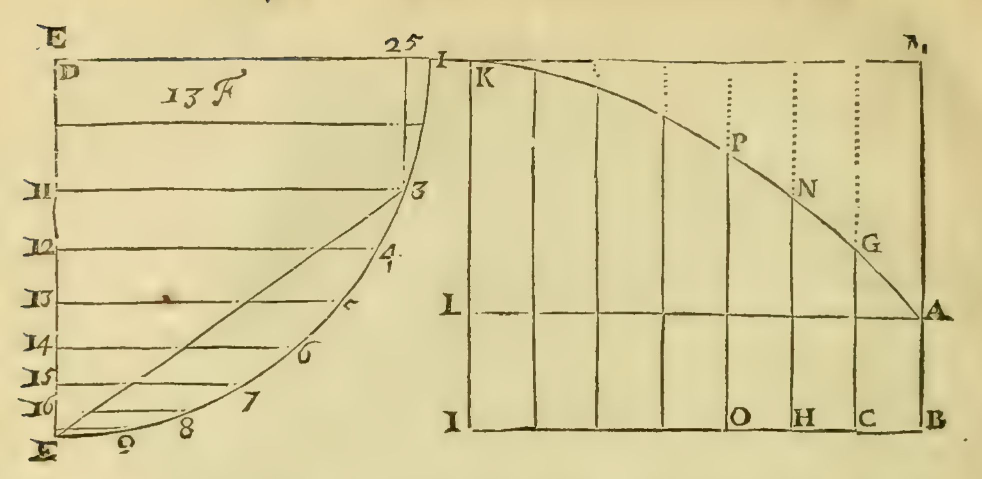
Il faut entendre ici que la figure ABC est faite de toutes les perpendiculaire élevées sur les points 2, 3, 4, &c. & que AB est égale à FI.

Considérons maintenant le trait du compas fait de l'intervale F 3, gardant toûjours le point F pour poser ledit compas. Il se trouve que le quarré F4 avec le quarré de la perpendiculaire tirée du point 4 en l'air, est égal au quarré de F3; le quarré F5 avec celui de la perpendiculaire sur le point 5 en l'air, sont égaux au même quarré F3, & ainsi des autres. Or le rectangle EF 11 est égal au quarré F3, & le rectangle EF 12 est égal au quarré F4, & ainsi des autres rectangles & quarrez. Si donc du rectangle EF 11 j'ôte le rectangle EF 12, il reste le rectangle EF par 12 11 égal au quarré de la perpendiculaire sur 4 tirée en l'air. Si du même rectangle EF 11 on ôte le rectangle EF 13, il reste le rectangle EF, par 13 11 qui est égal au quarré de la perpendi-

culaire tirée ſur 5, & ainſi des autres. Que ſi nous feignons une parabole être tirée du ſommet 11 vers la circonférence du cercle, & que des points 11, 12, 13, 14, 15, pris ſur ſon axe 11 F on tire des ordonnées juſques à la circonférence de ladite parabole, les quarrez de telles ordonnées ſeront égaux aux rectangles ; ſçavoir le quarré de la ligne tirée du point 12 à la parabole, ſera égal au rectangle fait par le côté droit de ladite parabole qui eſt FE, & la portion de l'axe 11 12; le quarré de l'ordonnée tirée du point 13 à la parabole, ſera égal au rectangle EF par 11 13, & ainſi des autres. Ce qui fait voir que les quarrez des ordonnées ſont égaux aux quarrez des perpendiculaires qu'on a tirées en l'air des points 3, 4, 5, &c. & par conſequent les ordonnées ſeront égales auſdites perpendiculaires. Mais d'autant que les perpendiculaires ſont en égale diſtance l'une de l'autre, & les ordonnées inégalement diſtantes l'une de l'autre, cela eſt cauſe qu'on ne peut pas comparer le plan fait par les perpendiculaires avec le plan qui ſe fait par les ordonnées, d'autant que les perpendiculaires diviſent la ligne en parties égales, mais les ordonnées ne diviſent pas l'axe également, mais inégalement; & ainſi le plan qui ſe fait des perpendiculaires ne peut pas être comparé avec le plan fait par les ordonnées pour en ſçavoir la raiſon.

Maintenant il faut conſidérer la raiſon des ſolides, ſi la figure ſe tournoit ſur la ligne F 5 3 étenduë en ligne droite, ſuppoſant que le trait du compas ſe faſſe du point F, & de l'ouverture F3. Or nous avons trouvé par le précedent diſcours, que le rectangle EF par 11 12 eſt égal au quarré de la perpendiculaire ſur 4 en l'air; le rectangle EF par 11 13, égal au quarré de la perpendiculaire ſur 5 en l'air, & ainſi des autres : partant toutes ces lignes ſeront homologues avec les quarrez

desdites perpendiculaires. Or les lignes 11 12, 11 13, 11 14, &c. ne sont point sinus, parce qu'elles ne partent pas du demi-diametre D 1, car il s'en faut la ligne D 11 qu'elles ne viennent jusques à D 1. Que si elles étoient des sinus, nous ferions la raison comme en l'autre précedente raison des solides, sçavoir comme les petits sinus au sinus total D 1 pris autant de fois. Or les lignes 11 12, 11 13, 11 14, &c. sont les mêmes que si du point 4 on menoit une perpendiculaire sur 11 3, & du point 5 & 6 sur la même 11 3, & ainsi de tous les autres points qui divisent la circonférence. Or toutes ces lignes ne sont point sinus, car il s'en faut la ligne 11 D, ou la perpendiculaire qui seroit tirée du point 3 sur la ligne D 1, sçavoir 3 25. Comme donc la ligne 11 3, ou D 25 son égale, à la circonférence F 5 3, ainsi tous les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois. Mais pour trouver l'équation des solides il faut avoir la différence des sinus, sçavoir D 12, D 13, D 14, D 15, D 16 moins autant de fois D 11; partant toutes les différences des petits sinus sont au sinus total pris autant de fois, moins le même espace D 11 pris autant de fois, comme le solide fait par les quarrez des perpendiculaires au cylindre qui se fait. Ceci sera mieux représenté par la petite figure qui est ici. Que IB soit égal à la cirférence F 5 3; AB à D 11 ou à 3 25; & les lignes CG, HN, OP, &c. égales à D 12, D 13, D 14, & autres sinus, desquels il faut retrancher AB ou D 11 pris autant de fois, c'est-à-dire, le parallelogramme ABIL. Tout cela se doit comparer au sinus total pris autant de fois, qui est DF en la grande figure, mais en la petite c'est IK qui fait le parallelogramme IKBM duquel il faut ôter le même parallelogramme ABIL; & partant il reste le parallelogramme LAMK, & de IKAB il restera le triligne LAPK; & partant le solide fait par les quar-



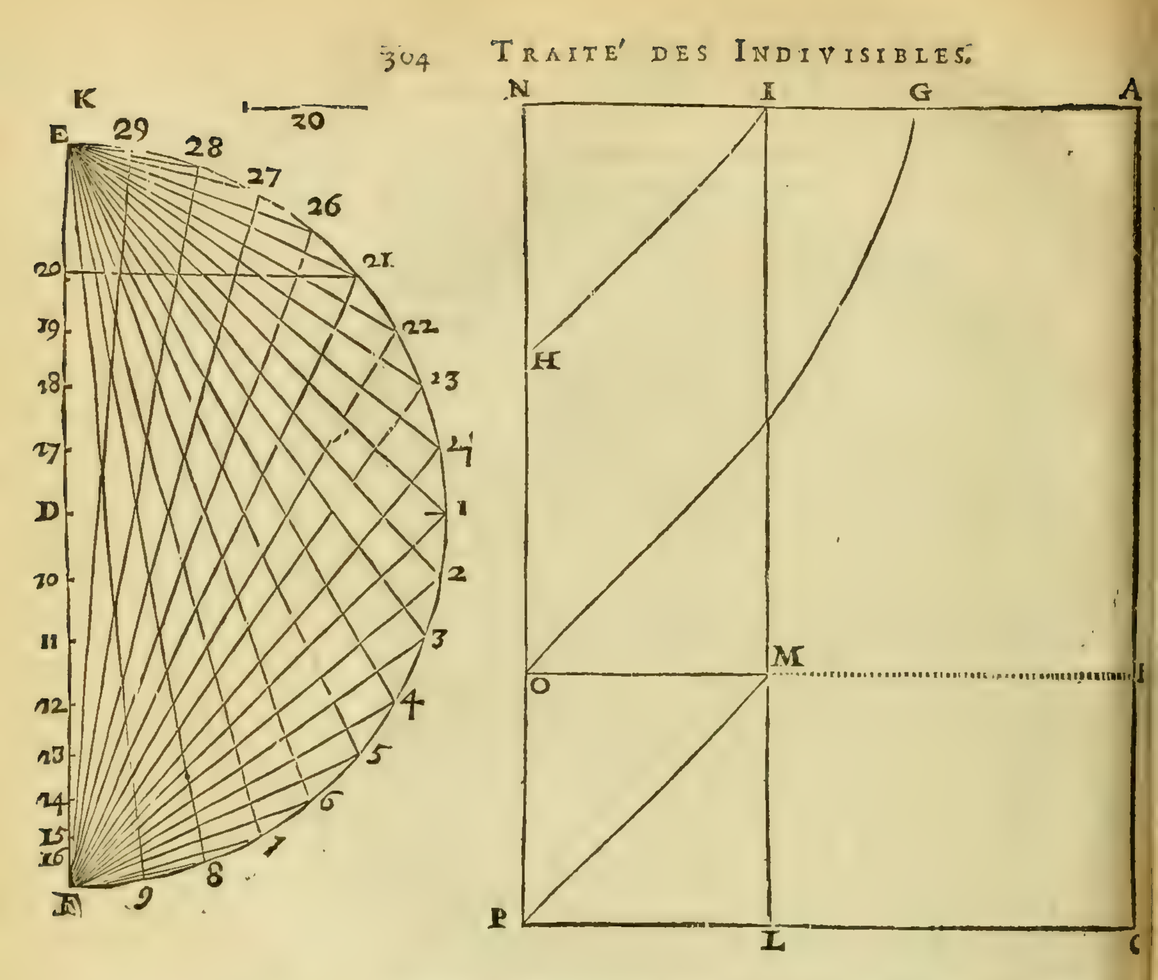
rez des perpendiculaires eſt au cylindre de la grande, comme le triligne LAK au parallelogramme LKMA. Mais ne nous contentant pas de cela, nous cherchons des raiſons en lignes; & retournant à la grande figure, nous diſons : Comme tous les petits ſinus ſont au grand ſinus pris autant de fois; ainſi le ſinus 11 3 eſt à la circonférence F 3. Or il faut ôter de cette raiſon ce qui y eſt de trop, & dire : Comme tous les petits ſinus moins 11 D pris autant de fois, au ſinus total pris autant de fois, moins le même 11 D pris autant de fois; & changeant la proportion on dira : Comme le ſinus total DF eſt à D 11, ainſi la circonférence F 5 3, ſera à quelque portion de la même circonférence F 5 3, laquelle portion il faut ôter de la ligne ou ſinus 11 3; & par ainſi la ligne 11 3, quand on en a ôté ce qui avoit été retranché de ladite circonférence F 5 3, eſt à ce qui reſte de ladite circonférence F 5 3, comme le petit ſolide fait des quarrez de perpendiculaires eſt à leur cylindre. Or tous les ſinus & la circonférence me ſont

donnez ; & partant la raiſon des ſolides ſera connuë, ce qu'il falloit prouver.

Maintenant il faut conſidérer ſur la même figure la raiſon des ſolides entr'eux quand elle roule ſur la ligne circulaire F2 21 étenduë comme droite, & quand l'ouverture du compas eſt F 21, ſans répeter ce qui a été dit ci-devant : on trouve que les quarrez des perpendiculaire tirées en l'air des points 21, 22, 23, 24, &c. ſont entr'eux comme les lignes 20 19, 20 18, 20 17, &c. Or toutes ces lignes ſe doivent conſidérer en cette ſorte, 20 D — 19 D ; 20 D — 18 D ; 20 D — 17 D, & ainſi des autres. Les ſuivantes ſe conſidérent ainſi, 20 D + 10 D ; 20 D + 11 D ; 20 D + 12 D ; 20 D + 13 D, &c. enſorte que 20 D eſt pris autant de fois qu'il y a de diviſions en la circonférence F2 21 & les autres ſinus, ſçavoir D 10, D 11, D 12, D 13 &c. ſont pris autant de fois qu'il y a de diviſions au quart de la circonférence F 5 1. De tout ceci il en faut ôter les lignes D 19, D 18, D 17, & les autres priſes autant de fois qu'il y a de diviſions dans la circonférence 1 21. Voilà une des équations ; l'autre eſt la ligne F 20 priſe autant de fois qu'il y a de diviſions en la circonférence F 2 21.

Voyez la Figure ſuivante.

Pour mieux entendre ce diſcours, on fera la figure qui eſt ici à côté du demi-cercle, en laquelle AB vaut F 1, quart de la circonférence ; BC vaut 1 21 ; & la toute AC vaut la circonférence F3 21 ; AN vaut F 20, & par ainſi le parallelogramme NC vaut ce qui eſt contenu dans 20 F 2 21 ; NG vaut FD ſinus total ; AG ou ſon égale NI vaut D 20 ; NH égale à OP vaut la circonférence 1 21. Nous diſons donc que comme le rectangle ANPC eſt au rectangle INPL + le triligne NGO — le triligne INH ou OMP ſon égal, ainſi le cylindre eſt au ſolide qui ſe fait quand la figure retran-



chée du cylindre tourne sur la circonférence F 1 21 étenduë en ligne droite; ce qu'il falloit démontrer.

Nous venons maintenant à une considération qui est que prenant toûjours le même point F, & l'ouverture du compas telle que son quarré soit égal aux quarrez de FE & de la ligne 30, il se trouve, par exemple, que les

les quarrez de FE & de 30 sont égaux aux quarrez de F 22 & de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22, & ainsi de tous les autres. Or le quarré FE vaut les quarrez E 22 & 22 F; partant les quarrez de E 22, 22 F, & de 30 sont égaux au quarré de 22 F & à celui de la perpendiculaire tirée de 22 en l'air. J'ôte des deux équations ce qui est commun, sçavoir le quarré F 22, & il me reste d'une part le quarré E 22 + le quarré 30 égal au quarré de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22; & ainsi tous les quarrez des perpendiculaires tirées en l'air de tous les points qui divisent la demi-circonférence, sont égaux aux quarrez des lignes qui partent du point E, & se terminent ausdits points, plus le quarré de la ligne 30. Il faut remarquer que la ligne 30 ne change point, mais les autres changent toûjours, puisque les quarrez E 22 & 22 F, E 23 & 23 F, & tous les autres sont égaux au quarré FE pris autant de fois. Mais de tous de ces quarrez je n'ai besoin que de la moitié; partant cette moitié sera égale à la moitié du quarré FE pris autant de fois. (On ne prend que la moitié de cette somme de quarrez, parce qu'on n'en a pas besoin d'autre chose; car joignant lesdits quarrez au quarré de 30 pris autant de fois, on aura la valeur des quarrez des perpendiculaires en l'air, qui est ce qu'il faut avoir.)

Nous conclurons donc que le solide qui se fait par la révolution des perpendiculaires qui tournent sur la circonférence étenduë comme une ligne droite, est égal à deux cylindres, le premier desquels a d'une part la ligne FE, & de l'autre la même circonférence étenduë; & de celui-ci il n'en faut prendre que la moitié. L'autre cylindre a la même circonférence étenduë, & la ligne 30 pour hauteur; car en l'un & l'autre cylindre, la figure tourne sur la circonférence étenduë; & ainsi le cylindre des perpendiculaires est égal à ce petit cylin-

dre & à la moitié du grand tout ensemble ; ce qu'il falloit démontrer.

Il faut voir maintenant la comparaison des plans, & comment ils sont entr'eux. Nous avons trouvé que les quarrez de E 22 & de 30 sont égaux au quarré de la perpendiculaire élevée sur le point 22, & le rectangle FE 19 est égal au quarré E 22. Je fais un rectangle égal au quarré 30 sur la ligne EF, & sur quelqu'autre ligne tirée depuis E en K, & ainsi les deux rectangles joints ensemble, sçavoir FE 19, & FEK, qui valent le rectangle FEK 19 sont égaux aux quarrez de E 22 & de la perpendiculaire 30, comme aussi au quarré de la perpendiculaire élevée sur le point 22. Or si du point K comme sommet je décris une parabole, dont le côté droit soit égal à FE, & KF soit l'axe : le quarré de l'ordonnée qui partira du point 19 sera égal au rectangle FE par 19 K, & ainsi de toutes les autres ; partant les quarrez desdites ordonnées seront égaux aux quarrez des perpendiculaires tirées en l'air, & les mêmes ordonnées égales aux perpendiculaires ; c'est pourquoi le plan occupé par les perpendiculaires devroit être égal au plan occupé par les ordonnées.

Mais la comparaison ne se peut pas faire de la sorte, parce que les perpendiculaires sont également distantes l'une de l'autre ; mais les ordonnées le sont inégalement, puisque la ligne FE est toute coupée en parties inégales, & partant le plan ne peut être comparé au plan.

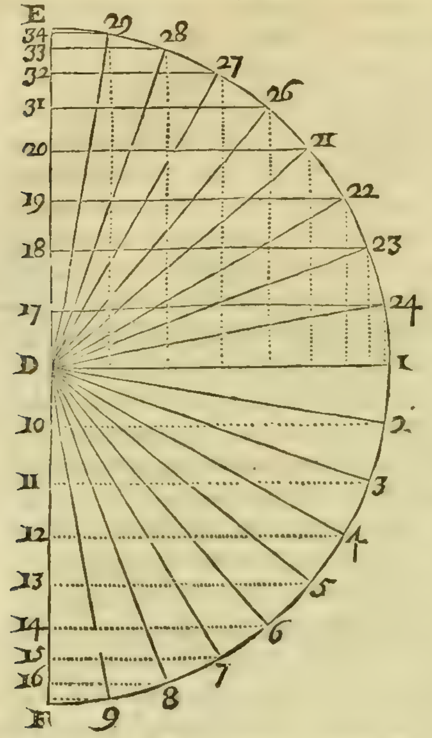
Voyez la Figure suivante.

Nous venons maintenant à considérer qu'elle est la raison, ou comparaison des quarrez des sinus avec le quarré du diamétre FE. La circonférence F1E est divisée en parties infinies & égales, & les lignes 24 17, 23 18, 22 19, 21 20, 26 31, 27 32, 28 33, & 29 34 sont toutes sinus droits. Je dis que le quarré D 24 demi-diametre vaut le quarré 17 24, & le quarré 17 D qui est

ſinus de complément égal à la ligne tirée du point 24 perpendiculaire ſur le demi-diamétre D 1, & eſt égale au ſinus 29 34. Le même quarré du demi-diametre D 23 eſt égal aux quarrez de 18 23, & de 18 D ſinus de complément égal à la perpendiculaire tirée de 23 ſur D 1, & auſſi au ſinus droit 28 33. Le quarré de D 22 eſt égal aux quarrez de 22 19, & de 19 D ſinus de complément égal à la perpendiculaire tirée de 22 ſur D 1 & au ſinus 27 32, & ainſi de tous les autres, en telle ſorte que tous les ſinus de complément ſont égaux aux ſinus droits, ci-devant marquez ; & ainſi les quarrez de tous les ſinus pris deux fois (ce qui ſe doit faire, puiſque les uns ſont égaux aux autres) ſont égaux au quarré du demi-diametre D 1 pris autant de fois qu'il y a de ſinus. Mais le quarré du demi-diametre n'eſt que le quart du quarré du diametre ; partant le quarré du diametre ſera huit fois la ſomme des quarrez des ſinus, c'eſt-à-dire, que les quarrez des ſinus ſont au quarré du diametre pris autant de fois comme 1 à 8. Voilà la premiere partie.

Pour la ſeconde. Le quarré de FE eſt égal aux quarrez de F 33 & 33 E, plus deux fois le rectangle F 33 E, qui eſt à dire le quarré 28 33 deux fois ; le même quarré FE eſt égal aux quarrez F 32 & 32 E, plus deux fois le rectangle F 32 E, ou deux fois le quarré 32 27 ; le même FE eſt égal aux quarrez F 31 & 31 E, plus deux fois le rectangle F 31 E, ou le quarré 31 26 ; le même quarré FE eſt égal aux quarrez F 20 & 20 E, plus deux fois le rectangle F 20 E, ou le quarré 20 21, & ainſi de tous les autres tant en haut qu'en bas : & de cette ſorte le quarré FE vient à être égal à deux fois tous ces petits quarrez F 34, 34 E ; F 33, 33 E ; F 32, 32 E, & tous les autres en telle ſorte que le quarré FE pris autant de fois eſt double de tous ces quarrez, & de plus, à deux fois les quarrez de 34 29, 33 28, 32 27, & les

autres. Nous avons vû comme tous les quarrez de ces

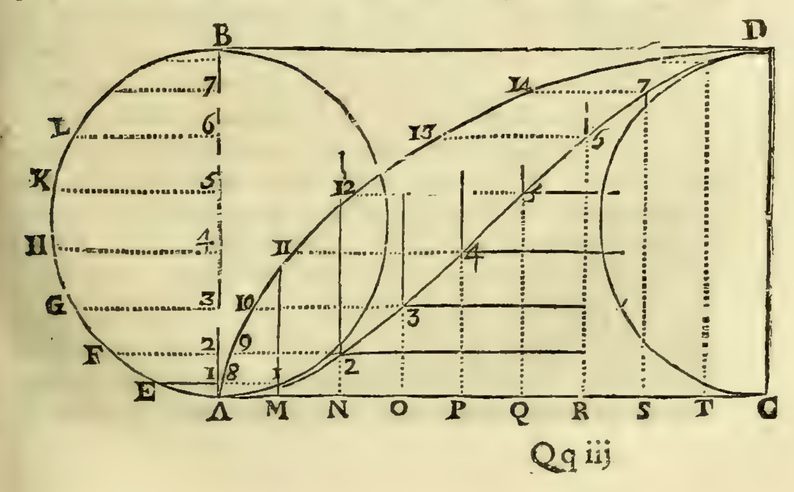


finus 34 29, 33 28, &c. font au quarré du diametre FE pris autant de fois, comme 1 à 8. Or ils font ici deux fois & les finus verfes auffi deux fois; partant deux fois les quarrez des finus verfes, & deux fois les quarrez des finus droits font égaux à huit fois les quarrez des finus droits; & ôtant de part & d'autre deux fois les quarrez des finus droits, reftera d'une part deux fois les quarrez des finus verfes égaux à fix fois les quarrez des finus droits; & prenant la moitié, les quarrez des finus verfes feront égaux à trois fois les quarrez des finus droits; partant les quarrez des finus verfes font à ceux des finus droits, comme 3 à 1, mais le quarré de FE pris autant de fois eft aux quarrez des finus droits, comme 8 à 1 : donc le quarré de FE pris autant de fois eft aux quarrez des finus verfes, comme 8 à 3, ce qu'il falloit trouver.

La précedente conclufion nous fervira pour trouver la raifon du folide que fait la Roulette, quand elle tourne fur la circonférence du cercle générateur étenduë

en ligne droite. Car le ſolide fait par les ſinus verſes (voyez la figure de la Roulette, qui eſt placée ci-aprés page ſuivante) ſçavoir par M 1, N 2, O 3, P 4, &c. eſt au ſolide fait par le parallelogramme compoſé du diametre du cercle, & de la circonférence d'icelui étenduë en ligne droite, comme 3 à 8 par la concluſion précedente. Nous ſçavons auſſi que l'eſpace compris entre les deux lignes A 11 D & A 4 D eſt égal au demi-cercle AHB, parce que les lignes d'un des eſpaces ſont égales aux lignes de l'autre eſpaces par la conſtruction : partant le double de l'eſpace eſt égal au cercle entier AHBA, de ſorte que tout ce qui ſe dira du cercle ſe doit entendre dudit eſpace doublé. Mais il a été démontré que le cylindre de AB eſt au ſolide qui ſe fait lorſque la figure A 12 D 5 A tourne ſur la ligne ou circonférence AC, comme 8 à 2, leſquels 2 joints à 3 qu'on a trouvez ci-devant, font 5, qui eſt la raiſon qu'il y a du ſolide entier de la roulette, à ſon cylindre ABDC doublé; car ABDC n'eſt que la moitié de l'eſpace parcouru par la Roulette.

Remarquez que ce ſolide qui eſt au cylindre AD tour-

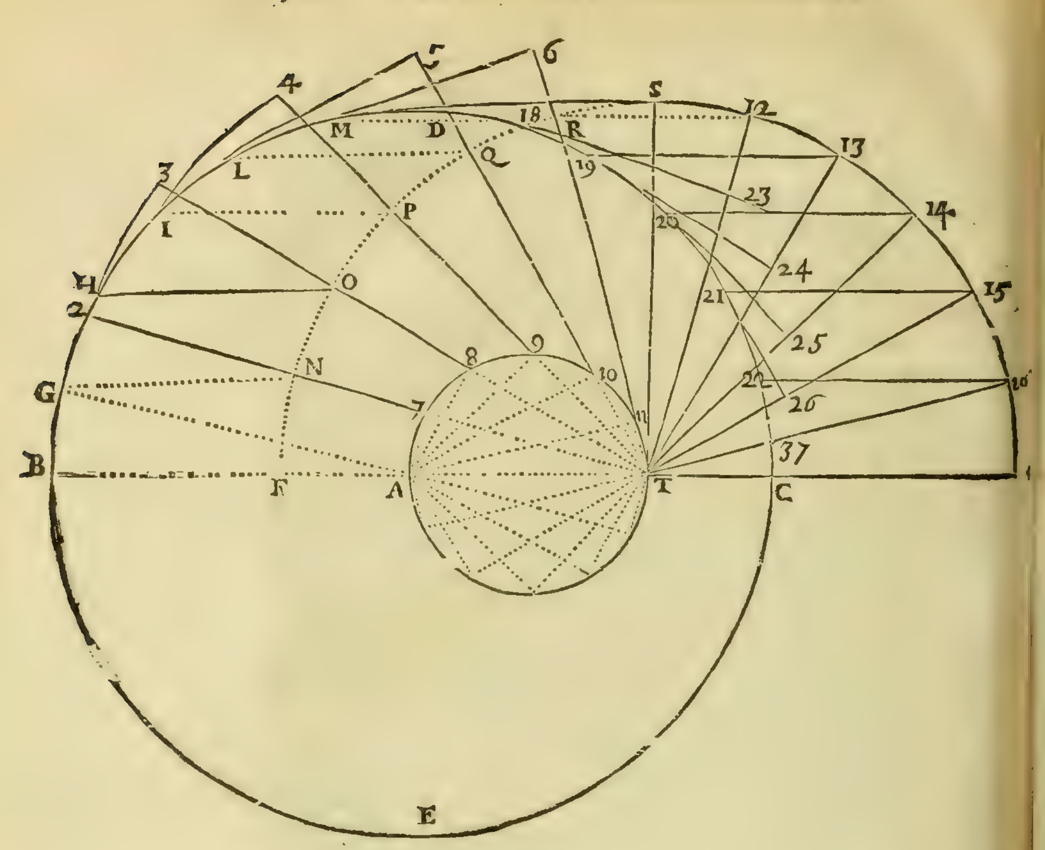


né sur C, comme 1 à 4, ou 2 à 8 : est celui que fait l'espace compris entre les deux lignes A 12 D & A 4 D, qui est égal à celui que feroit le demi-cercle AHB par la même révolution, parce que l'une & l'autre figure a ces lignes égales, & posées en même distances de AC, & partant est le quart dudit cylindre AD ; & joignant ledit solide à celui qui se fait par l'espace compris entre les lignes A 4 D & AC, qui est audit cylindre comme 3 à 8, on aura le solide fait par l'espace compris entre A 12 D & AC, qui sera 5, ledit cylindre AD étant 8.

TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT un espace égal à la superficie d'un cylindre oblique donné, & d'un seul trait de Compas.

LE cercle BDCE est la base d'un cylindre oblique, les côtez duquel partans des points B, G, H, I, &c. vont obliquement rencontrer un autre cercle en haut, qui est l'autre base du cylindre, & est parallele au premier BDCE :) ce cercle peut être représenté par le cercle FNOP, &c. mais il est en l'air & à plomb au-dessus de celui-ci) l'axe du même cylindre sort du centre A, va rencontrer obliquement le centre dudit cercle superieur. Or nous feignons que du sommet de l'axe soit tirée une perpendiculaire qui tombe sur le point T, & que du sommet de tous les côtez du cylindre s'abaissent des perpendiculaires qui tombent aux points F, N, O, P, &c. qui font la circonférence d'un cercle dont le centre est le point T, & lequel est égal au premier BDC, comme il est aisé à voir. Or divisant les deux cercles ou bases du cylindre en parties infinies aux points G, H, I, L, &c. feignant des lignes tirées GH, HI, IL, &c. ces petites lignes passent pour la circonférence même, & le cylindre en cette sorte se

trouve divisé en infinies parallelogrammes ; car les côtez du cylindre avec la portion de la circonférence des deux cercles font des parallelogrammes qui composent tout l'espace du cylindre ; de sorte qu'il faut comparer tous ces parallelogrammes au grand parallelogramme pris autant de fois. Si du point G je tire une ligne touchante G 2, & du point correspondant à G, sçavoir de N, je tire une perpendiculaire à ladite touchante, qui la rencontre au point 2 ; si du sommet du côté du cylindre (j'entens du côté qui commence en G, & va finir à l'autre cercle au-dessus du point N) je tire une ligne au point 2 : cette ligne sera perpendiculaire à la ligne G 2. Du point H je tire une ligne touchante, & du point O correspondant à H, je tire une perpendiculaire à ladite touchante, sçavoir O 3, & ainsi des autres points I & P, L & Q, &c. je ne parle plus de la ligne tirée d'enhaut, car il suffit d'avoir dit une fois qu'elle sera perpendiculaire à la même touchante. Ayant ainsi tiré autant de perpendiculaires qu'il y a de touchantes à chaque point, ces lignes seront N 2, O 3, P 4, Q 5, &c. Si chacune de ces lignes est continuée comme 2N7, 3 O 8, 4 P 9, &c. elles iront toutes finir au point T centre du cercle FS 17. Pour la preuve, nous feignons qu'il y a une ligne AG, laquelle avec 2 7 compose un quadrilatere : en icelui l'angle 7 2 G par la construction est droit ; l'angle A G 2 est droit, sçavoir du centre au point d'atouchement ; partant 2 N, & GA sont paralleles. Soit tirée NT, l'arc GB étant égal à l'arc NF. Il s'ensuit que l'angle GAB est égal à l'angle NTF, puisqu'ils sont faits tous deux aux centres T & A des deux cercles égaux BDC & FS 17, & partant la même GA sera parallele à NT ; donc 2 N 7, & NT sont paralleles entr'elles ; mais elles se joignent au point N, & partant elles ne font ensemble qu'une même ligne.



Maintenant il faut confiderer les parallelogrammes, au lieu defquels je prens la perpendiculaire qui tombe du fommet fur les touchantes ci-devant, comme du fommet du cylindre qui part de G & va en l'air, j'abaiffe la perpendiculaire fur le point 2, laquelle eft la hauteur ou perpendiculaire du parallelogramme compofé de ligne G 2, qui paffe dans les indivifibles pour circonférence,

circonférence, & du côté du cylindre qui part de G & va en l'air, lequel côté vaut pour deux côtez du parallelogramme, ſçavoir commençant en G & 2, & finiſſant en la circonférence de la baſe ſuperieure du cylindre; & par ainſi on a les quatre lignes du parallelogramme, ſçavoir G 2 (qui paſſe pour circonférence) & ſon égale en la circonférence de la baſe ſuperieure, & les deux côtez du cylindre. Mais au lieu du parallelogramme nous conſiderons un triangle qui a pour un de ſes côtez la perpendiculaire tirée du ſommet du coté ſur le point 2, & qui ſe peut nommer la perpendiculaire ou hauteur du parallelogramme; & pour les deux autres côtez, la ligne G 2, & le côté du cylindre tiré de G en l'air. Or en ce triangle le côté du cylindre vaut en puiſſance la ligne G 2, & la perpendiculaire tirée du ſommet & finiſſant en 2. Il faut enſuite conſiderer un autre triangle, dans lequel la même perpendiculaire tombant en 2 ſoit un des côtez ; 2 N ſoit un autre côté; & le troiſiéme ſoit la ligne tombante perpendiculairement du ſommet du côté ſur le plan du cercle au point N. Or en ce triangle la perpendiculaire qui tombe ſur 2 peut autant que les deux lignes 2 N, & la perpendiculaire qui tombe du ſommet ſur N. Mais cette perpendiculaire qui tombe du ſommet ſur N, O, P, Q, & autres points de la circonférence eſt toûjours égale : mais les lignes 2 N, 3 O, 4 P, 5 Q, &c. ſont inégales; car 2 N vaut 7 T; 3 O vaut 8 T; 4 P eſt égale à 9 T, & ainſi des autres qui toutes ſont inégales.

Au premier triangle G 2 & l'autre point qui eſt au cercle ſuperieur le côté du cylindre qui va de G en l'air à l'autre cercle ſuperieur, vaut la ligne tirée du ſommet (qui eſt ce troiſiéme point en l'air) & qui finit en 2, & la ligne G 2. (on doit entendre ceci de tous les autres points & triangles qui ſe peuvent former de

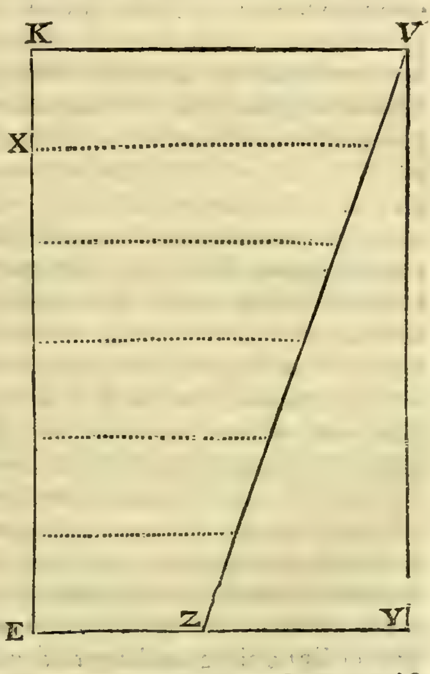
la même sorte.) Mais les lignes G 2, H 3, I 4 &c. vont toûjours augmentant; car G 2 est égal à la soutendante A 7, la ligne H 3 à A 8, I 4 à A 9; toutes lesquelles lignes A 7, A 8, A 9 sont inégales. Mais avant que de conclure il faut prouver que la ligne G 2 est égale à A 7, H 3 à A 8, & ainsi des autres; de plus que 2 N est égale à 7 T, 3 O à 8 T, &c. Pour cet effet, il faut considérer les triangles 2 GN, & AT 7, ausquels l'angle 2 NG est égal à l'angle AT 7; car les lignes GN, AT sont paralleles, l'angle N 2 G est droit, par la construction, & pareillement T 7 A qui est dans le demi-cercle, & partant le troisiéme angle est égal au troisiéme; la ligne GN est égale à AT, & partant tout le triangle à l'autre triangle, & partant la ligne 2 N à 7 T, & G 2 à la soutendante A 7; ce qu'il falloit démontrer.

Il nous reste à voir le rapport & la raison de tous les petits parallelogrammes à leur plus grand pris autant de fois. Or il faut considérer que les petits parallelogrammes bien qu'ils ayent les côtez égaux, car ils sont composez des côtez du cylindre & de la portion de la circonférence divisée en parties égales infinies, & cette division est faite aux deux cercles ou bases d'icelui cylindre; & d'autant que les angles sont inégaux, les parallelogrammes sont inégaux, & ainsi leur hauteur sera inégale, c'est par cette hauteur qu'il faut considérer lesdits parallelogrammes. Il faut voir premierement le plus grand de tous qui est fait de BG, tant en la base du cylindre BDC, qu'en l'autre qui est en l'air, & des côtez du cylindre. Or en ce parallelogramme il faut remarquer que la perpendiculaire qui est la hauteur dudit parallelogramme, & qui du sommet tombe sur le point B, n'est autre chose que le côté du cylindre; & considérant le second parallelogramme qui a pour côtez GH & les côtez du cylindre, on voit que ce côté du cylindre vaut en

puiſſance la ligne G2, & la perpendiculaire ou hauteur du même parallelogramme ; & partant ladite perpendiculaire ou hauteur du parallelogramme eſt plus petite que la perpendiculaire du premier, qui eſt égale au côté du cylindre ; & par ainſi ces hauteurs perpendiculaires ou vont toûjours en diminuant juſques au quart de cercle, & puis aprés vont en croiſſant au quart ſuivant.

Remarquez que les lignes G 2, H 3, I 4, L 5 qui ſont touchantes, paſſent pour la circonférence des diviſions du cercle, & pour côtez des parallelogrammes.

Il faut entendre en cette figure rectiligne, que KV eſt égale à la plus grande des perpendiculaires, & auſſi au côte du cylindre, & qui tombe perpendiculairement ſur le côté BG au point B : la ligne KX & les autres diviſions repréſentent & ſont égales à celles de la circonférence, comme KX à BG, & ainſi des autres ; car KE eſt ſuppoſée égale au quart de la circonférence BHD. Le plus grand des parallelogrammes eſt fait des lignes KV, KX ; & quand il eſt pris autant de fois qu'il y en a de petits, il occupe l'eſpace KVYE ; partant toutes ces lignes ſont à la grande KV priſe



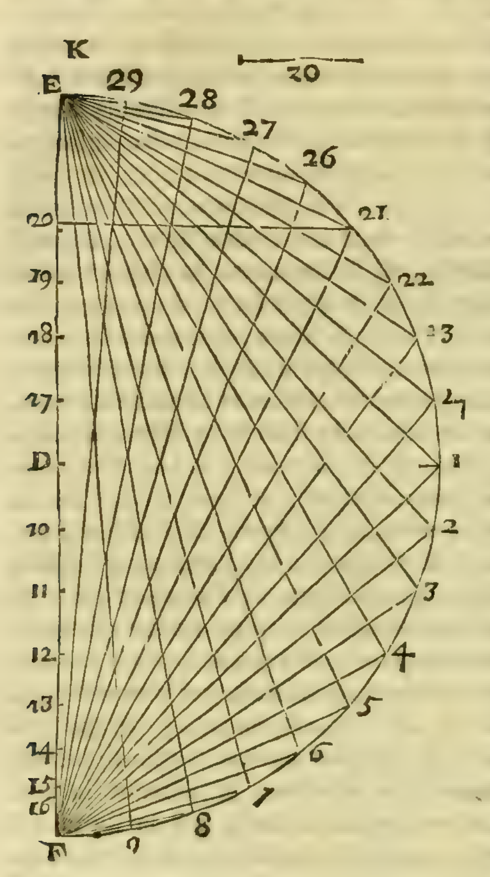
autant de fois, comme la figure KVZE est au quart de la superficie du cylindre qui est ici représenté par le parallelogramme KVYE.

Il faut passer plus avant, & considérer les perpendiculaires qui sont tirées du sommet sur les points 2, 3, 4, 5, &c. du cercle BDC. Or chacune de ces perpendiculaires, par exemple celle qui part du point 2, vaut la ligne qui tombe perpendiculairement sur le point N & la ligne N 2; la perpendiculaire qui tombe sur le point 3 vaut en puissance celle qui tombe perpendiculairement sur O, & la ligne O 3, & ainsi des autres. Ceci s'explique mieux dans le petit cercle A 9 T. Il faut donc concevoir la ligne qui part du point A centre du grand cercle BDC base du cylindre oblique, & qui va trouver le centre de l'autre cercle qui est la base supérieure du même cylindre, duquel centre on abaisse la perpendiculaire qui tombe sur la circonférence du petit cercle A 9 T au point T. Ayant trouvé le point T, de l'intervale AT comme diametre je forme le cercle A 9 T; la demi-circonférence duquel est divisée en autant de parties égales qu'il y en a au quart BD de la circonférence du cercle BDC. Puis après, du point duquel j'ai tiré la perpendiculaire sur le point T, je tire des lignes aux points 11, 10, 9, 8, 7, &c. qui font la division du cercle, comme il a été dit. Du point T je tire des lignes aux mêmes points 11, 10, 9, 8, 7. Je dis davantage que le cercle A 9 T nous représente la base d'un cylindre droit qui a son autre base en l'air, sçavoir un cercle dont la circonférence passe par le point d'où est tiré la ligne qui tombe sur T, & est aussi le centre de la base supérieure du cylindre oblique, & on nommera ici ledit point qui est en l'air, sommet. Nous disons donc que la ligne tirée en l'air dudit sommet sur le point 7, est égale en puissance aux deux lignes dont l'une est celle

qui tombe perpendiculairement dudit sommet sur le point T ; & l'autre est T 7. La ligne qui part dudit sommet, & va au point 8, est égale en puissance à la susdite qui tombe dudit sommet sur T, & à T 8, & ainsi de toutes les lignes qui vont au point du cercle A 9 T. Or la ligne qui tombe sur le point T est toûjours la même, & la hauteur perpendiculaire du cylindre oblique ; & toutes ces lignes qui partent dudit sommet, & vont sur les points 7, 8, 9, 10, 11, &c. forment un cône dont ledit point d'où sortent toutes ces lignes, & aussi celle qui tombe sur T, est le sommet ; & chacune desdites lignes qui vont dudit sommet sur 7, 8, 9, &c. sont chacune égales en puissance à ladite ligne qui tombe sur T, & à celle qui de T va sur le point de la circonférence A 9 T, auquel celle qui part du sommet aboutissoit aussi.

Or en tout ceci on doit considérer la figure du discours précedent, qui est ici décrite, en laquelle nous feignons que l'ouverture du compas se doit faire sur un cylindre droit posant un pied du compas pour pole sur le point F, & traçant de l'autre sur le cylindre, & faisant ladite ouverture plus grande que le diametre FE : la pointe du compas va toucher la plus petite des perpendiculaires, laquelle partira du point E, & montera le long du cylindre, & les perpendiculaires suivantes qui partent des points 29, 28, 27, 26, 21, 22, 23, &c. jusques au même point F, auquel lieu la perpendiculaire est égale à l'ouverture du compas, & partant la plus grande de toutes ces perpendiculaires. Or la ligne qui est l'ouverture du compas est égale en puissance à la ligne FE, & à la moindre perpendiculaire, sçavoir à celle qui va du point E le long du cylindre. Prenons maintenant quelqu'autre point comme 22. Nous disons que la ligne qui est l'ouverture du compas vaut les quarrez de la ligne F 22, & de la perpendiculaire du point

22 en l'air; partant les quarrez de FE & de la perpendiculaire ſur E en l'air, ſont égaux aux quarrez F 22 & de la perpendiculaire ſur 22 en l'air. Au lieu du quarré FE, je prends les quarrez de F 22, & de 22 E; partant les quarrez de F 22, & de la perpendiculaire ſur 22 en l'air, valent les quarrez de F 22, 22 E, & de la perpendiculaire ſur E en l'air. Des deux grandeurs ôtez ce qui eſt commun, ſçavoir le quarré de F 22, reſtera le quarré de la perpendiculaire ſur 22 en l'air, égal aux quarrez de 22 E & de la perpendiculaire ſur E en l'air; & faiſant le même aux autres points 23, 24, 25, 26, 27, &c. on aura le quarré de la perpendiculaire ſur 23, par exemple, égal aux quarrez de 23 E, & de la perpendiculaire ſur E en l'air, & ainſi des autres: par ainſi nous trouvons que les quarrez deſdites



perpendiculaires en l'air ſont égaux aux quarrez de la perpendiculaire ſur E en l'air, & des ſoutendantes 23 E, 22 E, 26 E, &c.

Or ſi on ſuppoſe que le cercle A 9 T ſoit auſſi grand que F 22 E de la préſente figure, & qu'ils ſoient tous deux également diviſez, & que l'ouverture du compas vaille en puiſſance le diametre FE, & la hauteur du cylindre oblique, ſçavoir la ligne qui tombe perpendiculairement ſur T, alors les perpendiculaires bornées par le trait du compas, & tirées en l'air des points E 29, 28, 27, 26, &c. ſont toutes égales aux lignes qui tombent ſur les points T, 11, 10, 9, 8, 7, A, & qui ſont tirées du centre de la baſe ſupérieure du cylindre oblique, qui eſt le ſommet d'où tombe perpendiculairement la ligne ſur le point T, & cette ligne eſt la plus courte de toutes celles qui tombent dudit point ſur le cercle A 9 T, & eſt égale à la perpendiculaire tirée ſur le point E en l'air, & coupée par ladite ouverture du compas; la ligne qui aboutit au point 11, & vient du même ſommet, eſt égale à la perpendiculaire ſur le point 29 en l'air, & coupée par le compas; & ainſi toutes les lignes tirées du ſommet, ou centre de la baſe ſupérieure du cylindre oblique ſont égales aux perpendiculaires retranchées par le compas ſur la ſurface du cylindre droit. Or les lignes ainſi tirées du centre oblique ſur le cercle A 9 T ſont égales aux lignes qui tombent ſur les points 2, 3, 4, &c. & qui ſont tirées de la circonférence de ladite baſe ſupérieure du cylindre oblique, ſçavoir des points de ces perpendiculaires aux points F, N, O, P, &c. & les ſoutendantes T 7, T 8, T 9, &c. ſont égales au lignes N 2, O 3, P 4, &c. Nous diſons donc que les parallelogrammes qui ſont en même hauteur, & dont les baſes ſont égales, doivent être égaux, & contiennent des eſpaces égaux. Or pour mieux entendre cette égalité, nous de-

Voyez la Figure de la page 312.

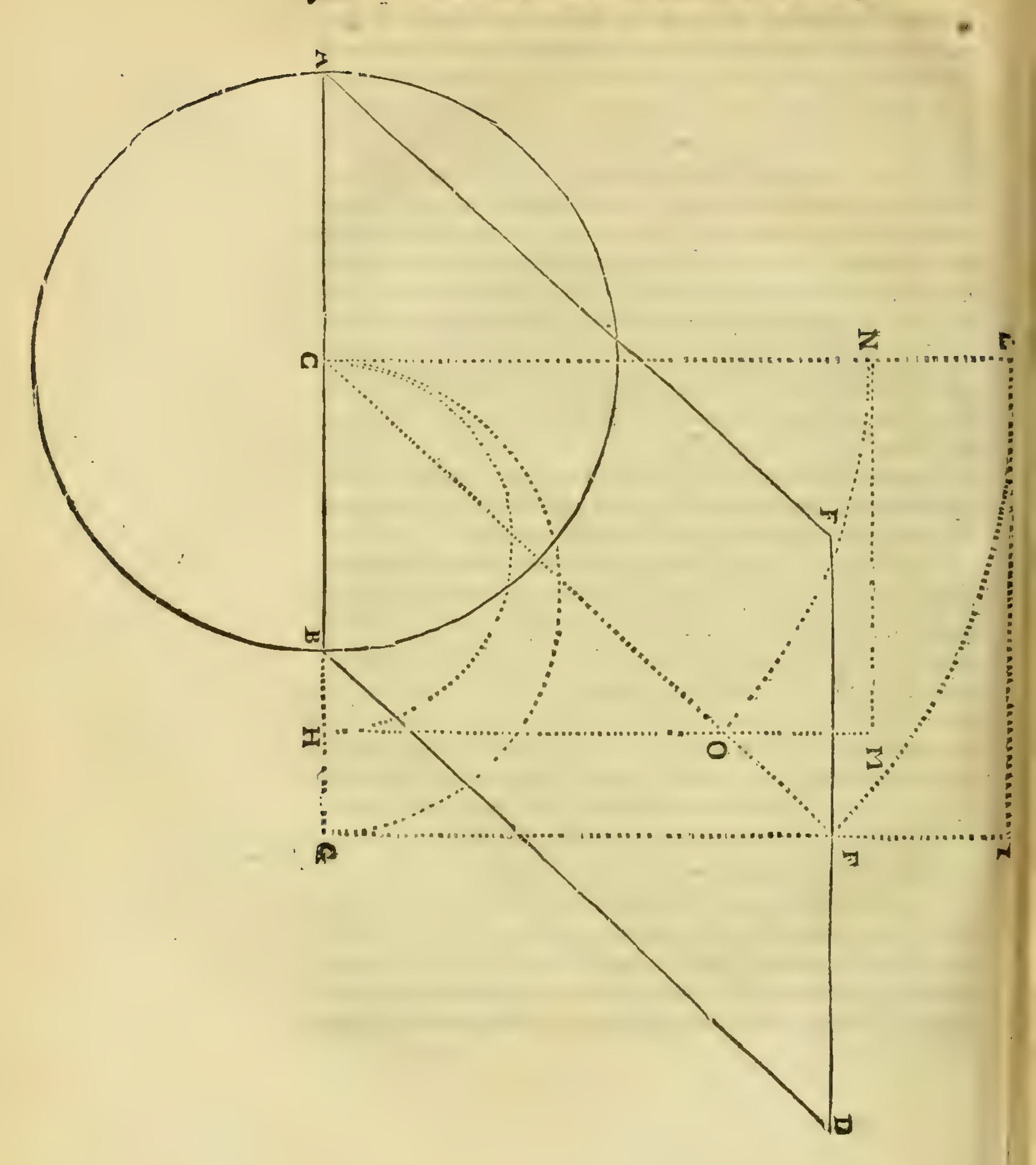
vons feindre que le cercle A 9 T va jusques au centre du cercle FPS 17, & que son diametre AT est égal à BA demi-diametre du cercle BDC; & ainsi le demi-cercle A 9 T sera égal au quart de cercle B D. Or le trait du compas qui s'est fait en la derniere figure F 22 E, se rapporte entiérement à ce qui s'est fait dans le cercle A 9 T de l'autre figure; & partant le trait du compas fait sur le cylindre droit est égal au quart de la circonférence du cylindre oblique.

Pour conclusion. Si le cercle de la derniere figure F 22 E est égal à celui de l'autre figure, sçavoir BDC, & que la perpendiculaire retranchée par le compas, & qui part du point E en l'air) quand le compas est plus ouvert que FE) est égale à la perpendiculaire tirée de la base supérieure du cylindre oblique à l'autre base, & qui est la vraye hauteur dudit cylindre oblique, & qu'on a supposé tomber de la base supérieure sur les points F, N, O, P, &c. & même sur C : toutes les perpendiculaires retranchées par le compas sur le cylindre droit dont la base est F 22 E seront égales aux perpendiculaires tirées du cercle supérieur du cylindre oblique sur les points B, 2, 3, 4, 5, &c. & la figure retranchée par le compas sera égal à la superficie du cylindre oblique duquel la base est le cercle BDC, & la hauteur perpendiculaire double de la perpendiculaire sur E en l'air, & retranchée par le compas, sçavoir de la perpendiculaire tant dessus que dessous ledit point E.

Voyez la Figure suivante.

Que la ligne C G soit le diametre d'un cercle qui serve de base à un cylindre droit duquel on ait retranché une superficie ; A C B soit le diametre d'un cercle qui soit la base d'un cylindre oblique proposé; C F soit l'axe dudit cylindre oblique; F le centre de la base supérieure, duquel tirant la ligne F G perpendiculaire sur AB, ladite F G sera la hauteur du cylindre

cylindre oblique. Mais si on éleve ledit axe CF perpendiculairement sur C, on aura son égale CL qui est la hauteur qu'il faut donner au cylindre droit qui a la ligne CG pour diametre de sa base ; & si on tire de L en I une parallele à CG, & du point I la ligne IFG, le cylindre droit est achevé, sur lequel du point C, & intervale CL, on retranchera avec le compas la superficie LF, &c. Or nous avons vû ci-devant que ce qui est retranché sur la superficie du cylindre droit CLIG, est à la superficie du cylindre oblique proposé AEDB, comme le diametre du cylindre droit CG, sçavoir de sa base au demi-diametre de la base du cylindre oblique AC ou CB. Or si le diametre du cylindre droit est égal au demi-diametre de l'oblique, alors ce qui est retranché du cylindre droit sera égal à la superficie du cylindre oblique. Mais l'un n'étant pas égal à l'autre, pour trouver un retranchement qui soit égal à la superficie du cylindre oblique, il est necessaire de trouver un cylindre droit semblable au premier CLIG, comme est CNMH. Pour le trouver, on prend une moyenne proportionnelle entre CB, & CG, laquelle est CH : du point H j'éleve la perpendiculaire HOM qui coupe la ligne CF en O, & fait le triangle CHO semblable au triangle CGF : ces triangles semblables servent à faire le petit cylindre droit semblable au grand cylindre droit ; car du petit cylindre CNMH, on retranche NEO, &c. & ce qui est retranché est égal à la superficie du cylindre oblique proposé ; car le retranché LF du cylindre droit CLIG est à la superficie du cylindre oblique proposé AEDB, comme le diametre CG au demi-diametre CB. Mais le petit cylindre CNMH étant semblable au grand cylindre CLIG, le retranché de l'un sera semblable au retranché de l'autre : les superficies des cylindres sont entr'elles en raison doublée de leurs diamétres ;

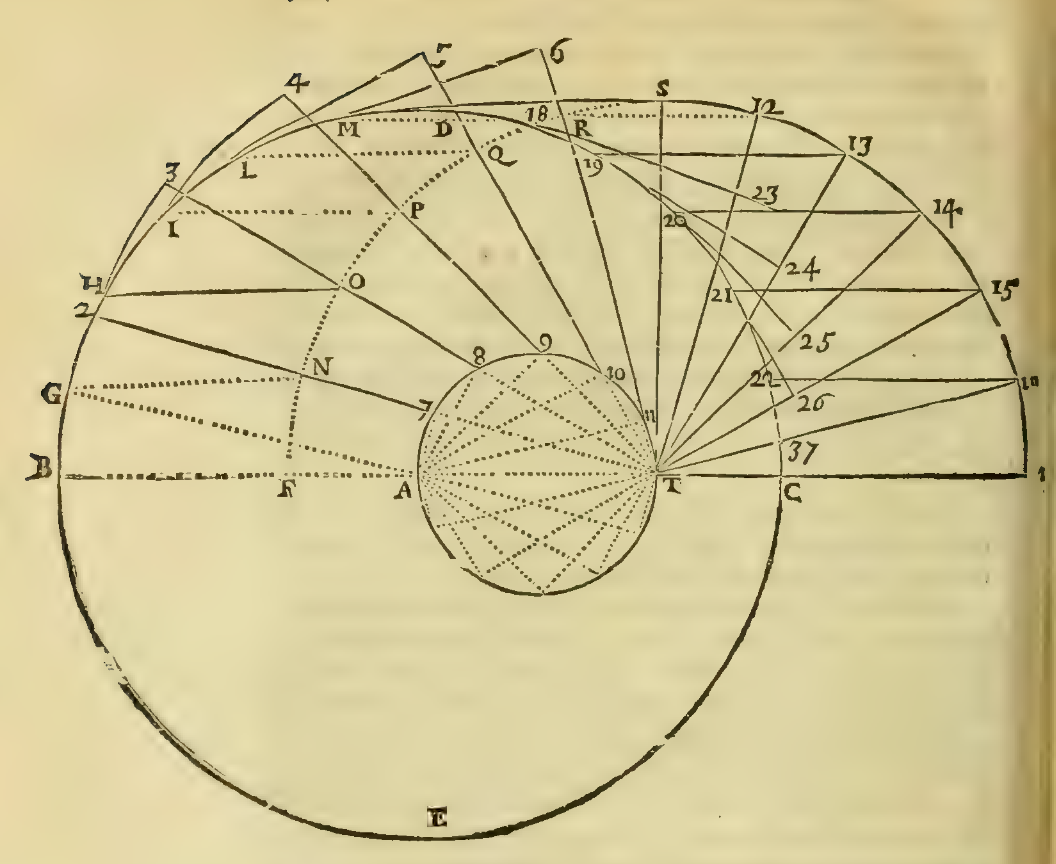

A
C
B
H
G
N
F
O
M
F
D

partant la ſuperficie du grand cylindre eſt à celle du petit en raiſon doublée de CG diametre du cercle du grand cylindre à CH diametre du cercle du petit ; la ſuperficie de l'un ſera donc à celle de l'autre en raiſon doublée de CG à CH, c'eſt-à-dire, comme CG à CB. Mais les cylindres droits étant ſemblables, le retranché de l'un ſera au retranché de l'autre, comme toute la ſuperficie de l'un à toute la ſuperficie de l'autre; partant le tranché du cylindre droit CLF eſt au retranché du petit cylindre droit CNEO, comme CG à CB. Mais le retranché du grand cylindre droit eſt à la ſuperficie du cylindre oblique, comme CG à CB; partant le retranché du petit cylindre eſt égal à la ſuperficie du cylindre oblique, puis que l'un & l'autre a même raiſon au retranché du grand cylindre.

Tout ce qui a été dit ci-devant pour couper ſur un cylindre un eſpace égal à la ſuperficie d'un cylindre oblique, ſe peut réduire à ce qui s'enſuit.

Soit fait la figure ſuivante dans laquelle le diametre du petit cercle, ſçavoir AT, doit être égal au demi-diametre du grand cercle BDC baſe inférieure, & de FPS 17 repréſentant la baſe ſupérieure en l'air du cylindre oblique dont le centre eſt perpendiculaire ſur T joint au point C. Je dis que ſi on ouvre le compas autant que le côté du cylindre oblique, & que laiſſant un des pieds du compas ſur le point F joint au point A, on trace une ligne ſur le cylindre droit dont la baſe eſt A 9 T, l'eſpace compris entre ladite ligne, & ladite baſe A 9 T, ſera égal à la ſuperficie du cylindre oblique.

Soient diviſées les baſes deſdits cylindres oblique & droit en une infinité de parties égales, ſçavoir, faiſant autant de diviſions ſur le quart de cercle BLD que ſur le demi-cercle A 9 T, & ce, tant aux baſes ſupérieures qu'aux inférieures deſdits cylindres; & tirant des lignes



par les points desdites divisions, on fera plusieurs parallelogrammes qu'on prendra au cilindre oblique d'une base à l'autre; mais au cylindre droit on les prendra depuis la base inférieure jusques à la section faite par le compas. Or lesdits parallelogrammes sont égaux en multitude en l'un & l'autre cylindre, & on les démontrera aussi égaux en quantité, comme il s'ensuit.

Puiſque les parallelogrammes ſuſdits ont même baſe, puiſqu'ils contiennent égale portion ou quantité en la circonférence de la baſe de chacun des cylindres, reſte à montrer que leur hauteur eſt égale. Cette hauteur eſt facile à connoître au cylindre droit. puiſque le côté même du cylindre coupé par le compas, la dénote: mais au cylindre oblique cette hauteur eſt la ligne tirée de la baſe ſupérieure repréſentée par les points N, O, P, &c. perpendiculairement ſur la tangente tirée du point correſpondant en la baſe inférieure; ainſi la ligne tirée de N en l'air ſur la touchante G 2 (qui part du point G de la baſe inférieure correſpondant au point N de la ſupérieure) enſorte qu'il ſe faſſe un angle droit au point 2, eſt la hauteur du parallelogramme tiré de G au point N en l'air de la baſe ſupérieure. Et de même, la hauteur du parallelogramme tiré du point H au point qui eſt au-deſſus de O en l'air en la baſe ſupérieure, eſt la ligne tirée du même point O en l'air au point 3 ſur la touchante H 3 où elles font enſemble un angle droit; & ainſi les hauteurs de tous les parallelogrammes ſont les lignes tirées des points de la baſe ſupérieure perpendiculairement ſur les tangentes qui partent des points correſpondans en la baſe inférieure; & ainſi, le moindre de tous les parallelogrammes ſera celui qui du point D de la baſe inférieure, eſt tiré au point correſpondant à S en la ſupérieure; car il n'a pour hauteur ſimplement que la hauteur du cylindre oblique, ſçavoir les tirées perpendiculairement des points C, F, N, O, &c. à la baſe ſupérieure. Comme le plus grand deſdits parallelogrammes eſt celui qui de B eſt tiré vers F en l'air; car ſa hauteur eſt le côté entier du cylindre oblique: il reſte à démontrer que ces perpendiculaires ſont égales en l'un & en l'autre cylindre.

Premierement, il eſt certain que l'ouverture du com-

pas, qui fait le retranchement ſur le cylindre droit, étant égale au côté du cylindre oblique, la perpendiculaire ſur A au cylindre droit, bornée par le trait du compas, ſera égale à celle qui va du point B au point correſpondant de la baſe ſupérieure du cylindre oblique, qui eſt auſſi le côté du cylindre oblique. Et pareillement la perpendiculaire ſur le point T au cylindre droit eſt égale à la hauteur du cylindre oblique, & à la ligne tirée perpendiculairement du point S à ſa baſe ſupérieure; car l'axe du cylindre oblique qui du centre A de la baſe inférieure va à celui de la ſupérieure qui eſt au-deſſus de T, eſt égal au côté du cylindre oblique, & partant à l'ouverture du compas : mais ledit point T en l'air, centre de la baſe ſupérieure, eſt le point du cylindre droit retranché par le compas; partant ladite perpendiculaire ſur T au cylindre droit, ſera égale à la hauteur du cylindre oblique, & à la perpendiculaire ſur S.

On le démontreroit encore autrement, imaginant un triangle rectangle dont un des côtez ſoit DS; le ſecond, la perpendiculaire qui va de S à la baſe ſupérieure; & le troiſiéme qui va de D audit point ſur S en l'air; car ce triangle eſt entiérement égal à celui qui ſe fait audedans du cylindre droit dont un des côtez eſt AT; l'autre, la perpendiculaire ſur T juſques au retranchement; & le troiſiéme eſt l'ouverture du compas, qui va de A à T en l'air, & eſt égale au côté du cylindre oblique, ſçavoir à la ligne qui va de D au point S en l'air: la ligne AT eſt égal à DS, comme il eſt aiſé de le montrer; les angles en T & en S ſont droits; & partant les triangles ſont égaux, & la ligne ſur T égale à la ligne ſur S.

On montrera, comme ci-devant, l'égalité des autres perpendiculaires; ſçavoir, celle ſur 7 au cylindre droit,

à celle qui tombe sur 2 à l'oblique ; celle sur 8, à celle sur 3, &c. & nous le répeterons encore ici. L'ouverture du compas est égale en puissance aux quarrez de AT & de la perpendiculaire sur T du cylindre droit ; & pareillement elle est égale aux quarrez de A 7 & de la perpendiculaire sur 7, & aux quarrez de A 8 & de la perpendiculaire sur 8, &c. Donc les quarrez de AT & de la perpendiculaire sur T sont égaux aux quarrez de A 7 & de la perpendiculaire sur 7 ; & si au lieu du quarré AT on prend les quarrez de A 7 & 7 T qui lui sont égaux, on aura les quarrez de 7 T, 7 A, & de la perpendiculaire sur T égaux aux quarrez de 7 A, & de la perpendiculaire sur 7 ; & ôtant de part & d'autre le quarré 7 A, on aura le quarré de la perpendiculaire sur 7 égal aux quarrez de 7 T, & de la perpendiculaire sur T.

De plus, on a montré que 2 N est égal à 7 T par le moyen du rectangle 7 A G 2. Il faudra donc pour la perpendiculaire sur 2 imaginer un triangle rectangle en l'air sur le point N dont un des côtez sera N 2 ; le second, la perpendiculaire qui du point N va trouver le point correspondant en la base supérieure du cylindre oblique ; & le troisiéme est la perpendiculaire cherchée, qui du point N en l'air est menée au point 2, & ce troisiéme côté étant opposé à l'angle droit en N, vaut en puissance les quarrez de la perpendiculaire sur N (égal à celui de la perpendiculaire sur T) & de la ligne N 2 égale à 7 T ; donc la perpendiculaire sur 7 sera égal à la ligne qui du point N en l'air tombe sur 2. Mais ces lignes désignent la hauteur des parallelogrammes faits sur les cylindres, & partant lesdits parallelogrammes ayant la base égale & la hauteur égale sont égaux ; & partant la surface du cylindre oblique égale à ce qui est coupé du cylindre droit. Mais si la perpendiculaire

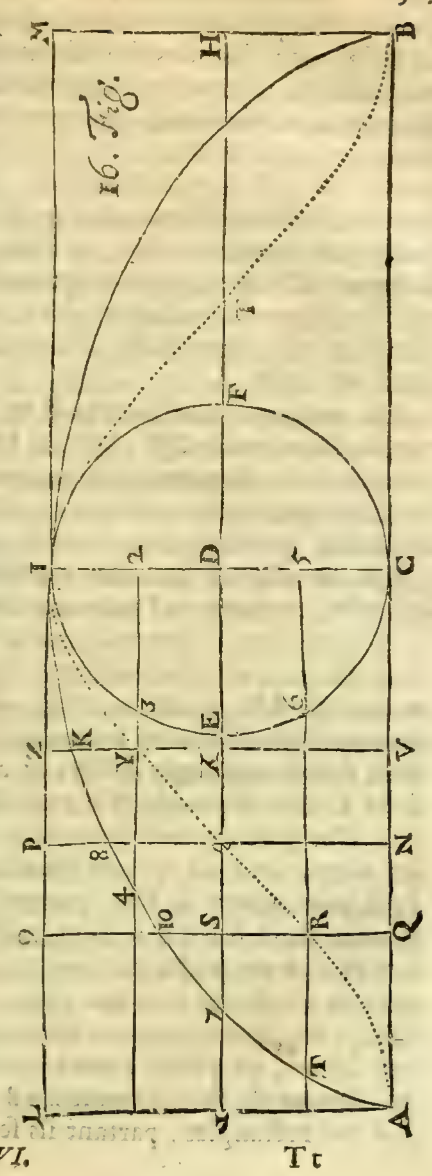
tirée du centre de la base supérieure ne tombe pas sur la circonférence de la base inférieure, ensorte que AT ne soit pas égal au demi-diametre de ladite base, alors il faut proportionner, comme on a montré au discours sur la page 322.

DU SOLIDE DE LA ROULETTE.

QUE AIB soit le chemin de la Roulette; ALMB le parallogramme fait du diamétre IC, & de la circonférence AB étenduë en ligne droite. Nous cherchons la raison qu'il y a du cylindre fait par le parallelogramme, au solide fait par la Roulette AIB, lorsque le tout tourne sur ladite circonférence ACB. Pour cet effet, je tire la ligne GDH parallele à ACB; & cette ligne se prend pour le chemin du point D centre de la Roulette. Or cette ligne GDH coupe la figure AOI 4 & le demi-cercle CEI, chacune en deux parties semblables : or il y a un Théoréme qui porte que, quand deux figures sont ainsi coupées par une ligne parallele à la ligne sur laquelle les figures font leur tour, les solides des figures sont entr'eux comme les figures; & partant le solide fait par la figure AOI 4 est égal au solide fait par la demi-circonférence IEC; car nous avons vû comme le plan AOI 4 est égal au demi-cercle IEC que nous avons trouvé être le quart du parallelogramme; ainsi ces solides seront chacun le quart du cylindre fait par le parallelogramme. Mais ne prenant que le seul solide fait par AOI 4 qui sera le quart du cylindre, & ayant tiré la ligne QRS qui représente toutes les lignes tirées perpendiculairement de AN premier quart de la circonférence ACB sur GDH, & la ligne VXY qui représente toutes les lignes tirées de NC second quart, sur la ligne courbe OYI; nous disons que le quarré de QR est égal

aux

aux quarrez de QS & SR, moins deux fois le rectangle Q-SR, & ainsi des autres lignes tirées sur ledit quart AN; & de plus que le quarré de VY est égal aux quarrez de VX, & XY plus deux fois le rectangle VXY, & ainsi des autres lignes tirées sur le second quart NC. Or les rectangles qui se trouvent dans l'espace AO sont égaux à ceux de l'espace NI; & étant de plus d'un côté & moins de l'autre, on les ôtera de part & d'autre. Il restera donc que les quarrez de QR, VY & des autres lignes tirées de AC sur la ligne courbe AROYI pris tous ensemble, seront égaux aux quarrez du demi-diametre QS ou VX pris autant de fois, & aux quarrez de SR, XY, & autres lignes tirées de GD sur la ligne



courbe AOI pris aussi autant de fois. Or lesdites lignes SR, XY, &c. sont des sinus droits dont les quarrez sont au quarré du diametre pris autant de fois, comme 1 à 8, & les quarrez du demi-diametre sont aux quarrez du diametre, comme 2 à 8. Si on joint ces raisons, on aura celle de 3 à 8 qui est celle des quarrez des lignes tirées de AC sur la ligne courbe AOI au quarré du diametre pris autant de fois; & si on y joint la raison de la figure AOI 4 au parallelogramme AI, qui est comme 2 à 8, on aura la raison de 5 à 8, qui est celle du solide que fait la Roulette AIB, au cylindre AM, le tout tournant sur ACB.

On conclura la même chose en considérant les quarrez des sinus verses QR, VY, & les autres, lesquels sont au quarré du diametre pris autant de fois, comme 3 à 8; & l'espace ARI 4 est au parallelogramme AI, comme 2 à 8, qui joint avec la raison de 3 à 8, font celle de 5 à 8; & telle est la raison du solide de la Roulette au cylindre, comme en l'autre conclusion.

Maintenant il faut voir quelle raison il y aura entre le solide de la même Roulette & son cylindre, lorsqu'elle tourne sur LM parallele à AB, où il faut considérer que le quarré de N 8 vaut les quarrez de NP & P 8 moins deux fois le rectangle NP 8; & ainsi le quarré N 8 plus deux fois le rectangle NP 8 est égal aux quarrez NP, P 8. On sçait que les quarrez de N 8, VK, & de toutes les autres sont au quarré du diamétre CI ou NP son égal pris autant de fois, comme 5 à 8, à quoy il faut joindre deux fois les rectangles NP 8, VZK, & tous les autres : or ces rectangles ont tous pour hauteur NP, & partant ils seront entr'eux comme toutes les lignes P 8; ZK, 9 10, & les autres. Mais tout l'espace rempli de ces lignes, ou plûtôt toutes ces lignes sont au diametre pris autant de fois, comme 2 à 8 : & il faut prendre deux fois ces rectangles; partant ils seront au quarré du dia-

metre pris autant de fois, qu'il y a de lignes VK, N 8, Q 10, &c. comme 4 à 8; laquelle raiſon jointe à celle de 5 à 8 ci-devant, font celle de 9 à 8, ou $\frac{9}{8}$; & parce que les quarrez Q 9, N P, VZ, &c. repréſentent les 8, il s'enſuivra que les quarrez 9 10, P 8, ZK, &c. vaudront $\frac{1}{8}$; car puiſque les quarrez Q 10, N 8, VK, &c. avec deux fois les rectangles Q 9 10, NP 8, VZK, &c. (qui tous enſemble avec leſdits quarrez vallent $\frac{9}{8}$) ſont égaux aux quarrez Q 9, 9 10, NP, P 8, VZ, ZK, &c. ceux-ci vallent auſſi $\frac{9}{8}$. Si donc on en ôte les quarrez Q 9, NP, VZ, qui vallent $\frac{8}{8}$, reſtera $\frac{1}{8}$ pour les quarrez 9 10, P 8, ZK, qui ôtez encore des mêmes quarrez Q 9, NP, VZ, reſtera $\frac{7}{8}$ pour le ſolide de la Roulette, qui ſera au cylindre comme 7 à 8.

La même choſe ſe peut conclure d'une autre façon, en diſant que le quarré P 8 eſt égal aux deux quarrez PN, N 8 moins deux fois le rectangle PN 8, & tous les autres de même, ſçavoir le quarré de ZK égal aux quarrez de ZV, & KV moins deux fois le rectangle ZVK, & ainſi des autres. On a vû que les quarrez de N 8 & les autres, ſont au quarré du diametre pris autant de fois, comme 5 à 8; & joignant le quarré de NP qui eſt 8, avec 5, on aura la raiſon de 13 à 8. De cette ſomme il faut ôter le moins, ſçavoir les rectangles PN 8 & autres, tous leſquels ont même hauteur, ſçavoir PN; ils ſeront donc entr'eux comme leurs baſes VK, N 8, Q 10, & les autres. L'eſpace A 8 I D C rempli par les petites lignes VK, N 8, &c. eſt au grand parallelogramme AI, comme 6 à 8; & le rectangle pris deux fois ſera audit parallelogramme, comme 12 à 8; & ôtant la raiſon de 12 à 8 de celle de 13 à 8, reſtera celle de 1 à 8, comme ci-devant pour la valeur des quarrez ZK, P 8, 9 10, & les autres.

Il faut maintenant conſidérer les ſolides qui ſe font

quand la figure tourne ſur LA, où on remarquera que la ligne IC parallele à ladite LA, coupe le parallelogramme AM & la figure AIB en deux également ; & partant les ſolides ſont entr'eux comme les plans ; & ainſi le ſolide fait par AIB ſera au cylindre formé par le parallelogramme AM, comme le plan de l'un eſt au plan de l'autre. Mais les plans ſont entr'eux comme 4 à 3 ; partant le cylindre ſera au ſolide de la Roulette comme 4 à 3.

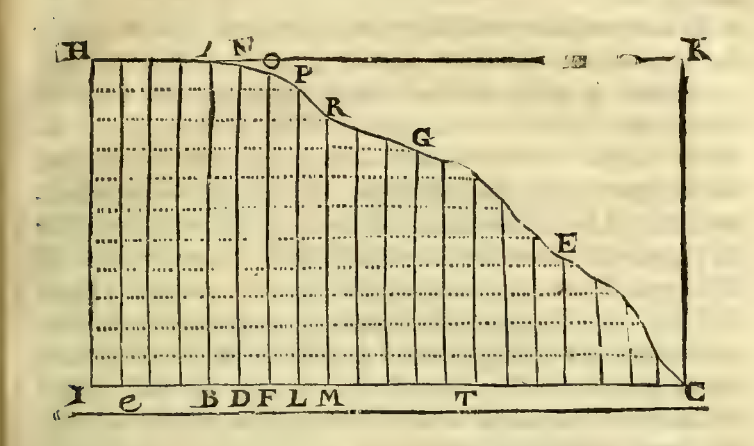
Conſidérons maintenant le ſolide fait par le plan de la compagne de la Roulette AOITB. On voit que la ligne IC coupe en deux également tant le parallelogramme AM, que ladite figure AOITB ; partant les ſolides ſeront entr'eux comme les plans : mais les plans ſont entr'eux comme 2 à 1, partant le cylindre ſera au ſolide fait par AOITB, comme 2 à 1, c'eſt-à-dire double.

On conclura de là que le ſolide fait par la figure AOI 10 eſt au cylindre AI, comme 1 à 4 ; car puiſque le ſolide fait par A 8 IDC eſt au cylindre AI comme 3 à 4 : ſi on en ôte le ſolide fait par AOIDC qui eſt au même cylindre AI comme 2 à 4, reſtera la raiſon de 1 à 4, pour celle du ſolide fait par AOI 10, au même cylindre AI.

PROPORTION DES SOLIDES composez de lignes courbes, avec le cylindre qui aura même baſe & même hauteur, enſemble de leur centre de gravité.

QUE AGEC ſoit une ligne irrégulieres telle qu'on voudra, pourvû toutefois qu'elle baiſſe toûjours vers C ; & ſoient tirées les lignes AB, BC, qui faſſent un angle en B, lequel ſoit ici ſuppoſé être droit, car cela

n'eſt pas neceſſaire, & on aura le triligne ABC. Que les lignes AB, BC ſoient diviſées en une infinité de parties égales, & chaque partie de AB ſoit égal à chaque partie de BC : de chaque point de la diviſion ſoient ti-



rées des paralleles aux lignes AB, BC, qui diviſent le triligne, comme on voit ici. Du point C j'éleve en l'air une perpendiculaire au plan ABC égale à BC; puis je conçois un plan ſur la ligne AB, tellement incliné, qu'il vienne rencontrer l'extrémité de la perpendiculaire ſur C en l'air. Enſuite j'éleve de chaque point de la ligne BC une perpendiculaire qui rencontre ce plan incliné, & chacune de ces perpendiculaires eſt égale à ſa correſpondante, ſçavoir à celle qui va du point dont elle a été tirée juſques à la ligne AB : comme la perpendiculaire tirée ſur D ſera égale à BD, celle qui eſt élevée ſur F eſt égale à BF, & ainſi des autres. Il faut auſſi concevoir un triangle rectangle iſocelle qui ſe fait par la ligne BC, la perpendiculaire en l'air ſur C qui eſt égale à BC, & la ligne qui va de B à l'extrémité de ladite per-

pendiculaire : le plan de ce triangle eſt égal à la moitié du quarré BC ; le même doit être entendu de tous les triangle qui ſe font par le moyen du plan incliné, qui tous ſont égaux à la moitié du quarré de leurs côtez égaux.

Il faut enſuite conſidérer une perpendiculaire élevée ſur le point A qui chemine ſur la ligne AGEC, & qui rencontre le plan incliné : cette ligne par ſon chemin décrit une ſuperficie ; & par conſéquent on a quatre ſuperficies qui enferment un ſolide, la premiere eſt le plan du triligne ACB ; la deuxiéme, le plan incliné qui commence à AB ; la troiſiéme eſt le triangle ſur BC en l'air & perpendiculaire ſur le plan ABC ; la quatriéme eſt celle que fait la perpendiculaire en parcourant la ligne AGEC. Ce ſolide eſt diſtingué & comme composé d'une infinité de triangles tous paralleles & ſemblables à celui qui eſt élevé perpendiculairement ſur BC, & qui eſt une des faces du ſolide ; partant ce ſolide partagé de cette ſorte eſt formé de la moitié de tous les quarrez de la ligne BC, & de ſes paralleles.

Que ſi on veut couper ce ſolide d'un autre ſens, ſçavoir par des plans paralleles à la ligne AB, alors on fera dans le ſolide des parallelogrammes égaux aux parallelogrammes BDN, BFO, BLP &c. partant tous ces parallelogrammes enſemble ſeront égaux aux demi-quarrez de la ligne BC & de ſes paralleles ; car c'eſt le même ſolide qui ne change point. On peut donc établir, que tous les demi-quarrez de la ligne BC & de ſes paralleles, ſont égaux à tous les parallelogrammes NDB, OFB, PLB &c.

Soit tiré une parallele à AB en quelque part qu'on voudra : que ce ſoit HI, ſçavoir hors de la figure, & ſoit achevé le parallelogramme HICK, & ſoit élevé un plan ſur la ligne HI, incliné en telle ſorte ; qu'il ren-

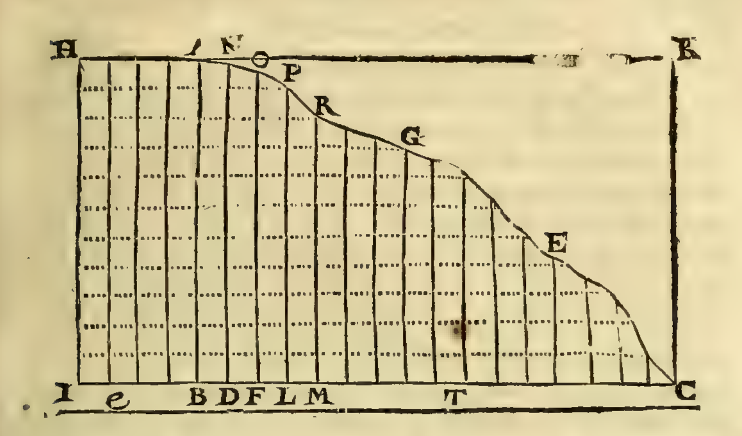
contre comme le précedent, l'extrémité de la perpendiculaire sur C en l'air prise de la longueur de IC ; & soit aussi prolongé les lignes de la figure jusques à la ligne HI : on trouvera que les demi-quarrez de la ligne IC & des autres paralleles à cette ligne, qui aboutissent à HI sont égaux à tous les parallelogrammes compris dans la figure ABC, en les prolongeant jusques à HI, & dans l'espace HIBA, sçavoir ABI, NDI, OFI, &c.

Nous considérerons maintenant la figure quand elle tourne sur HI. Alors elle forme trois solides, sçavoir un cylindre par HIBA ; un solide qui se nomme creux par la figure ACB ; un autre par HACBI ; & le grand cylindre HICK. Nous cherchons les raisons de ces solides entr'eux. Pour le petit cylindre, il est au grand cylindre comme le quarré de HA est au quarré de HK ; le solide fait de HIBCA est au grand cylindre, comme le quarré de IC & des autres paralleles jusques à HA, sont au quarré de HK pris autant de fois ; le solide de la figure ABC est au grand cylindre comme le quarré de IC & des autres paralleles moins le quarré IB, pris autant de fois, est au quarré HK pris autant de fois : & si on prend la moitié du solide, elle sera au grand cylindre, comme la moitié des quarrez IC, & des autres moins la moitié du quarré IB pris autant de fois, est au quarré HK pris autant de fois. Au lieu des demi-quarrez je prends ce qui leur est égal, sçavoir tous les parallelogrammes moins les petits de la figure HABI, & ils seront au grand quarré HK pris autant de fois, comme la moitié du solide de la figure est au grand cylindre. Que si on fait tourner la figure ABC sur AB, alors la moitié du solide fait par ABC sera au cylindre fait par ABCK, comme la moitié des quarrez de BC & de ses paralleles, sont au quarré de BC pris autant de fois ; & en general, sur quelque ligne qu'on fasse

tourner la figure, pourvû qu'elle soit parallele à AB, on aura toûjours la même équation; sçavoir, que la moitié du solide fait par la figure, sera à son cylindre, comme la moitié des quarrez compris dans la figure, sera au grand quarré pris autant de fois. J'entens que la figure commence à la ligne sur laquelle elle tourne, & que le parallelogramme commence à la même ligne.

Tout cela posé je viens à chercher le centre de gravité du plan de la figure ABC. Pour cet effet je suppose que la ligne BC est un levier dont le point B est l'appui & en C la puissance : tous les points sont les lieux sur lesquels les pesanteurs pesent; on nommera ces points centres de gravité de chaque portion de la figure, laquelle se divise en parallelogrammes qui tous ont chacun leur centre, sçavoir le point sur lequel chacun d'iceux pese; & tous ces centres ensemble viennent à être égaux (eu égard à la pesanteur qu'ils supportent) au centre total de la figure. Or nous disons que le premier point, sçavoir D, est le centre de gravité du premier parallelogramme; F, du second parallelogramme; L, du troisiéme &c. Les centres de gravité sont entr'eux en raison composée des côtez de leurs figures; par exemple, le centre D est au centre F en raison composée de celle de ND à FO, & de celle de BD à BF; ce qui veut dire que comme le rectangle ou parallelogramme des antécedens est à celui des conséquens, sçavoir comme le parallelogramme NDB est au parallelogramme OFB : ainsi toutes les pesanteurs sur tous lesdits points ou centres de gravité sont entr'elles comme tous les parallelogrammes sont entr'eux. Au lieu des parallelogrammes je prens leurs hauteurs, sçavoir les lignes AB, ND, OF, & je pose chacune de ces lignes pour le fardeau étendu, & qui pese sur chacun de ces points. Pour trouver le centre de gravité de la figure, sçavoir le point sur la ligne BC

BC où les parties sont contrepesées les unes aux autres, je feins par l'analize qu'il est en M, & j'attache à ce point M un poids égal à tous les autres ci-dessus représentées par toutes les lignes qui sont sur les points. Ce poids



est donc une ligne égale à toutes les lignes ci-dessus, & je dis ainsi : Toutes les pesanteurs, ou centres de gravité ensemble sont au poids de toute la figure qui est en M, comme tous les parallelogrammes de la figure sont au grand parallelogramme qui a un côté égal à toutes les lignes ci-dessus, & la ligne BM pour l'autre côté (car on prend ici les parallelogrammes qui étant perpendiculaires sur les lignes ND, OF, PL, &c. vont rencontrer le plan qui part de la ligne AB, & en montant va rencontrer le point sur C en l'air élevé à la hauteur de CB, comme il a été dit ci-devant.) Mais toutes les pesanteurs assemblées sont égales à la pesanteur qui est en M; partant tous les parallelogrammes de la figure sont égaux au parallelogramme qui a toutes les lignes BA, DN, FO, &c. pour un de ses côtez, & BM

pour l'autre : étant égaux ils auront même raiſon à une autre grandeur ; c'eſt pourquoi tous les rectangles ſont au grand quarré BC pris autant de fois, comme le grand rectangle qui a toutes les lignes ſuſdites AB, ND, OF, &c. pour un de ſes côtez, & BM, pour l'autre, eſt au même quarré pris comme ci-devant.

Au lieu de tous les rectangles ſuſdits je prens ce qui leur eſt égal, ſçavoir les demi-quarrez des lignes BD, BF, BL, BM, BC, &c. ils ſeront donc au grand quarré BC pris autant de fois, comme le grand rectangle ſuſdit qui a BM pour un de ſes côtez, & pour l'autre toutes les lignes AB, ND, OF, &c. eſt audit quarré BC pris &c. Mais nous avons vû que comme le cylindre fait par ABCK eſt à la moitié du ſolide fait quand la figure tourne ſur AB, ainſi le quarré BC pris autant de fois, eſt aux demi-quarrez des lignes BD, BF, BL, &c. Donc le rectangle qui a les lignes AB, ND, OF, &c. pour un de ſes côtez, & BM pour l'autre, eſt au quarré BC pris autant de fois, comme la moitié du ſolide fait par ABC eſt au cylindre. Par les indiviſibles je fais des ſolides de tous ces plans, & je dis que la moitié du ſolide fait par ABC eſt au cylindre fait par ABCK, comme le ſolide qui a pour baſe la figure ABC, & BM pour hauteur, eſt au ſolide qui a pour baſe le parallelogramme ABCK, & BC pour hauteur. Or les ſolides ſont entr'eux en raiſon compoſée de leur baſe & de leur hauteur ; partant la moitié du ſolide de ABC, & le cylindre du parallelogramme ABCK, ſont la raiſon compoſante des deux ſolides, qui ſont entr'eux en la raiſon compoſée du parallelogramme ABCK à la figure ABC, & de celle de la ligne BC, à BM. Nous connoiſſons la raiſon compoſante, c'eſt-à-dire de la moitié du ſolide au cylindre ; car (ſi c'eſt une parabole) ſon ſolide eſt à ſon cylindre comme 8 à 15 ; ici nous n'avons que la moitié du ſoli-

de; c'eſt pourquoi ce ſera comme 4 à 15. Pareillement la raiſon du plan de la parabole à ſon parallelogramme eſt connuë, qui eſt comme 2 à 3, ôtant donc de 4 à 15 la raiſon de 2 à 3 ou de 4 à 6, il reſte celle de 6 à 15; & telle eſt la raiſon de BM à BC, & le point M eſt le centre.

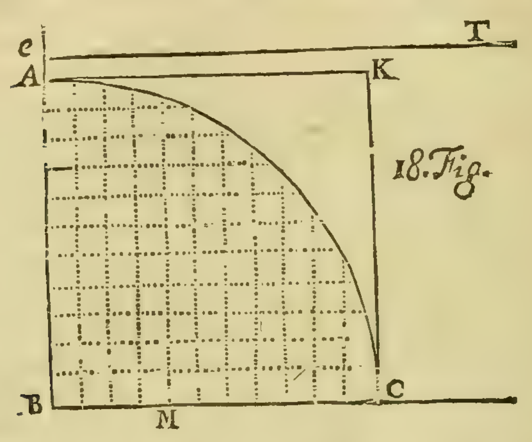
Que ſi nous feignons un cylindre tel qu'il ſoit la moitié d'un ſolide, & que nous diſions : Comme le cylindre eſt à la moitié du ſolide, ainſi quelque ligne, comme *e*T eſt à ligne BM; & comme le parallogramme ABCK eſt au plan ABC, ainſi la même ligne *e*T eſt à la ligne BC: ces trois lignes compoſent la raiſon qui eſt entre la moitié du ſolide & le cylindre, qui ſera la raiſon compoſée de *e*T à BC, & de BC à BM; & ainſi le point M ſera le centre de gravité.

Auparavant que de proceder ſelon cette derniere façon il faut avoir trouvé cette ligne *e*T, faiſant que, comme le plan ABC eſt au parallelogramme ABCK, ainſi la ligne BC ſoit à *e*T; & puis dire : Comme le cylindre fait par ABCK eſt à la moitié du ſolide fait par ABC tournant ſur AB, ainſi la ligne *e*T ſoit à BM: le point M marque le centre de gravité. Cette méthode eſt pour agir plus élegamment, & plus briévement que par la premiere qui eſt plus sûre, ſçavoir par la compoſition de raiſon des deux ſolides qui ſont entr'eux en la raiſon compoſée de celle de leur baſe, & de celle de leur hauteur, comme il a été dit ci-devant.

Il nous faut maintenant chercher le centre de gravité d'un quart de cercle par le ſolide qui ſe fait quand un quart de cercle qui partiroit du point A & viendroit en C, puis après du point C l'autre quart de cercle viendroit rencontrer la ligne AB prolongée tant que de beſoin. Quand ce quart de cercle tourne ſur AB, il ſe fait un ſolide de ce quart, & il ſe fait un cylindre du

Voyez la Figure ſuivante.

parallelogramme ABCK, lequel, en cette figure, eſt un quarré; car AB eſt égale à BC, & chacune eſt le demi-diametre du cercle. Je trouve premierement le centre de gravité, ſçavoir, le point M, en la façon ordinaire, ſçavoir, que le demi-ſolide du quart de cercle, eſt à ſon cylindre comme le ſolide qui a pour baſe le quart de cercle, & pour hauteur la ligne BM, eſt



au ſolide qui eſt compoſé du quarré BC pris autant de fois qu'il y a de diviſions en BC. Mais les ſolides ſont, entr'eux en la raiſon compoſée de celle de leur hauteur, & de celle de leur baſe, ſçavoir comme le quart de cercle, au quarré BC, & comme la ligne BM, à BC; en telle ſorte que ces quatre termes compoſent la raiſon de la moitié du ſolide fait par le quart de cercle, à ſon cylindre, laquelle eſt connuë; car le cylindre eſt au ſolide comme 6 à 4; mais ici il n'y a que la moitié, & partant la raiſon ſera comme 6 à 2. La raiſon du plan au plan, & de la ligne à la ligne, ſera donc comme 2 à 6; la raiſon du plan au plan eſt connuë; car en cette figure, ſelon Archiméde, elle eſt comme 11 à 14. Si

donc je souſtrais la raiſon de 11 à 14, de celle de 2 à 6, ou de 11 à 33, il reſtera la raiſon de 14 à 33 pour celle des lignes BM à BC; & le point M vient à être le lieu du centre de gravité, en la premiere maniere.

La deuxiéme façon eſt en diſant : Comme le cylindre de ABCK eſt à la moitié du ſolide du quart de cercle, ainſi la ligne *e*T eſt à BM; (on trouvera la ligne *e*T comme ci-devant, ſçavoir en faiſant comme le plan du quart de cercle eſt au parallelogramme, ainſi la ligne BC eſt à *e*T) c'eſt pourquoi nous voyons que la moitié du ſolide eſt à ſon cylindre, en la raiſon compoſée de *e*T à BC, & de BC à BM; & ainſi le point M eſt encore le centre de gravité, ſelon la ſeconde méthode.

La troiſiéme méthode eſt la plus ſubtile, & elle eſt telle : comme le quart & demi de la circonférence, ſçavoir AC & ſa moitié, le tout pris comme ligne droite, eſt à BC demi-diametre, ainſi BC eſt au tiers de la ligne *e*T trouvée comme ci-deſſus; & il ſe trouvera que BM ſera le tiers de ladite *e*T; & ainſi le point M ſera le centre de gravité. Il faut montrer que BM eſt le tiers de *e*T; de plus que le quart, & demi de la circonférence eſt à ſon demi-diametre, comme le même demi-diametre eſt à BM tiers de *e*T.

Pour le premier, il eſt aiſé à voir; car faiſant que comme la moitié du ſolide eſt au cylindre, ou bien comme le cylindre fait par ABCK, eſt à la moitié du ſolide fait par le quart de cercle, ainſi la ligne *e*T ſoit à BM. Nous ſçavons que le cylindre eſt triple de la moitié du ſolide; partant la ligne *e*T ſera triple de BM, ce qu'il falloit prouver.

Il faut maintenant prouver que les trois lignes, ſçavoir le quart & demi de la circonférence pris comme ligne droite, le demi-diametre & le tiers de *e*T ſont proportionnelles. Ceci ſe démontre par la proportion

troublée que je dispose comme il s'ensuit. Que le quart & demi de la circonférence soit *a* ; le demi-quart de la même circonférence soit *b* ; le demi-diametre soit *c* ; le même demi-diametre soit aussi *d* ; la ligne *e* T soit *e* ; & le tiers de la ligne *e* T ou la ligne BM, soit *m*. On fera les proportions suivantes.

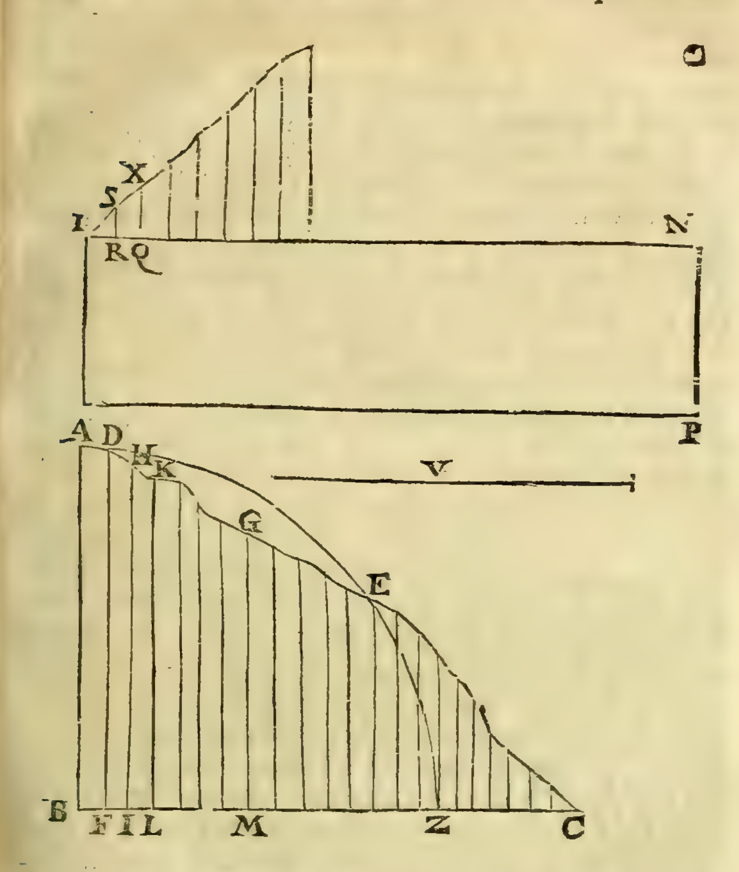
Comme *a* est à *b*, ainsi *e* est à *m* ; & comme *b* est à *c*, ainsi *d* est à *e* ; partant comme *a* est à *c*, ainsi *d* est à *m* ; partant les trois lignes *a*, *c*, *m* sont proportionnelles, ce qui restoit à démontrer.

Tout ce qui a été dit jusques à présent ne sert que pour trouver le centre de gravité des plans par le moyen d'un solide. Maintenant nous chercherons le centre de gravité d'une ligne telle qu'elle puisse être, soit droite, circulaire, ou irréguliere.

TROUVER LE CENTRE DE GRAVITÉ de la ligne AGEC.

SOIT divisé la ligne AGEC en une infinité de parties égales ; & ayant tiré les lignes AB, BC, comme ci-devant, soit aussi tiré des paralleles à AB de chaque point de la division, qui diviseront la ligne BC en parties inégales. Les parties de la ligne AGC ont chacune leur pesanteur ; & le poids d'une partie n'est pas égal au poids de l'autre. Or le poids de chaque portion est représenté par le point de sa division : les paralleles portent chaque pesanteur sur le levier BC aux points de sa division ; & c'est sur ces points de BC que pesent toutes les parties de la ligne AGC. Nous sçavons que les poids sont entr'eux comme les rectangles ; c'est-à-dire que le poids du point D est au poids du point H, comme le rectangle fait de AD & de BF, au rectangle fait de AD ou son égale DH, & de BI. Au lieu de dire,

comme les rectangles, je dis, comme la ligne BF est à BI, parce que les rectangles ont tous un côté égal, sçavoir la portion de la ligne AGC. Je feins que le cen-



tre soit en M, duquel point je fais pendre une ligne égale à AGC qui représente sa pesanteur; puis je dis que le poids du point F est au poids du point M centre, comme la ligne BF est à la ligne BM; le poids du point I est au

poids de M, comme la ligne BI à BM, & ainsi des autres. De là nous reviendrons aux rectangles, & nous dirons que tous les points pesans sur ceux de la ligne BC sont au poids universel pesant sur le point M centre total, comme le rectangle fait d'une seule portion de la ligne AGC & de toutes les lignes BF, BI, BL, BM, &c. est au rectangle fait par la ligne AGC penduë au point M, & par la ligne BM. Or tous les petits poids ramassez ensemble sont égaux au poids en M, qui est le poids de toute la ligne; & partant les deux rectangles sont égaux, & leurs côtez sont quatre lignes proportionnelles. Pour faciliter la résolution de la question du rectangle fait par une portion de la ligne AGC & des lignes BF, BI, BL, &c. j'ôte par les indivisibles la portion de la ligne AGC : cette portion étant une & terminée, ne diminuë rien dans l'infini; (car tout ce qui est fini & terminé comme 1, 2, 3, 4, & tant de nombres terminez qu'on voudra, n'augmente ni ne diminuë rien dans les infinis) ayant donc retiré cette unique portion du rectangle, il me reste l'espace compris par les lignes BF, BI, BL, &c. qui est égal au même rectangle de AGC par BM. Je pose que la ligne AGC soit la droite TN, laquelle étant divisée infiniment, j'éleve sur chaque point de la division perpendiculairement la ligne RS égale à BF, QX égale à BI, & ainsi des autres. Les lignes ainsi élevées composent une figure égale au rectangle TP dont le côté NP est égal à BM, & TN égal à AGC, puis je cherche un quarré qui soit égal à la figure ou à ce rectangle, (car l'un est égal à l'autre.) Que son côté soit la ligne marquée V. Nous dirons que comme la ligne AGC est à la ligne V, ainsi la ligne V est à la ligne BM cherchée; & ceci est la proposition universelle. Comme la ligne proposée à la ligne dont le quarré est égal à la figure ou plan fait par toutes les lignes BF, BI,

BI, BL, &c. ainsi cette même ligne qui est le côté dudit quarré, est à la ligne BM cherchée; & ainsi ces trois lignes, sçavoir la donnée, celle qui est le côté du quarré susdit, & la cherchée BM sont continuellement proportionnelles.

Cherchons maintenant le centre de gravité du quart de circonférence AGZ. Alors il faudra dire : Comme la ligne AGZ étenduë en ligne droite est à son demi-diametre BZ, ainsi ce demi-diametre est à la ligne cherchée BM. Mais le quart de la circonférence est au demi-diametre, comme tous les sinus tirez par les points esquels est divisée la circonférence, sont au sinus total pris autant de fois; or tous ces sinus sont les lignes BF, BI, BL, &c. répondans aux points de la circonférence divisée en parties égales infinies; & tous ces sinus sont égaux au quarré du demi-diametre, comme il paroît par la troisiéme proposition.

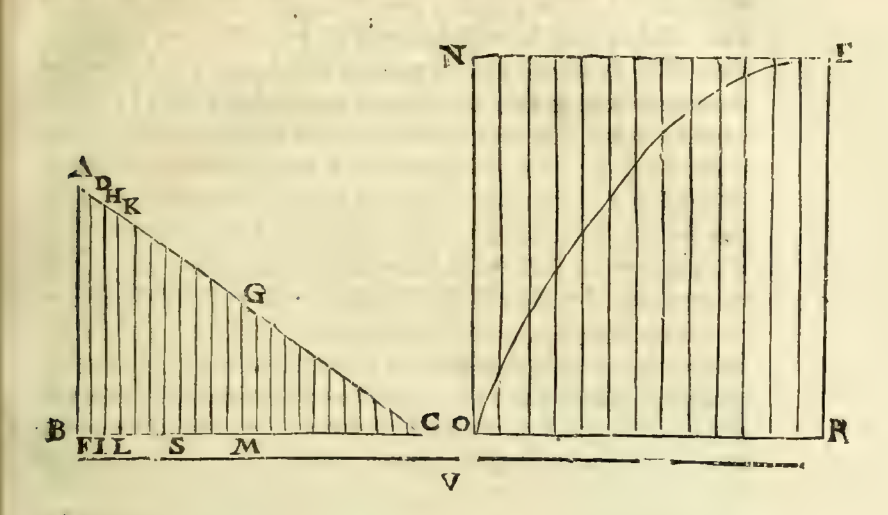
Mais si on suppose que la ligne AC soit droite, pour en trouver le centre de gravité je la divise en une infinité de parties égales & de chaque point de la division je tire des lignes paralleles à AB, qui tombent sur le levier BC & le divisent en parties égales entr'elles, & divisent la figure ABC en triangles semblables : les points de la ligne BC marquent les centres de gravité de chaque portion de la ligne proposée AC. Or tous ces centres ou pesanteurs sont entr'elles, comme les rectangles sont entr'eux, c'est à sçavoir comme le rectangle BF par AD est au rectangle BI par DH ou son égale AD; & d'autant que la portion de AC est toujours la même en tous les rectangles, les centres sont entr'eux, comme les lignes BF, BI, BL, &c. de sorte que ces petits centres ou pesanteurs particulieres sont au centre ou pesanteur totale qui est au point M (d'où on a pendu une ligne égale en grandeur & pesanteur à la ligne AC) comme

Voyez la Figure suivante.

toutes les lignes BF, BI, BL, &c. sont au rectangle AC par BM; car par les indivisibles on a retranché du rectangle fait de la portion de la ligne AC, sçavoir de AD & de toutes les lignes BF, BI, BL, &c. prises ensemble, ladite portion AD. Il faut trouver une ligne qui soit égale en puissance à l'espace fait par toutes les lignes BF, BI, BL, & les autres; puis je dis que comme la ligne donnée, sçavoir AC, est à cette ligne dont le quarré est égal à l'espace & plan susdit fait par toutes les lignes BF, BI, BL, &c. ainsi cette ligne ou côté de quarré est à BM; ensorte que la ligne susdite qui peut l'espace fait par les lignes BF, BI, BL, &c. soit moyenne proportionnelle entre la ligne proposée AC, & la cherchée BM. Mais toutes ces lignes sont à BC pris autant de fois, comme le triangle au quarré de la somme ou multitude desdits points, c'est-à-dire, comme 1 à 2; partant la ligne BM vaudra en puissance le quart du quarré BC; & partant BM est la moitié de BC; & ainsi le centre de ladite ligne proposée est au milieu d'icelle: car du point M tirant une ligne parallele à AB, elle passera par le point G milieu de la ligne AC, & marquera le lieu de son centre de gravité.

Je viens maintenant à chercher le centre de gravité d'une figure solide, soit cône, cylindre, conoïde parabolique & hyperbolique, solide elliptique, ou de quelqu'autre solide connû. Parlons premierement du cône qui est représenté par la ligne AC, & par CB tirée perpendiculairement sur AB. Le sommet du cône est C, l'axe est CB, & la ligne AB étant doublée vient à être le diametre du cercle, ou base du cône. Que l'axe de ce cône, sçavoir BC, soit coupé par des plans perpendiculaires à cette axe en une infinité de parties égales: toutes ces divisions font autant de cercles, qui tous ensemble par les indivisibles composent le cône, & sont entr'eux

comme les quarrez de leurs diametres; ſçachant donc comme les diametres ſont entr'eux, on ſçaura auſſi la proportion des quarrez. Or cette diviſion fait dans le cône & ſur ſon axe des triangles ſemblables, comme



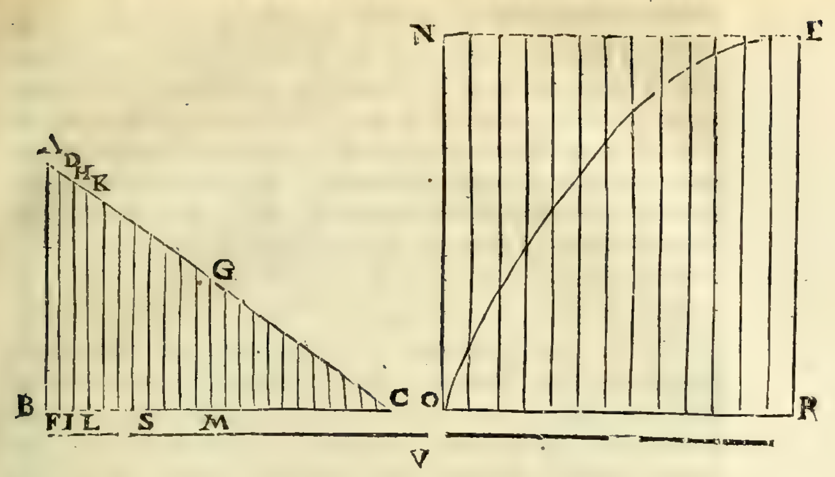
ABC, DFC, HIC, KLC, &c. c'eſt pourquoi les demi-diametres AB, DF, HI, KL &c. ſont entr'eux, comme les portions de l'axe BC, FC, IC, LC ſont entr'elles: or ces portions ayant différences égales, elles gardent entr'elles l'ordre naturel des nombres; les demi-diametres garderont donc entr'eux l'ordre naturel des nombres. Si les diametres gardent l'ordre naturel des nombres; leurs quarrez garderont l'ordre naturel des quarrez deſdits nombres; & partant ces cercles ſeront entr'eux comme les quarrez des nombres qui ſuivent l'ordre naturel; c'eſt-à-dire comme 1, 4, 9, 16, 25, &c.

Cela poſé, pour trouver le centre de ce cône, il faut chercher un plan dans lequel les lignes tirées gardent

la même proportion, c'eſt-à-dire que la ligne ſoit à la ligne comme un quarré à un quarré ; car le plan qui aura cette condition ne manquera pas d'avoir le centre de gravité au même lieu que le ſolide. Je prens pour le plan une parabole qui a pour ſommet le point E : ſon axe eſt ER ; & la touchante EN repréſentera l'axe du cône BC. Je diviſe EN en parties infinies & égales, & de chaque point je tire des lignes paralleles à NO (repréſentant AB) qui diviſent le plan ou triligne EON. On a montré que ce triligne eſt à ſon parallelogramme comme 1 à 3 ; on dira donc : Comme le triligne eſt à ſon parallelogramme, ainſi NE ſera à une autre ligne V ; partant V ſera triple de NE ; & ſi NE vaut 4, V vaudra 12. Je dis enſuite : Comme le cylindre fait par le parallelogramme de la parabole, eſt à la moitié du ſolide fait par le triligne OEN qui eſt renfermé dans le cylindre, ainſi 4 à 1 ; & ainſi la ligne V qui vaut 12 eſt à 3 qui ſera la ligne CS, & le point S montrera le centre de gravité. Or BC étant 4, BS ſera 1, & CS ſera 3.

CENTRE DE GRAVITE' *du Conoïde parabolique.*

SI je cherche le centre de gravité du conoïde parabolique, je le couperai, ou ſon axe, en parties infinies & égales par des plans qui diviſeront tout le ſolide en cercles (car dans le conoïde parabolique auſſi bien que dans le cône, les ſections faites par un plan parallele à la baſe, engendrent des cercles.) Or tous ces cercles ſont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres ; & partant ſçachant comme les diametres ſont entr'eux, nous ſçaurons comment ſont leurs quarrez. Mais dans la parabole les quarrez des ordonnées ſont entr'eux comme les portions de l'axe : ici les portions ſont



égales, & partant ils ſont entr'eux comme les nombres naturels; les quarrez des diametres ſeront donc entr'eux en l'ordre des nombres naturels; & le premier quarré étant 1, le ſecond ſera 2, le troiſiéme ſera 3 &c.

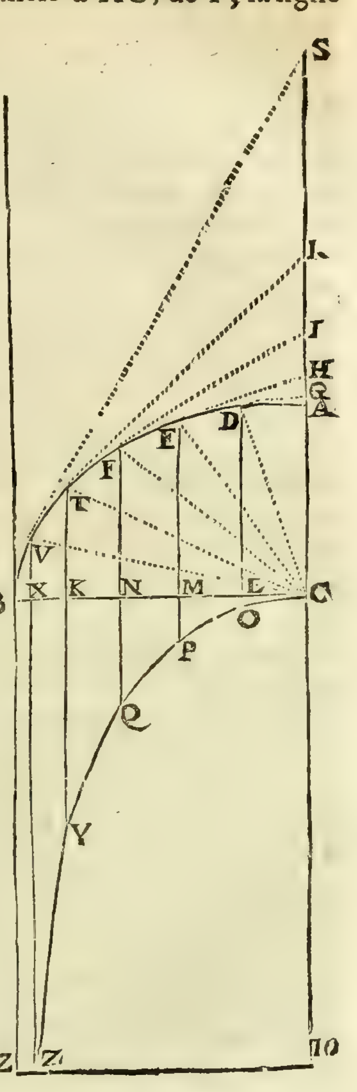
Par noſtre doctrine il faut trouver une figure ou plan qui ait cette même proprieté. Je trouve que le triangle fait la même choſe; il faut donc feindre que ABC eſt un triangle. Je diviſe BC en parties égales & infinies, & par les points je tire des paralleles à AB : or BC repréſente l'axe du ſolide dont on cherche le centre. Cela fait je dis : Comme le plan du triangle eſt à ſon parallelogramme, ainſi BC eſt à la ligne V. On ſçait que le triangle eſt au parallelogramme comme 1 à 2; partant V ſera double de BC; ſi BC eſt 3, V ſera 6. Après on dit : Comme le cylindre fait par le parallelogramme du triangle eſt à la moitié du ſolide, ou du cône fait par le triangle, ainſi la ligne V ſera à BM qui marquera le centre. Or le cylindre ſuſdit eſt à la moitié du cône comme 6 à 1; partant BM ſera $\frac{1}{6}$ de la ligne V, &

le tiers de BC ; le centre de gravité du conoïde parabolique sera donc au tiers de son axe du côté de la base ; & ainsi divisant l'axe en trois parties égales, le premier point du côté de la base sera le centre de gravité.

Il faut observer en général, que quand on veut trouver le centre de quelque solide, après avoir divisé son axe en une infinité de parties égales, & par conséquent tout le solide, sçachant quelle proportion ou raison gardent toutes les sections faites par le plan qui a divisé le solide : il faut trouver un plan duquel la proprieté soit telle, que les lignes qui le divisent en une infinité de parties égales, soient entr'elles comme toutes les sections du solide sont entr'elles : si les sections, ou plans du solide sont entr'eux comme le quarré au quarré, les lignes du plan doivent être entr'elles comme le quarré au quarré. Si la proportion ou raison est autre dans le solide, elle doit être telle dans le plan : observant toûjours dans le solide que si le plan est au plan comme le quarré de son demi-diametre, au quarré du demi-diametre de l'autre, dans le plan la ligne soit à la ligne, comme un quarré à un quarré. Voilà ce qu'il faut remarquer.

Soit la ligne courbe ou circulaire BTEA divisée en une infinité de parties égales aux points V, T, F, E, D, &c. & de chacun desdits points soit tiré une touchante comme VS, TR, FI, EH, DG, &c. à telle condition que la derniere comme DG étant tirée, toutes les autres rencontrent plus haut la ligne CS, sçavoir plus loin du point C, comme aux points H, I, R, S &c. qui partant seront tous plus éloignez de C que le point G dans la ligne CS. Outre cela, du point B je tire la touchante, qui vient à être parallele à CS. Cela fait, des points d'atouchement comme de D, je tire une ligne, sçavoir DO, qui soit égale & parallele à CG ; du point

E, la ligne EP égale & parallele à HC; de F, la ligne FQ égale & parallele à IC; semblablement la ligne TY égale à RC, & VZ égale à SC, & ainsi des autres points infinis, la ligne CS étant prolongée tant qu'il faudra, & la touchante en B tirée à l'infinie, laquelle viendra à être asymptote au regard de la ligne qui se forme par l'extrémité des lignes tirées des points de la division paralleles à CS, qui est la ligne courbe COPQYZ. Puis aprés, si du point C on tire des lignes à chaque point de la division de la courbe BFA, tout l'espace AFBC viendra à être divisé en secteurs infinis, lesquels par les indivisibles se convertissent en triangles, à cause que les petites portions des lignes courbes deviennent droites par la division infinie. Je dis davantage que tout l'espace BFACQZ jusques au bout de la courbe CQZ tirée à l'infini, & qui est entre ladite courbe, & la touchante B tirée aussi à l'infini, se trouve divisé en



parallelogrammes infinis, l'un desquels est DOCG qui représente le moindre. C'est un parallelogramme, parce que dans les indivisibles la touchante DG passe pour la partie de la ligne courbe DA, comme il a été dit ci-devant dans une autre proposition : or DO a été faite égale & parallele à GC, & pareillement de tous les autres points, on a tiré les lignes égales & paralleles à leurs correspondantes en CS.

Pour venir à la conclusion, les parallelogrammes ont tous un même côté que les triangles, qui est chaque portion égale de la ligne courbe AEB. Je dis donc que les triangles qui ont pour sommet le point C duquel partent les deux côtez du triangle, & dont le troisiéme est la portion de la courbe BFA divisée à l'infini ; tous ces triangles, dis-je, qui remplissent l'espace AFBC, partent du point C comme de leur sommet. Mais les parallelogrammes qui sont sur bases égales & entre mêmes paralleles que les triangles, sont doubles desdits triangles, & les uns & les autres sont entre les paralleles CO & DG & entre CP & EH &c. (ces lignes CO, CP sont seulement imaginées pour montrer que les triangles, & les parallelogrammes sont entre les mêmes paralleles, & sur des bases égales ; car les bases des uns & des autres sont les portions de la ligne courbe divisée à l'infini, & les portions des touchantes comprises entre les paralleles à CA passent & sont prises pour ces portions de courbes comprises aussi entre les mêmes paralleles.)

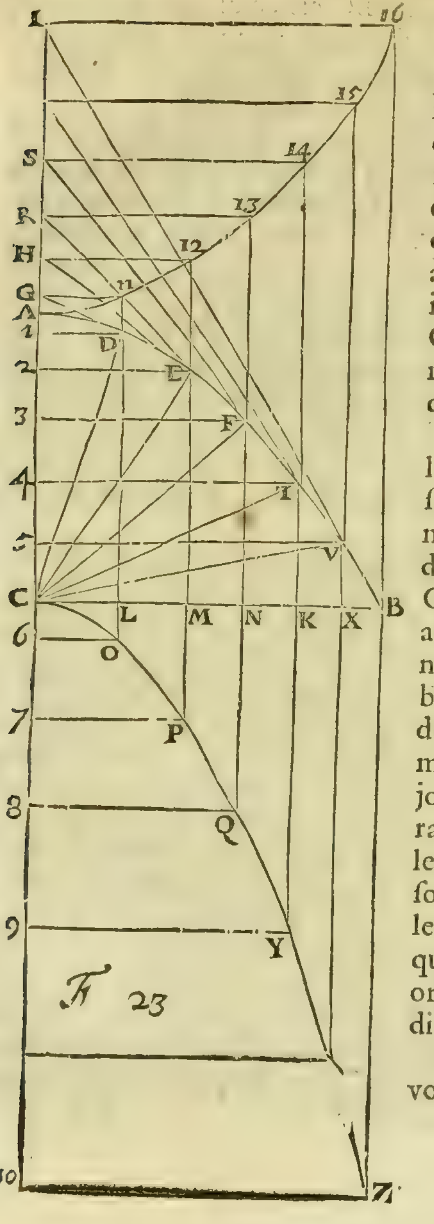
Puisque les parallelogrammes sont doubles des triangles, par les indivisibles, l'espace qui est occupé par lesdits parallelogrammes, lequel se trouve compris entre la courbe AEB d'une part, & la courbe CQZ produite à l'infini, d'autre part ; & entre les lignes droites AC & la touchante B tirée à l'infini, tout cet espace, sçavoir le quadriligne ZBFACQZ sera double de l'espace AFBC.

AFBC. Mais l'espace AFBC est celui qui est fait par les triangles; partant il sera égal à l'autre espace compris dans ZBCQZ, les deux lignes BZ & CZ étant tirées à l'infini; ce qu'il falloit démontrer.

Or la touchante BZ est asymptote, d'autant que, comme la ligne DO qui part de la touchante DG est égale à la ligne GC qui part de l'extrémité de la même touchante, & ainsi de toutes les autres lignes qui partent des touchantes, il faudroit que la ligne qui sort du point B, & qui devroit rencontrer la même ligne CQZ en quelque point plus éloigné, fût égale à la portion de la ligne CAI prolongée & comprise entre le point C & la rencontre de la touchante en B. Mais il est impossible que la touchante en B la puisse rencontrer, puisqu'elles sont paralleles; ainsi elle ne rencontrera jamais la ligne CQZ en quelque point que ce soit, & partant elle est asymptote.

Considérons la figure quand nous aurons tiré les ordonnées des points D, E, F, &c. sur l'axe CA, & pareillement des points O, P, Q, &c. sur l'axe C 10, supposant que la figure ABC soit une parabole.

Soit D 1 la premiere ordonnée de la figure ABC, & O 6 de CZ 10, on aura DO égal à GC, & aussi à 1 6; & si des deux lignes égales GC, & 1 6 on ôte la ligne C 1 qui leur est commune à toutes deux, il restera G 1 égale à C 6. Or par la proprieté de la parabole, G1 est divisée en deux également par le sommet A; partant C 6 est double de A 1; & ainsi de tous les autres, sçavoir C 7 sera double de A 2; C 8 de A 3, &c. & ainsi, comme les lignes, ou parties de l'axe de la parabole ABC sont entr'elles, ainsi les doubles parties seront entr'elles dans l'autre figure CZ 10. Mais dans la parabole les parties sont entr'elles comme les quarrez des ordonnées, & partant dans la figure CZ 10 les parties de l'axe se-



ront aussi entr'elles, comme les quarrez des paralleles aux ordonnées (qui sont les ordonnées de ladite figure CZ 10) sçavoir, comme le quarré de O6 est au quarré de P 7, ainsi C 6 est à C 7; d'où il s'ensuit que la figure CZ 10 sera aussi une parabole, qui sera double de la parabole ABC.

Mais si l'on veut que les portions de l'axe soient entr'elles comme les cubes des ordonnées, & qu'ainsi G 1 soit triple de A 1, alors C 6 sera triple du même A 1, & la parabole CZ 10 sera triple de la parabole ABC. La même chose se fera toûjours changeant les paraboles, & faisant que les portions de l'axe soient entr'elles comme les quarré-quarrez, quarré cubes &c. des ordonnées à l'axe desdites paraboles.

Maintenant il faut voir comment se fera

la quadrature de la parabole. Pour cet effet il faut considérer dans A B C que les ordonnées & les portions de l'axe forment des parallelogrammes qui remplissent la figure. Pour l'autre figure CZ 10, je la puis considérer comme ayant tiré du point B une touchante qui rencontre CI en I (car dans la parabole la touchante au point B n'est point parallele à CI, comme à la figure précedente, & partant elle doit rencontrer la ligne CI.) De ce même point B on tire BZ parallele à CI qui rencontrera la ligne CQZ ; car cette ligne n'est formée que par l'extrémité des lignes paralleles à CA. Du point de la rencontre soit fermée la figure CQZ 10. Les ordonnées de la parabole ABC seront égales aux ordonnées de la parabole CZ 10. Mais les portions de l'axe de la parabole ABC ne valent que la moitié des portions de l'axe de la parabole CZ 10 ; partant celles-ci sont doubles de celles-là, & partant les parallelogrammes de la parabole CZ 10 sont doubles des parallelogrammes de la parabole A B C ; & partant la parabole CZ 10 sera double de A B C, ou du triligne qui lui est égal BCQZ ; & le parallelogramme CBZ 10 triple de la même parabole ABC ; donc ladite parabole C Z 10 sera les deux tiers dudit parallelogramme CBZ 10 ; & de cette sorte je trouve la quadrature de la parabole, puisque j'ai un parallelogramme qui a raison avec la parabole, Archiméde s'étant contenté de trouver une parabole égale, ou bien en raison, à un triangle. Que si on prend les cubes, quarré-quarrez & autres puissances des ordonnées on en conclura de même la quadrature de ces paraboles.

Il faut maintenant prouver que les deux trilignes DA 1, & OCL sont égaux ; & pour cet effet ayant tiré la ligne droite CD, je dis que le triligne CDA est la moitié du quadriligne CODA : si donc de ce quadrili-

gne j'ôte le parallelogramme CLD I, il restera les trilignes COL & AD I; si du triligne on ôte le triangle CD I, il restera le triligne DA I; par ainsi d'une grandeur double d'une autre grandeur, j'ai tiré une partie double d'une partie que j'ai tirée de l'autre, partant le reste de la grande doit être double du reste de la petite, & de cette sorte DA I, & LCO sont doubles de DA I; donc DA I sera égal à LCO, ce qu'il falloit démontrer.

Il reste à faire voir que la ligne CD coupe en deux également le quadriligne CODA (car il n'est pas toûjours véritable.) Pour cet effet on suppose OD pour un des côtez du parallelogramme, & pour l'autre la portion DA indivisible sur la touchante DG ou sur la ligne courbe DA qui est la même chose, & le triangle CD avec la même portion indivisible DG ou DA. Je dis que le parallelogramme est double du triangle; car ils sont sur des bases égales, qui sont lesdites portions indivisibles, & entre mêmes paralleles, sçavoir OC & DG; ainsi CD coupe le parallelogramme, ou pour mieux dire, le quadriligne ODAC en deux également; car nous ne considérons plus l'espace DAG ni celui qui est compris entre la courbe OC & la droite OC; car ces espaces ne sont point de nos parallelogrammes & triangles. Or tous ces triangles ne sont considérez que comme des lignes, sçavoir CD, CE, & les autres à l'infini; & toutes les lignes ou triangles remplissent l'espace ABC comme les parallelogrammes (au lieu desquels nous prenons les lignes DO, EP, FQ, &c.) remplissent l'espace ZBACQZ, soit que les lignes BZ & CQZ se rencontrent ou non.

Venons maintenant au solide qui se fait par la révolution de la figure sur l'axe AC. Nous voyons qu'il se fait plusieurs cylindres, rouleaux de cylindres, cônes, ou rouleaux de cônes; comme le cylindre fait sur l'axe

CA par le parallelogramme CADO; le cône fait sur la même CA, & par le triangle CAD; puis les rouleaux de cylindres faits par les petits parallelogrammes, comme sont DOPE & les autres semblables qui ont pour base les portions indivisibles de la courbe, & les rouleaux de cônes qui sont faits par les triangles comme CDE, CEF & les autres semblables autour de l'axe CA. Mais les cônes sont aux cylindres qui sont sur même base, comme 1 à 3, & les rouleaux des cônes sont aux rouleaux des cylindres en même raison; & partant le solide fait de ABC sera le tiers du solide ZBACQZ; & si les lignes BZ, CZ ne se rencontre point, il faut supposer le solide continué à l'infini de ce côté-là, & ôtant le solide fait de ABC, restera le solide BCZ, qui sera double du même ABC. Dans les plans nous avons trouvé que le plan ABC est égal au plan BCZ continué à l'infini s'il est besoin. Il faut maintenant considérer ces figures comme paraboles; & par conséquent la touchante du point B, ou plûtôt la ligne tirée de B parallele à AC rencontra la courbe CZ continuée. Soit donc fermé la figure au point de la rencontre, & soit CZ 10 la figure tournant sur son axe, & comparant les cylindres faits par les parallelogrammes D 1 A, E 2 A, &c. à ceux de l'autre parabole comme O 6 C, P 7 C, &c. parce que les ordonnées D 1, O 6, &c. de l'une & de l'autre figure sont toutes égales; mais les portions de l'axe de la parabole CZ 10, comme C 6, &c. sont doubles des portions de l'axe AC, comme A 1 &c. il s'ensuit que chaque cylindre d'embas sera double de celui d'enhaut, & partant tout le solide d'embas fait par CZ 10 roulant sur C 10 sera au solide fait par ABC tournant sur AC, comme 2 à 1. Mais on a vû que le solide de AB étoit au solide fait par ZQCB, comme 1 à 2; partant ledit solide de ZQCB sera égal au solide de CZ 10;

& ainsi le solide de CZ 10 sera la moitié du cylindre fait par le parallelogramme CBZ 10, ce qu'il falloit démontrer.

Voyez la Figure de la page 354.

Il faut maintenant considérer une autre figure qui se fait élevant du point L une ligne égale & parallele à CG, sçavoir L 11; du point M tirant M 12 égale & parallele à CH, & ainsi des autres, & par l'extrémité desdites lignes se forme la ligne courbe A 11 12 16, & de chacun desdits points on tire les ordonnées 11 G, 12 H, 13 R, &c. qui sont égales à celles de ABC tirées des points correspondans DEF, &c. qui sont infinis : de plus AG est égal à A 1, AH égal à A 2, &c. dans la parabole simple.

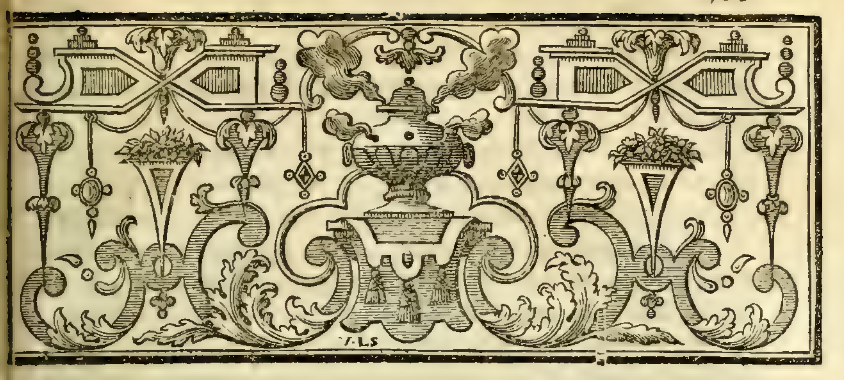
On considérera aussi que les lignes L 11, & DO sont égales, & pareillement M 12 & EP; N 13 & FQ, &c. & partant les parallelogrammes 11 LM 12, 12 MN 13, &c. sont égaux aux parallelogrammes ODEP, PEFQ, &c. car on ne prend ici que les lignes DOEP &c. ou leurs égales L 11, M 12, &c. au lieu desdits parallelogrammes. Or on a montré que les triangles CAD, CDE, CEF &c. sont la moitié des parallelogrammes AO, DP, EQ, &c. partant ils seront aussi la moitié des parallelogrammes ACL 11, 11 LM 12, 12 MN 13, &c. l'espace ABC est donc la moitié de l'espace 16 ACB, soit que les lignes A 16, & B 16 se rencontrent ou non. D'où il s'ensuit que ABC est égal à l'espace BA 16, quand même les lignes A 16 & B 16 étant prolongées à l'infini, ne se rencontreroient point. On pourroit montrer la même chose plus briévement, comme il s'ensuit. Les lignes 11 L, 12 M, 13 N, & les autres infiniment, étant égales aux lignes DO, EP, FQ, &c. il s'ensuit que l'espace ZCAB est égal à BCA 16; ôtant donc ABC commun, restera BA 16 égal à BCZ qui a été ci-devant montré égal à ABC, & partant 16 AB lui est aussi égal.

Maintenant soit ABC la premiere parabole, la touchante B I rencontrant C I, la ligne B 16 égale & parallele à C I rencontrera la courbe A 16 au point 16, & la figure A 16 I sera une parabole égale & semblable à ABC : car les ordonnées de l'une sont égales aux ordonnées de l'autre, sçavoir, D 1 à G 11, E 2 à H 12 &c. puisqu'elles sont entre les mêmes paralleles ; & par la proprieté de la parabole, AG est égal à A 1, AH à A 2, AR à A 3, &c. sçavoir les portions de l'axe où aboutissent les ordonnées correspondantes sont égales ; & partant toute la parabole ABC sera égale à toute la parabole A 16 I. Or on a trouvé que l'espace BA 16 est égal à ABC ; partant les trois pieces ou espaces ABC, A 16 I, & BA 16 comprises dans le parallelogramme ICB 16, & qui le forment, sont égales entr'elles.

Ce que nous venons de dire ici de la premiere parabole, ou de la parabole du premier genre, ce qui est la même chose, se doit entendre aussi des paraboles des autres genres, c'est-à-dire que, si la parabole ABC est du troisiéme genre, la parabole A 16 I sera aussi du troisiéme genre ; mais elle ne sera pas la même que la parabole ABC : car les parties AG, AH, AR, &c. sont bien entr'elles en même raison que les parties A 1, A 2, A 3 &c. mais AG n'est pas égale à A 1, ni AH égale à A 2 &c. comme elles sont dans la parabole du premier genre.



DE



DE TROCHOIDE
EJUSQUE SPATIO.

DEFINITIONES.

SI circulus duplici motu ſimul & eodem tempore moveatur, altero quidem recto, quo centrum illius feratur ſecundùm lineam rectam : altero autem circulari, quo ipſe cum omnibus ſuis radiis circa centrum ſuum circumvolvatur ; ſitque uterque motus ſibi ipſi ſemper uniformis, & alter alteri æqualis, ita ut recta quam percurrit centrum ſpatio unius integræ converſionis circumferentiæ, intelligatur eſſe eidem circumferentiæ æqualis : atque inter movendum circulus ipſe perpetuò maneat in eodem plano infinito in quo extitit in initio motûs : ejuſmodi circulum vocamus *Rotam.*

Recta per quam fertur centrum, vocetur *iter centri.*

Quæcunque puncta vel lineæ à circulo denominantur, denominentur hîc à rotâ, ut centrum rotæ, radius rotæ, circumferentia rotæ, &c.

Manifestum est autem circumferentiam rotæ contingere continuè & successivè in aliis atque aliis punctis quandam lineam rectam itineri centri parallelam: vocetur hæc *via rotæ.*

Manifestum est quoque quidquid accidat in quâvis integrâ circumvolutione rotæ, idem quoque accidere in quâcunque aliâ: modo initia circumvolutionum sumantur à radiis similiter positis, id est, qui cum itinere centri æquales ad easdem partes angulos constituant, sintque radii ipsi paralleli.

Nos itaque unam conversionem assumamus, cujus initium statuimus in eo rotæ radio qui perpendicularis est tam viæ rotæ quàm itineri centri, eumque ipsum radium, dum ad motum rotæ movetur, consideramus ac prosequimur, donec absolutâ integrâ conversione, idem ab eadem parte fiat rursus iisdem viæ rotæ & itineri centri perpendicularis. Hic ergo radius in initio circumvolutionis vocetur *radius principii motûs*: in medio autem dum ipse perpendicularis est itineri centri, sed ad alteras partes constitutus, dicetur *radius medii motûs*: & tandem in fine, *radius perfecti motûs.*

Quòd si radius ipse in quâcumque positione produci intelligatur utrinque quantùm libuerit etiam extra rotam, idem dicetur linea principii, medii, vel perfecti motûs.

Jam in lineâ principii motûs indefinitè productâ versùs viam rotæ intelligatur sumptum quodcumque punctum præter centrum, atque inter ipsum centrum versùs viam rotæ, etiam in eâdem viâ aut ultrà, cujus puncti motus spectetur: fiet necessariò ut propter implicationem motûs circularis cum recto, ipsum punctum describat lineam aliquam, cujus portio quædam ab unâ parte itineris centri, altera autem portio ab alterâ parte existat; ea autem incipiet in lineâ principii motûs, & in lineâ perfecti motûs desinet. Vocetur hæc *Trochoides.*

Recta quæ Trochoidis hujus extrema puncta jungit, estque vel via rotæ, vel ei parallela, dicatur *Trochoidis ejusdem basis.* Portio lineæ medii motûs intercepta inter trochoidem & basim ejus, *axis Trochoidis* vocabitur; qui quidem axis ab itinere centri bifariam secabitur in puncto quod nos *centrum trochoidis* nuncupamus. *Vertex* autem *trochoidis* est extremum axis punctum in trochoide existens, seu basi oppositum.

Jam manifestum est à trochoide & ab ejusdem basi comprehendi spatium quoddam planum; quod nos postea vocabimus *spatium trochoidis.* Ejus centrum, basis, axis & vertex iidem qui trochoidis intelligantur.

Quæcunque recta ab aliquo puncto trochoidis ducitur usque ad axem parallela viæ rotæ, dicatur *ad axem ordinata.*

Item, mensura integri motûs conversionis rotæ intelligatur tota circumferentia rotæ: mensura dimidii motûs intelligatur dimidia circumferentia; & sic in universum mensura cujusvis partis motûs rotæ intelligatur esse arcus circumferentiæ ejusdem rotæ, qui ad integram circumferentiam eandem habeat rationem, quam pars motûs assumpta ad motum conversionis integræ.

Præterea, si circa axem trochoidis tanquam circa diametrum, & circa ejusdem trochoidis centrum circulus describatur, is erit vel rota ipsa, vel eâdem major aut minor, prout punctum, quod trochoidem descripsit, sumptum fuerit vel in circumferentiâ rotæ, vel extra vel intra ipsam rotam. Et siquidem circulus ipse sit rotæ æqualis, seu rota ipsa; tunc ipsa trochoides denominabitur à rota simplici, diceturque *trochoides rotæ simplicis*, seu *trochoides veræ rotæ.* Si autem ipse circulus circa axem trochoidis descriptus major sit quàm rota, tunc trochoides denominabitur à rotâ contractâ, diceturque *trochoides rotæ contractæ.* Si tandem circulus minor sit ip-

sâ rotâ, ejus trochoides denominabitur à rotâ prolatâ, diceturque *trochoides rotæ prolatæ.* Spatia, bases, & cætera ad ipsas trochoides pertinentia, curvæ suæ denominationem sortiantur : at circulus ipse circa axem trochoidis tanquam circa diametrum descriptus, dicatur circulus suæ trochoidi proprius.

Et quia positis iis quæ jam dicta sunt, concipi potest duplex rotæ motus circularis, prout motus circuli circa centrum intelligi potest fieri ad hanc vel illam partem : nos eum assumimus, qui rotis communibus convenit, quo quidem motu pars interior circumferentiæ, putà quæ adjacet viæ rotæ, fertur non ad easdem parter ad quas centrum tendit motu recto, sed ad contrarias ; superior autem rotæ pars quæ viæ ejus opponitur, fertur secundùm motum centri. Hic enim motus omnium rotarum physicarum proprius est & veluti naturalis; alter autem eidem contrarius est, veluti violentus & contra naturam rotæ : geometricè tamen uterque considerari potest, nec alia inter trochoides quæ ab ipsis orientur, accidet differentia, nisi quod quæ partes erant unius extremæ in alterâ, eædem erunt mediæ ; spatia autem longè different cùm figurâ tùm magnitudine, sed quia unum erit veluti complementum alterius, ideo ex uno noto dabitur alterum ; quam speculationem nos in aliud tempus remittimus. Agimus autem hîc de trochoide rotæ tam simplicis quàm prolatæ & contractæ, sed motu communi rotæ physicæ motæ, ac de eâ & de spatio ejus sequentia enuntiamus Theoremata, quorum pars statim demonstrabitur ; reliqua autem pars quæ longissimæ & acutissimæ speculationis est, opportuno tempore suam nanciscetur demonstrationem, quam quidem à nobis inventam (ut cætera quæ ad rotam pertinent) eo usque retinemus donec per tempus liceat integrum opus producere.

Supponimus autem quædam quæ etsi per se demonstrationem requirant, tamen ea tam facilis est, ut cuivis in Geometriâ mediocriter versato statim appareat, qualia sunt hæc. In primo quadrante integræ conversionis rotæ punctum quod trochoidem describit, percurrit spatium quod est inter basim trochoidis & iter centri; idemque punctum motu recto posterius est centro rotæ. In secundo quadrante idem punctum percurrit spatium quod est ab itinere centri usque ad verticem trochoidis, estque adhuc posterius centro rotæ. In tertio quadrante punctum idem percurrit spatium quod est à vertice trochoidis usque ad iter centri, sed jam hoc punctum præcedit respectu centri, quod sequitur si motus recti habeatur ratio. In quarto & ultimo quadrante punctum de quo agimus percurrit spatium quod est ab itinere centri usque ad basim trochoidis, & adhuc idem punctum præcedit, centrum autem rotæ sequitur motu recto.

Hinc verò atque ex quibusdam aliis quæ naturam rotæ motæ, ut dictum est, statim consequuntur, demonstrabitur facilè trochoidem quæ fit ab unicâ conversione cujuscunque rotæ in seipsam non recurrere, seu per idem punctum bis transire non posse: contrarium autem accideret in rotâ prolatâ, si aliud à nostrâ sumeretur principium.

Nec minus facilè est demonstrare eam trochoidis partem, quæ est à principio usque ad verticem æqualem esse & similem alteri parti quæ est à vertice usque ad finem, & ambas partes sibi invicem congruere posse. Item, primam medietatem ejusdem trochoidis totam esse ab unâ parte axis, secundam verò totam esse ab altera. Idem dictum intelligatur de duabus partibus spatii ipsius trochoidis quæ ab ejusdem axe constituuntur. Atque ita quæ in unâ ex his medietatibus demonstrabuntur, in alterâ quoque medietate demonstrata esse quivis facilè

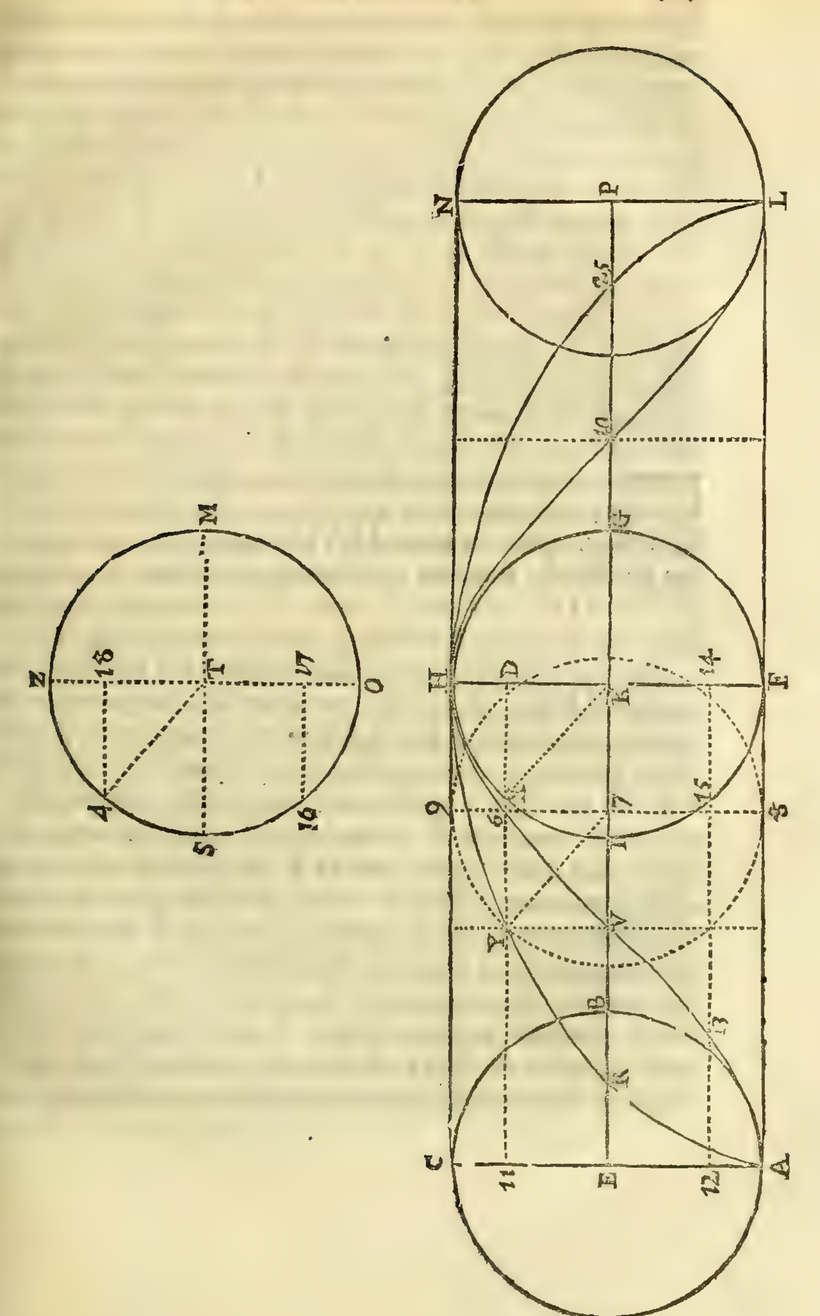
intelliget, collatis invicem duarum medietatum partibus illis quæ ſunt prope verticem &c. His poſitis primaria trochoidis proprietas, quam propterea demonſtrabimus, videtur eſſe hæc.

Propositio Prima.

Si ab aſſumpto puncto primæ medietatis trochoidis ad axem ordinata ſit recta quævis, ejus portio quædam erit extra circulum ipſi trochoidi proprium; quæ quidem portio æqualis erit arcui rotæ, qui menſurat eam partem motûs, quæ reſtat inde ab eo tempore, quo notatum eſt à puncto mobili punctum aſſumptum, uſque ad medietatem integræ converſionis rotæ.

Esto recta EP; iter centri rotæ cujuſdam æqualis circulo ſeorſim poſito SOMZ, cujus centrum T; ſitque recta CEA linea principii motûs, intelligaturque recta EP æqualis circumferentiæ rotæ SOMZS, & recta NPL ſit linea perfecti motûs. Tum diviſâ EP bifariam in puncto K, ducatur recta HKF, quæ ſit linea medii motus; puncta autem A, F, L ſint ad eaſdem partes reſpectu rectæ EP, & puncta C, H, N ad eaſdem partes inter ſe, ſed ad alteras reſpectu ejuſdem rectæ EP, & punctorum A, F, L.

Concipiatur jam in linea principii motûs C E A aſſumptum eſſe punctum A, ad deſcribendam trochoidem, ſive recta EA æqualis ſit ſemidiametro rotæ TO, quo pacto fiet trochoides rotæ ſimplicis; ſive ipſa EA major ſit quàm TO, ut fiat trochoides rotæ prolatæ; ſive denique minor ut habeamus trochoidem rotæ contractæ: moveaturque rota hoc pacto ut centrum illius percurrat rectam EP, interim dum ipſa motu circulari abſolverit unam integram converſionem circa idem centrum, poſito utroque motu ſibi ipſi ſemper uniformi:


M
Z
18
T
17
O
A
S
16
N
P
L
25
10
G
H
D
K
14
F
9
6
7
15
8
I
Y
V
B
13
R
C
11
E
12
A

feratur autem unà cum rotâ recta EA, quæ ad motum rotæ æqualiter circumvolvatur, ita ut in medio motûs integræ conversionis ipsa EA conveniat rectæ KH, in fine autem eadem conveniat rectæ P L; sicque propter implicationem motûs circularis cum recto punctum A describat trochoidem ARYHL, cujus basis AL, axis HF, vertex H, centrum K, & spatium A R Y H L A; sint etiam puncta A, F, L in eâdem rectâ lineâ quæ est basis, & puncta C, H, N in aliâ rectâ ipsi basi & itineri centri parallelâ, ut sit ALNC parallelogrammum rectangulum. Præterea centro K, & intervallo KH, seu KF, æquali ipsi EA, describatur circulus HIFG, cujus circumferentia secet iter centri versùs principium quidem in I, versùs finem autem in G, qui circulus erit proprius trochoidi ex definitione, eritque idem vel æqualis rotæ, vel ipsâ major aut minor, quod hoc loco nihil refert. Item in lineâ ARYH, quæ est prima medietas trochoidis sumatur quodcunque punctum Y, à quo ad axem HF, ordinata sit recta YD secans primam semicircumferentiam circuli proprii in puncto X.

Dico primò portionem aliquam ipsius YD esse extrà circulum FIH. Quia cum punctum Y est in primâ medietate trochoidis, quæ quidem per ipsum punctum Y semel tantum transit, ut superius positum est, non potest esse nisi unica positio rotæ in quà illâ existente notatum est punctum Y, atque in illà positione centrum ipsius rotæ extitit inter puncta E, K, scilicet intra primam medietatem itineris centri. Existat igitur eâ positione centrum illud in puncto 7, per quod ducatur recta 8 7 9 parallela lineæ medii motûs FKH, secans basim quidem AL, in puncto 8, rectam verò CN in puncto 9; ducatur quoque recta 7 Y, quæ quia ducitur à centro rotæ 7 in hac positione ad punctum Y, quod in eâdem positione trochoidem describit, æqualis erit rectæ EA,

EA, seu potius recta 7 Y erit ea ipsa EA, cujus punctum E motu recto pervenit in 7, punctum autem A motu implicato perlatum est in Y, describens trochoidis portionem ARY, & eadem recta motu circulari rotæ positionem suam mutavit secundùm angulum 8 7 Y: huic ergo angulo constituatur æqualis OT4 rotæ seorsim positæ, cujus OTZ sit diameter, & punctum 4 in circumferentiâ.

Conveniente ergo per intellectum centro T cum centro 7, & angulo OT4 angulo 8 7 Y, sive latera æqualia sint, sive non, manifestum est ex naturâ rotæ, arcum O 4 esse mensuram motûs jam peracti à principio conversionis; & arcum 4 Z qui cum O 4 complet semicircumferentiam rotæ, esse mensuram motûs qui deest ad complendam dimidiam conversionem: & quia æquales sunt ambo motus rotæ, circularis scilicet & rectus, & uterque uniformis sibi ipsi, manifestum est quoque rectam E 7 æqualem esse arcui O 4, & rectam 7 K arcui 4 Z: quod notetur.

Centro 7, intervallo autem 7Y, vel 7 8, vel 79, quæ æqualia sunt, describatur circulus cujus diameter erit 8 7 9. Quoniam ergo per ea quæ posita sunt punctum Y in prima medietate trochoidis existens sequitur post centrum motu recto, erit ipsum Y respectu diametri 8 9 versùs principium curvæ, jacebitque propterea ipsa diameter 8 9 inter punctum Y & axem HF, eademque secabit rectam YD ordinatam ad axem, esto in puncto 6: rectæ ergo DH, 6 9 æquales sunt, sicuti & rectæ FD, 8 6; & rectangulum FDH, æquale rectangulo 8 6 9, quæ rectangula cum sint æqualia quadratis XD, Y 6, erunt hæc quadrata æqualia, & recta DX æqualis rectæ 6 Y: sed recta DY major est quàm 6 Y, totum scilicet parte; ergo eadem DY major est quàm DX; excessus autem est portio XY; hæc itaque portio

eſt extra circulum FXH trochoidi AYH proprium; quod primo loco demonſtrandum erat.

Dico ſecundò eandem portionem exteriorem XY, æqualem eſſe arcui 4 Z. Quoniam enim oſtenſæ ſunt æquales DX, & 6 Y, ſunt autem puncta X 6 vel ſimul, vel ſejuncta, & hoc caſu vel punctum X eſt inter puncta D & 6, vel è contrario ipſum X eſt inter puncta 6, Y, ſecundùm diverſas ſpecies trochoidum rotæ ſimplicis, prolatæ, vel contractæ, quod hoc loco nihil refert: quidquid ſit additâ vel ſubtractâ communi X 6, ſi quæ inter puncta X 6 interjaceat, fiet recta D 6 æqualis rectæ XY, eſt autem D 6 æqualis rectæ K 7, ſeu arcui 4 Z, ut notatum eſt; quare & recta XY eidem arcui 4 Z eſt æqualis, quod ſecundo loco demonſtrandum erat: quare conſtat Propoſitio.

Corollarium primum.

HINC manifeſtum eſt arcum XH ſimilem eſſe arcui rotæ 4 Z, ſicuti arcus FX ſimilis eſt arcui O 4; & eſt 4 Z quicunque arcus menſurans motum qui deeſt ad dimidiam converſionem, & O 4 menſurat motum jam tranſactum, quod notaſſe in ſequentibus uſui erit.

Corollarium ſecundum.

HIC demonſtrari poteſt in rotâ ſimplici, atque in prolatâ rectam 6 D majorem ſemper eſſe quàm XD propterea quod ipſa rota ſeu circulus O 4 Z tunc æqualis eſt circulo proprio FXH, vel ipſo major; ideoque arcus 4 Z, æqualis eſt arcui XH, vel ipſo major, quia ſimiles ſunt ipſi arcus. Sed recta 6 D æqualis eſt arcui 4 Z, ex demonſtratis; quare eadem 6 D æqualis eſt arcui XH, vel ipſo major: arcus autem XH ſem-

per major eſt rectâ XD; quare hoc caſu recta 6 D ſemper major eſt quàm XD.

In rotâ autem contractâ, quia ipſa rota minor eſt quàm circulus ſibi proprius FXH, atque ideo arcus 4 Z ſemper minor eſt arcu ſibi ſimili XH ſecundùm rationem diametri rotæ ad diametrum circuli ſibi proprii, erit recta 6 D, quæ æqualis eſt arcui 4 Z, ſemper minor arcu XH, ſecundùm eandem rationem; hic autem arcus XH, quia aſſumptus eſt utcunque minor ſemicircumferentiâ circuli proprii FIH, poteſt habere ad rectam XD quamcunque rationem majoris ad minus, ſcilicet ut diameter FH, ad diametrum rotæ OZ. Fieri ergo poterit aliquando ut arcus XH ad rectam XD eandem habeat rationem quam ad rectam 6 D, aliquando majorem & aliquando minorem; ideoque in rotâ contractâ poterit recta 6 D æqualis eſſe rectæ X D, vel ipſa major aut minor : atque ita puctum 6 erit vel ſimul cum puncto X, vel inter puncta Y, X; vel inter puncta X, D.

Et quidem quòd res ita ſe habeat in univerſum ex his ſatis patet; quibus autem in punctis quave poſitione rotæ omnes iſtæ differentiæ accidant in datâ quâcunque ratione diametri rotæ contractæ ad diametrum circuli ſibi proprii demonſtrare longum eſſet & difficillimum, opuſque eſſet hoc aſſumpto; ſcilicet dato cuivis arcui circumferentiæ circuli, intelligi poſſe rectam lineam æqualem, minorem, vel majorem.

Corollarium tertium.

Illud quoque ex demonſtratis ſtatim apparet, ſcilicet trochoidem occurrere circumferentiæ circuli ſibi proprii in unico puncto verticis, atque in eo puncto tantùm lineas ipſas ſeſe tangere, ipſumque circulum totum contineri interi ſpatium ejuſdem trochoidis.

Corollarium quartum.

HINC præterea clarum eſt ipſam trochoidem non eſſe lineam rectam nec ex duabus rectis compoſitam, ſiquidem illa à puncto A pervenit ad punctum H, nec tamen ingreditur aut ſecat circulum proprium FXH, quem ſecaret neceſſariò ſi recta eſſet à puncto A ad punctum H, ſive à puncto H ad punctum L: non eſt ergò recta, nec ex duabus rectis compoſita.

Quod autem cujuſcunque trochoidis nulla pars lineæ rectæ congruere poſſit, ſed omnes partes ſint curvæ, atque penitùs ab aliis quibuſcunque curvis huc uſque notis diverſæ, demonſtrari quidem poteſt, ſed demonſtratio longa eſt & difficilis, neque hujus loci, quandoquidem ad ea quæ intendimus non requiritur.

Corollarium quintum.

QUIA in antecedenti Propoſitione punctum 6 eſt ſectio communis rectæ ordinatæ YD & rectæ 8 7 9, quæ eſt diameter circuli 8 Y 9, qui concentricus eſt rotæ ita poſitæ, ut centrum illius ſit 7: ſi intelligatur alia atque alia poſitio rotæ ab initio motûs donec centrum illius percurrerit rectam EK, manifeſtum eſt aliud atque aliud fore ipſum punctum 6; ipſumque moveri incipere à puncto A, & in medio motus integræ converſionis rotæ, idem pervenire ad punctum H, atque adeo ipſum ferri ſecundùm lineam quandam A 6 H ſecantem rectam EK in puncto V. Quòd ſi idem ferri intelligatur à puncto H ad punctum L, fiet reliqua dimidia pars ejuſdem novæ lineæ, ſecans rectam KP in puncto 10; atque ideo ipſa integra erit AV 6 H 10 L, hanc nos vocamus *trochoidis comitem*, ſeu *ſociam*.

Vertex, basis, axis & centrum illius eadem sunt quæ trochoidis, cujus illa comes est. Quod autem ab ipsa & basi suâ comprehenditur spatium planum, ab eâdem denominetur. Item, quæ à trochoide & ab ejus comite comprehenduntur duo spatia, quorum alterum est AYHVA, inter lineas principii & medii motus: alterum verò ei simile & æquale inter lineas medii & perfecti motus; singula à duabus illis lineis simul nomen sortiantur, dicaturque unumquodque spatium trochoide & suâ comite contentum: ordinata ad axem comitis trochoidis dicatur quævis recta à quocunque puncto ejusdem comitis ad axem ducta parallela basi.

PROPOSITIO SECUNDA.

Si à quocunque puncto trochoidis ad axem ordinetur recta quæpiam, hujus portio erit ordinata ad axem comitis ejusdem quæ quidem portio æqualis erit ei ejusdem ipsius ordinatæ ad trochoidem portioni, quæ interjicitur inter ipsam trochoidem & circumferentiam convexam circuli eidem trochoidi proprii.

MANIFESTA est hæc Propositio ex iis quæ jam demonstrata sunt. Esto enim YD recta quæcunque à puncto Y in trochoide existente ad axem FDH ordinata, & ponantur eadem quæ superiùs. Existit punctum 6 in ejusdem trochoidis comite, ex definitione; & recta 6 D erit ad axem ipsius comitis ordinata: recta verò XY interjicitur inter trochoidem & circumferentiam convexam circuli ipsi proprii. Ostensum autem est rectas ipsas 6 D & XY esse inter se æquales; quare patet Propositio, quæ id tantum enuntiabat.

Corollarium primum.

HINC manifestum est eandem ordinatam 6 D æqualem esse arcui rotæ 4 Z.

Corollarium secundum.

PERSPICUUM est etiam rectam Y 6, quæ interjicitur inter trochoidem & ejus sociam, æqualem esse rectæ XD interjectæ inter circumferentiam circuli proprii & axem.

Corollarium tertium.

SED & hic demonstrari potest in rotâ simplici comitem trochoidis occurre circumferentiæ circuli proprii in vertice tantùm, atque in eo solo puncto lineas ipsas sese contingere. Quod idem accidit comiti trochoidis rotæ prolatæ. At in curva rotæ contractæ comes secat circumferentiam circuli proprii infra verticem, idque semel tantùm in primâ dimidiâ conversione rotæ, & rursus semel tantùm in alterâ dimidiâ conversione: ac præterea eadem comes eandem circumferentiam tangit interiùs in vertice, cujus quidem Enuntiati longa est demonstratio, non tamen ita difficilis; sed de his aliàs.

Corollarium quartum.

ID autem peculiare est rotæ simplici, quod angulus contactus qui fit à comite trochoidis illius & circumferentiâ circuli ipsi proprii, minor sit omni angulo contactus duorum quorumvis circulorum etiam interiùs sese tangentium: quod rursùs in alium locum remittimus,

propter prolixitatem demonſtrationis, quæ tamen non eſt admodum difficilis.

Corollarium quintum.

ITEM cujuſlibet trochoidis comes nec recta eſt, nec ex duabus aut pluribus rectis compoſita; nec trochoidi nec alii cuivis curvæ ex iis quæ huc uſque notæ ſunt ita occurrere poteſt ut pars ſit eadem, & pars non ſit communis: quod, quia demonſtrare longum eſt & difficillimum, neque ad ea quæ intendimus requiritur, ideo prætermittimus.

Propositio Tertia.

Si à quocunque puncto primi quadrantis comitis trochoidis ad axem ipſius ordinata ſit recta quævis, quæ uſque ad lineam principii motûs producatur; item ab aliquo puncto ſecundi quadrantis ejuſdem comitis eodem modo ordinata ſit alia recta (modo ipſæ ordinatæ æqualiter diſtent hinc inde ab itinere centri rotæ) earum rectarum ſic productarum portiones permutatim ſumptæ, erunt æquales; ita ut quæ in unâ earum rectarum inter comitem & axem interjicitur portio, æqualis ſit ei alterius rectæ portioni quæ interjicitur inter eandem comitem & lineam principii motûs, & reciprocè.

PONANTUR eadem quæ ſuprà in eâdem figura; atque in linea A 13 V, primo ſcilicet quadrante comitis, ſumptum ſit punctum quodcunque 13, à quo ad axem F H ordinata ſit recta 13 14, quæ minor erit quàm AF, quia ipſa AF æqualis eſt ſemicircumferentiæ rotæ; 13 14 autem ipſâ ſemicircumferentiâ minor. Producatur ergo eadem 13 14 donec occurrat lineæ

principii motûs AC in puncto 12. Tum in axe FH intelligatur portio KD æqualis portioni K 14; sed ad diversas partes, & ducatur recta D 6 11 parallela rectæ KE, occurens comiti quidem in puncto 6, quod erit in secundo ipsius quadrante, lineæ autem AC in puncto 11. Dico rectam 13 14 æqualem esse rectæ 6 11, & reciprocè rectam 13 12 æqualem esse rectæ 6 D. Secet enim recta 12 14 circumferentiam FIH in puncto 15; & recta 11 D secet eandem circumferentiam in puncto X, sintque puncta 15, X in eâdem semicircumferentiâ quæ est versùs principium motûs: item in semicircumferentiâ rotæ OSZ, sit arcus Z 4 similis arcui HX; & arcus Z 16 similis arcui H 15; sintque ZS, & OS quadrantes, sicuti HI, & FI. Jam quia æquales sunt rectæ K 14, KD erunt arcus IX, & I 15 æquales. Item æquales erunt arcus F 15, HX; & æquales FX, H 15: ac propterea in rotâ æquales erunt arcus S 4, S 16. Item æquales arcus O 16 & Z 4; & æquales O 4, Z 16. Quare ex Corollario primo Propositionis primæ, quia arcus HX, similis est arcui qui mensurat motum, qui superest ad dimidiam conversionem in eâ positione rotæ, erit arcus Z 4 ea ipsa mensura ejusdem motûs. Eâdem ratione erit arcus Z 16 mensura motûs qui superest ad dimidiam conversionem rotæ, dum notatur ab ipsâ punctum 13; ac proterea ex Corollario primo Propositionis secundæ, tam recta 6 D æqualis est arcui 4 Z, quàm recta 13 14 æqualis arcui 16 Z: ambo autem ipsi arcus 4 Z & 16 Z simul sumpti æquales sunt semicircumferentiæ OZ (ostensus est enim arcus 4 Z æqualis ipsi 16 O) ideoque duæ rectæ 6 D & 13 14 simul sumptæ æquales sunt eidem semicircumferentiæ OZ, sive rectæ D 11, vel 14 12. Demptis ergo communibus sequitur rectam 13 12 æqualem esse rectæ 6 D; & rectam 13 14 æqualem esse rectæ 6 11; quod erat ostendendum.

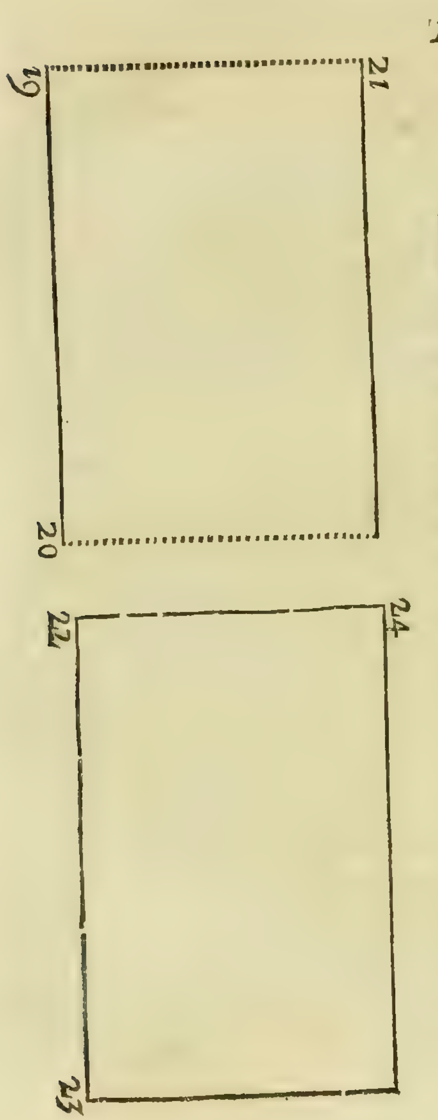
Propositio

PROPOSITIO QUARTA.

Quod à trochoidis comite & ab ipsius base continetur, spatium dimidium est rectanguli cujus eadem est basis & eadem altitudo cum trochoide vel ejus comite, sumpto axe communi pro altitudine.

IN eâdem rursùs figurâ. Dico spatium quod à comite AVH 10 L & basi ejus AL continetur, dimidium esse rectanguli ACNL, cujus eadem est basis AL & eadem altitudo axis FH. Consideretur enim ipsius rectanguli dimidium ACHF, quod à curvâ AVH ipsius comitis dimidia, in duas partes dividitur, quarum partium altera continetur ab ipsâ curvâ AVH & duabus rectis AF, FH, altera autem pars continetur ab eâdem curva AVH & duabus rectis HC, CA. Ostendendum est duas illas partes esse inter se æquales. Atqui ex antecedenti Propositione facile est ostendere duas easdem partes omnino sibi invicem superponi posse & congruere, posito scilicet puncto C cum puncto F, & rectâ CA cum recta FH; item recta CH cum recta FA : tunc enim quia recta C 11 æqualis est rectæ F 14, congruet punctum 11 cum puncto 14, & recta 11 6 cum recta 14 13, cui æqualis ostensa est; & eodem modo recta A 12 congruet rectæ HD, & recta 12 13 rectæ D 6, cui æqualis ostensa est, & reliquæ reliquis, & omnes omnibus, & spatium spatio congruet. Quare ipsa spatia sunt æqualia, & spatium AVHFA dimidium est rectanguli FC. Idem verò in reliquo rectangulo FN ostendetur eodem modo, ideóque vera est Propositio.

PROPOSITIO QUINTA.



Idem spatium proportione medium tenet inter duplum rotæ & duplum circuli trochoidi proprii.

PONANTUR eadem. Dico spatium AVH 10 LA proportione medium esse inter duplum rotæ OSZM, & duplum circuli FIHG trochoidi proprii. Intelligantur enim duo rectangula, alterum quidem 20 21, cujus basis 19 20 æqualis sit semicircumferentiæ rotæ OSZ, altitudo vero 19 21 æqualis diametro ejusdem rotæ OZ; alterum verò rectangulum 23 24, cujus basis 22 23 æqualis sit semicircumferentiæ circuli proprii FIH, altitudo autem 22 24 æqualis diametro ejusdem circuli FH. Jam quia duo rectangula 20 21

& FC æquales habent bases 19 20 & AF (quia utraque basis, ex positis, æqualis est semicircumferentiæ rotæ) erunt ipsa rectangula inter se ut altitudines, scilicet ut diameter rotæ OZ ad FH diametrum circuli proprii. Item, rectangulum FC ad rectangulum 23 24 ejusdem altitudinis FH, ex constructione, se habet ut basis AF ad basim 22 23, idest ut semicircumferentia rotæ OSZ ad semicircumferentiam circuli proprii FIH, quia ex constructione æquales sunt ipsæ bases iisdem semicircumferentiis. Ut autem semicircumferentia OSZ ad semicircumferentiam FIH, ita diameter OZ ad diametrum FH: quare ut rectangulum FC ad rectangulum 23 24, ita diameter OZ ad diametrum FH. Ut autem hæ diametri inter se, ita ostensum est rectangulum 20 21 ad rectangulum FC; ideoque eadem est ratio rectanguli 20 21 ad rectangulum FC, quæ ejusdem rectanguli FC ad rectangulum 23 24, quia utraque ratio eadem est rationi diametri OZ ad diametrum FH. Sed rectangulum 20 21 duplum est rotæ OSZM, ut ex Archimede in circuli dimensione deducitur, sicuti rectangulum 23 24 duplum est circuli FI HG & rectangulum FC æquale est spatio proposito AVHLA, quia dimidium dimidio ostensum est æquale per præcedentem. Quoniam ergo continuè proportionalia ostensa sunt rectangula 20 21, FC, & 23 24, patet quoque proportionalia esse spatia ipsis æqualia, scilicet duplum rotæ OSZM, spatium AVH 10 LA, & duplum circuli proprii FIHG, & medium esse spatium AVH 10 LA, ut proponebatur.

Corollarium.

Hinc patet idem spatium AVH 10 LA in trochoide rotæ simplicis, duplum esse ejusdem rotæ; in trochoide autem rotæ prolatæ idem spatium majus esse quàm duplum rotæ; & tandem in trochoide rotæ con-

tractæ, minus quam duplum ipsius rotæ. Nam in rotâ simplici circulus FH ipsi rotæ æqualis est; in prolatâ minor; in contractâ major: unde spatium quod inter duplum rotæ & duplum circuli FH mediam tenet proportionem, in simplici quidem æquale est duplo rotæ; in prolatâ majus quàm duplum; & in contractâ minus.

Propositio Sexta.

Quod à trochoide & ejus comite continetur spatium inter lineas principii & medii motûs, æquale est dimidio circuli eidem trochoidi proprii.

IN eâdem figurâ esto spatium ARHVA contentum à dimidio trochoidis ARH, & dimidio comitis ejus AVH inter lineas principii & medii motûs AC, FH. Dico hoc spatium æquale esse semicirculo FIH.

Ducatur enim quæcunque recta YD parallela basi AL, secansque tam spatium quàm semicirculum; & portio quidem ipsius YD intercepta intra spatium, sit Y6; portio autem intercepta intra semicirculum, sit XD: manifestum est igitur ex Corollario secundo Propositionis secundæ, portiones ipsas Y6 & XD esse æquales; quod idem in cæteris similiter ductis basi AL parallelis accidet. Itaque quoniam spatium & semicirculus sunt intra parallelas AF, CH & cujusvis aliûs rectæ eidem parallelæ, & interjacentis portiones in spatio & in semicirculo interceptæ sunt æquales, sequitur spatium ipsum ARHVA semicirculo FIH esse æquale; quod erat ostendendum.

Corollarium primum.

POTEST simili argumento demonstrari ſpatium ARYHIFA, quod à dimidiâ trochoide ARH, dimidiâ circumferentiâ HIF, & dimidiâ baſi FA continetur, æquale eſſe ſpatio AVHFA, quod à dimidiâ comite AVH, diametro HF, & dimidiâ baſi FA comprehenditur. Quia ſcilicet ipſa duo ſpatia ſunt in iiſdem parallelis AF, CH : & ductâ quâcunque eiſdem intermediâ parallelâ YD, oſtenſum eſt ſecundâ Propoſitione portionem YX priori ſpatio interceptam, æqualem eſſe portioni 6D altero ſpatio comprehenſam. Quod idem quia parallelis omnibus interceptis accidit, patet ipſa ſpatia eſſe æqualia.

Corollarium ſecundum.

NEC diſſimili argumento probabitur ſpatium ARHCA, quod à dimidia trochoide ARH, rectâ HC, & rectâ CA continetur, æquale eſſe ſpatio AVHIFA, quod à dimidiâ comite AVH, ſemicircumferentiâ HIF & dimidiâ baſi FA comprehenditur; quamvis in rotâ contractâ portio quædam primi horum ſpatiorum ſit ultrà rectam AC extrà rectangulum FC; & portio quædam ſecundi ſpatii contineatur intra ſemicirculum FIH; nihilo enim minus fiet demonſtratio univerſalis, ſed propter diſtinctionem rotarum multis verbis opus erit. At veritas hujus propoſitionis multò facilius ex precedentibus elicitur in rotâ ſimplici & prolatâ. Nam quia quartâ Propoſitione oſtenſum eſt ſpatium AVHCA æquale eſſe ſpatio AVHFA; item Propoſitione ſextâ ſpatium ARHVA oſtenſum eſt æquale ſemicirculo FIH: demptis æqualibus ab æqualibus in rotâ ſimplici & contractâ, patebit Propoſitio.

Corollarium tertium.

IN rotâ ſimplici quatuor hæc ſpatia ſunt æqualia ARHCA, ARHVA, AVHIFA & ſemicirculus FIH. Quia enim ſpatium comitis AVH 10 LA in rotâ ſimplici oſtenſum eſt eſſe duplum rotæ ſeu circuli FH, per Propoſitionem quartam erit dimidium ejuſdem ſpatii, ſcilicet AVHFA, duplum ſemicirculi FIH; quare dempto ſemel ipſo ſemicirculo, relinquitur ſpatium AVHIFA æquale eidem ſemicirculo. Cætera manifeſta ſunt.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Cujuſvis trochoidis ſpatium majus eſt circulo ſibi proprio, & exceſſus mediam tenet proportionem inter duplum rotæ & duplum circuli eidem trochoidi proprii.

MANIFESTA eſt Propoſitio. Nam in eâdem figura, ſpatium trochoidis ARH 25 LA æquale eſt ſpatio ſuæ comitis AVH 10 LA, ac præterea duobus ſpatiis ARHVA, & L 25 H 10 L, quorum utrumque æquale eſt ſemicirculo FIH per ſextam Propoſitionem; ideoque ambo ſimul ipſi integro circulo FIHG ſunt æqualia; ideoque ipſum trochoidis ſpatium ſuperat circulum ſibi proprium ſpatio ſuæ comitis; quod quidem per Propoſitionem quintam mediam proportionem tenet inter duplum rotæ & duplum circuli eidem trochoidi proprii.

Corollarium.

HINC palam eſt in rotâ ſimplici ſpatium trochoidis triplum eſſe ejuſdem rotæ: quia ipſum continet circulum ſibi proprium, hoc eſt ipſam rotam ſemel, ac præterea ejus duplum, ſcilicet ſpatium ſuæ comitis.

AD TROCHOIDEM, EJUSQUE SOLIDA.

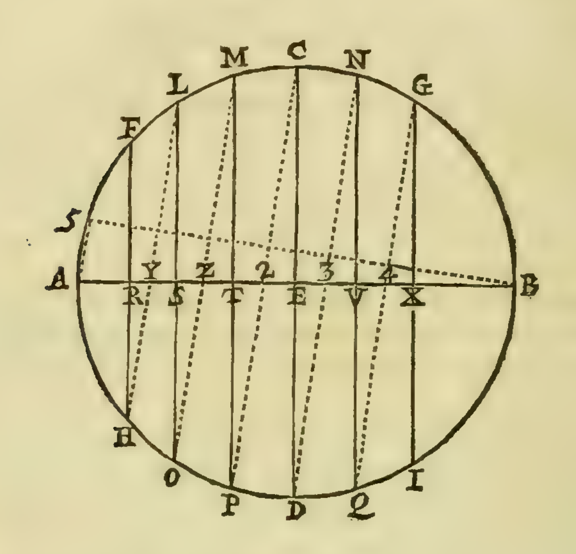
PROPOSITIO LEMMATICA PRIMA.

Esto circulus ACBD, cujus diameter AB; atque ex ejus semicircumferentiâ ACB sumatur arcus quicunque FG, sive is sit diametro AB conterminus, sive non; dividaturque arcus ille in quotlibet partes æquales in punctis F, L, M, C, N, G, &c. indefinitè, quemadmodum in doctrinâ indivisibilium fieri consuevit; ex quibus punctis demittantur in diametrum AB totidem rectæ perpendiculares FR, LS, MT, CE, NV, GX, &c. quæ erunt totidem sinus recti numero indefiniti & secundùm arcus æquales, vel æqualiter sese excedentes sumpti. Proponitur demonstrandum,

Omnes illos sinus indefinitè sumptos ad radium circuli toties sumptum sic se habere, ut recta RX, portio scilicet diametri inter extremos sinus intercepta, ad arcum propositum FG.

PRODUCANTUR enim sinus illi, donec alteri semicircumferentiæ ADB occurrant in punctis H, O, P, D, Q, I, &c. & jungantur alternatim rectæ LH, MO, CP, ND, GQ, &c, occurrentes diametro AB in punctis, Y, Z, 2, 3, 4, &c. & ductis omnium arcuum subtensis FL, LM, MC, CN; HO, OP, PD, DQ, &c. fiant triangula rectangula similia HRY, LSY, OZS,

MTZ, PT2, CE2, &c. ac tandem ſumpto arcu A 5, qui æqualis ſit uni ex arcubus æqualibus, putà arcui FL; jungantur rectæ A 5, & B 5, ut fiat triangulum rectangulum A 5 B prædictis HRY, &c. ſimile. Itaque propter triangulorum ſimilitudinem, facile eſt colligere omnes ſubtenſas intermedias LO, MP, CD, NQ, &c. ſimul ſumptas, unà cum dimidiis extremarum, putà unà cum HR, & GX ad rectam B 5 eandem rationem ha-



bere, quam recta RX ad rectam A 5. Atqui ex doctrinâ indiviſibilium, & propter infinitam arcuum æqualium multitudinem & parvitatem, omnes prædictæ ſubtenſæ ſimul ſumptæ unà cum HR & GX, ſumi poſſunt pro duplo omnium ſinuum prædictorum indefinitè ſumptorum, dempto eorum uno; ſicuti recta B 5 pro diametro ſeu duplo radii, & recta A 5, pro arcu A 5, ſive FL. Ut ergo duplum omnium ſinuum indefinitè ſumptorum dempto

dempto uno, ad duplum radii; ita recta RX ad arcum FL; ſumptiſque duorum priorum terminorum dimidiis, erunt omnes ſinus indefinitè ſumpti, dempto uno, ad radium, ut RX ad FL. Verùm tot ſunt ſinus, dempto uno, quot arcus; ergò ſumptis conſequentium æquemultiplicibus in præcedenti proportione, erunt omnes ſinus, dempto uno, ad radium toties ſumptum, ut recta RX, ad omnes arcus minores; hoc eſt ad arcum FG. Sed in doctrina indiviſibilium, unicus ſinus additus ad alios numero indefinitos, nihil mutat; unde patet Propoſitio: quippe omnes ſinus ad radium toties ſumptum eandem rationem habebunt, quàm recta RX ad arcum FG.

Corollarium primum.

SI ergo arcus aſſumptus FG, ſit ſemicircumferentia ipſa, ad quam pertineat diameter AB, quæ hoc caſu referet rectam RX; patet omnes ſinus rectos ad ſemicircumferentiam pertinentes atque ſecundùm æquales arcus indefinitè ſumptos, eſſe ad radium toties ſumptum, ut diameter ad ſemicircumferentiam. Hîc autem in demonſtratione, quia extremi ſinus evaneſcunt, nihil demendum erit nec addendum: in univerſum tamen additio aut ſubſtractio finiti alicujus determinati, in doctrinâ indiviſibilium nihil mutat.

Corollarium ſecundum.

SI autem arcus FG ſit quadrans diametro AB conterminus; tunc radius referet rectam RX; atque ita omnes ſinus recti ad quadrantem pertinentes, & ſecundùm æquales arcus ſumpti, erunt ad radium toties ſumptum, ut radius ad quadrantem.

Corollarium tertium.

AT si arcus FG sit quidem diametro AB conterminus, sed quadrante major aut minor; tunc recta RX erit sinus versus ipsius arcûs. Ut ergo omnes sinus recti ad radium toties sumptum, ita sinus versus ad arcum.

Corollarium quartum.

SI arcus FG diametro AB non sit conterminus, idem autem ita constitutus sit, ut alterutrum punctorum R vel X sit centrum circuli, quo pacto alteruter sinuum extremorum FR vel GX erit radius; tunc recta RX æqualis erit sinui recto ejusdem arcûs: quapropter, ut omnes sinus recti ad radium toties sumptum, ita sinus rectus arcûs ad ipsum arcum.

Corollarium quintum.

IN casu quarti Corollarii. Si centrum circuli sit inter puncta R, X; tunc recta RX componetur ex duobus sinibus rectis duarum portionum arcûs FG. Ut ergò se habet summa omnium sinuum rectorum ad radium toties sumptum; ita summa duorum sinuum rectorum, qui ad duas portiones arcûs FG pertinent, se habebunt ad eundem arcum.

Corollarium sextum.

IN eodem casu, si centrum cadat ultrà puncta R, X; tunc recta RX erit differentia duorum sinuum rectorum, vel etiam duorum sinuum versorum, qui sinus recti vel versi pertinebunt ad duos arcus quorum diffe-

rentia erit arcus ipſe FG. Itaque, ut ſumma omnium ſinuum rectorum ad radium toties ſumptum; ita differentia illa ſinuum ad ipſum arcum FG.

Corollarium ſeptimum.

Quoniam autem omnes ſinus recti differunt à radio toties ſumpto, per omnes ſinus verſos; ſumptis differentiis pro antecedentibus, erunt omnes ſinus verſi ad radium toties ſumptum, ut differentia inter rectam RX, & arcum FG, ad ipſum arcum FG. Undè rurſus ſex Corollaria, ſex præmiſſis reſpondentia facilè deducentur, quorum quæ ad quartum pertinebit concluſio talis erit, Ut omnes ſinus verſi ad radium toties ſumptum; ita differentia inter ſinum rectum & ipſum arcum, ad ipſum eundem arcum.

Propositio Lemmatica Secunda.

Ex prædictis facilè eſt examinandis ſinuum Tabulis perutilem hanc Propoſitionem demonſtrare.

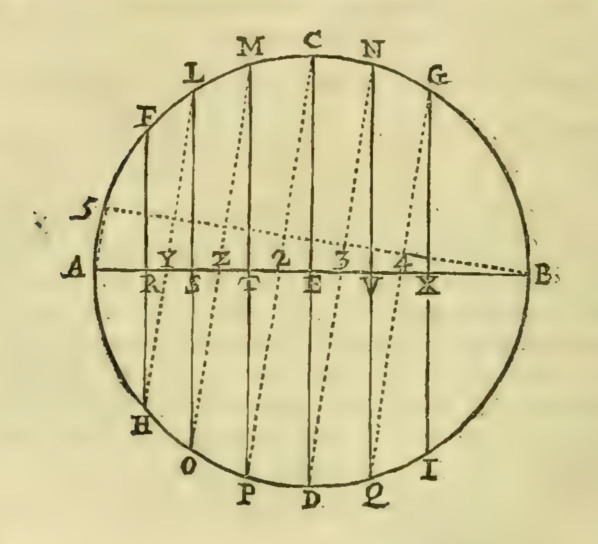
Si in circumferentià circuli ſumantur duo quicunque arcus FM, CG; & reliqua ponantur ut in primâ Propoſitione, omnes ſinus recti ex arcu FM demiſſi, atque indefinitè ſumpti, putà FR, LS, MT &c. ad omnes ſinus rectos ex arcu CG demiſſos atque indefinitè ſumptos, putà CE, NV, GX &c. (modò tamen ſinguli ex minoribus arcubus FL, LM, &c. æquales ſint ſingulis ex minoribus arcubus CN, NG, &c. ſive multitudo horum æqualis ſit multitudini illorum, ſive non) erunt, ut recta RT extremis ſinibus intercepta, ad rectam EX extremis ſinibus interceptam.

Nam ex prima Propoſitione, Ut omnes ſinus FR, LS, MT, &c. ad radium toties ſumptum; ita recta RT ad arcum FM. Ut autem radius ille toties ſump-

tus ad eundem radium toties ſumptum, quot in majori arcu CG continentur minores, ita arcus integer FM ad arcum integrum CG: & ut radius toties ſumptus quot in arcu CG continentur minores ad totidem ſinus CE, NV, GX; ita arcus CG ad rectam EX: ergo ex æquo in quatuor terminis utrinque, Ut omnes ſinus FR, LS, MT, & ad omnes ſinus CE, NV, GX, &c. ita recta RT, ad rectam EX.

Corollarium primum.

Hinc licet Tabulas ſinuum per quoſcunque arcus commenſurabiles examinare hâc ratione. Eſto ar-



cus FM triginta graduum, arcus vero CG quadraginta graduum; ſintque in utroque arcu dati extremi ſinus ex Tabulis, putà FR, MT, CE, GX; tum reliqui inter-

medii per singula minuta prima, vel etiam secunda, si libuerit : unde ex iisdem Tabulis dabuntur etiam rectæ RT, EX. Quoniam ergò numerus sinuum utrinque finitus est atque determinatus, ex summâ omnium priorum sinuum FR, LS, MT, &c. dematur dimidium extremorum FR, MT; tum ex summâ posteriorum CE, NV, GX, &c. dematur dimidium extremorum CE, GX; eritque tunc residuum priorum ad residuum posteriorum, ut recta RT, ad rectam EX; quod nisi ita reperiatur, erroneæ erunt Tabulæ. Erit tamen error ferendus, donec excessus aut defectus minor erit dimidio illius numeri qui exprimit multitudinem omnium sinuum in utroque arcu contentorum.

Corollarium secundum.

QUOD si proponatur arcus FG, ita dividendus in duos arcus FM, MG, ut demissis sinubus rectis FR, LS, &c. quemadmodum supra, summa omnium sinuum indefinitè sumptorum qui ad arcum FM pertinebunt, ad summam omnium qui ad arcum MG pertinebunt, rationem habeant datam; dividenda erit recta RX in ratione datâ, putà in puncto T, atque ab eo excitanda perpendicularis TM usque ad circumferentiam; & factum erit, ut patet ex præmissâ secunda Propositione.

Hîc multa theoremata & problemata præmissis similia proponi possent, quæ, quia facilia sunt nihilque ad nostrum institutum conducunt, consultò omittimus.

Ad primum, sequens notandum.

IN figurâ rotæ atque trochoidis sequentis, ut pateat trilineum AMHG æquale esse quadrato semidiametri rotæ AG, adverte rectam GH quadranti circum-

ferentiæ æqualem esse quæ recta GH, si in quotcunque partes æquales indefinitè secetur, & à singulis sectionis punctis excitentur perpendiculares usque ad curvam AMH, exhibebunt ipsæ perpendiculares omnes sinus rectos quadrantis diametro contermini secundùm æquales arcus sumptos, ex naturâ trochoidis ejusdemque sociæ: quare per secundum Corollarium Propositionis primæ præmissæ, erunt illi omnes sinus simul sumpti ad radium AG toties sumptum, ut radius AG ad quadrantem GH. Ut autem summa illorum sinuum ad summam radiorum, ita trilineum AMHG ad rectangulum AH, ex doctrinâ indivisibilium; & ut radius AG ad quadrantem GH, ita quadratum ipsius AG ad rectangulum AH; ideoque ut trilineum AMHG ad rectangulum AH, ita quadratum AG ad idem rectangulum AH; unde trilineum ipsum AMHG æquale est quadrato semidiametri AG.

Quoniam autem trilineum reliquum AMHV est differentia inter trilineum AMHG & rectangulum AH; illud ergo AMHV æquale erit differentiæ inter quadratum AG & rectangulum AH; hoc est rectangulo contento sub semidiametro AG & differentiâ inter ipsam AG & quadrantem GH.

Ad secundum, sequens notandum.

BILINEUM AMHZA est manifestò differentia inter triangulum AGHZA sive quadrantem rotæ, & trilineum AMHG sive quadratum semidiametri AG.

De Rotâ simplici quædam notanda.

I. QUOD sub semidiametro rotæ & quadrante itineris centri ejusdem comprehenditur rectangulum, à sociâ trochoidis sic dividitur, ut portio ma-

jor æqualis sit quadrato semidiametri rotæ; altera autem portio, eademque minor æqualis sit rectangulo contento sub semidiametro rotæ & differentiâ quæ est inter eandem semidiametrum & quadrantem circumferentiæ ipsius rotæ.

II. Quod à quartâ parte sociæ trochoidis & à rectâ quæ quartæ ipsius extrema conjungit clauditur spatium bilineum, æquale est differentiæ inter quadrantem rotæ & quadratum semidiametri ejusdem.

III. Propositâ trochoide ejusque sociâ, atque utriusque plano circa communem basim circumvoluto, fit solidum trochoidis circa basim, quod quidem ad cylindrum cui inscribitur hâc ratione comparabitur.

Portio solidi comprehensa inter duas superficies, quarum altera à trochoide, altera ab ejus sociâ describitur, æqualis est cylindro cujus basis sit rota ipsa, altitudo autem æqualis circumferentiæ ipsius rotæ; quoniam idem æquale est annulo stricto ejusdem rotæ; ac proinde portio illa, totius cylindri circumscripti quarta pars est.

Portio solidi quæ unicâ superficie continetur, scilicet eâ quæ à sociâ trochoidis describitur, commodè conferri potest cum cylindro cujus axis sit idem cum axe solidi trochoidis; semidiameter verò basis sit semidiameter rotæ: reperietur autem talis portio aquari tali cylindro, ac præterea quadruplo illi solido quod fit ex conversione majoris illius trilinei, quod primo notando diximus æquari quadrati semidiametri rotæ, si scilicet tale trilineum circa iter centri rotæ convertatur. At ultimus hic cylindrus totius cylindri circumscripti quarta pars est; solidum autem ex conversione trilinei, ejusdem totius trigesima secunda pars evadit; quia omnia quadrata ipsius trilinei æqualia sunt omnibus quadratis omnium sinuum rectorum quadrantis rotæ secundum æquales arcus sumptorum, quæ omnia quadrata quadrati semidiametri toties sumpti dimidia sunt; & hoc

quadratum ſemidiametri toties ſumptum eſt decima ſexta pars omnium quadratorum parallelogrammi circumſcripti circa trochoidem : hoc ergo ſolidum quater ſumptum octavam totius cylindri circumſcripti partem conſtituit : tandem ergo ſequitur totum ſolidum trochoidis circa baſim totius cylindri circumſcripti quinque octavas partes conſtituere $\frac{5}{8}$.

Vel aliter hoc idem ſolidum quod à trochoidis ſociâ circa ejuſdem baſim circumvolutâ deſcribitur, ad totum cylindrum ſic comparabitur. Quoniam planum, ex cujus converſione circa baſim trochoidis fit tale ſolidum, ad rectangulum ipſi circumſcriptum, ex cujus converſione fit totus cylindrus ſe habet ut ſumma omnium ſinuum verſorum ſecundùm æquales arcus ſumptorum, ad diametrum toties ſumptum; erit ſolidum ad cylindrum, ut ſumma omnium quadratorum ab omnibus ſinibus verſis ſecundùm æquales arcus ſumptis, ad quadratum diametri toties ſumptum. At hæc ratio eſt ut 3 ad 8, & additâ quartâ parte totius cylindri, hoc eſt annulo ſtricto de quo ſupra; fit ut totum ſolidum trochoidis circa baſim totius cylindri circumſcripti quinque octavas partes conſtituat, ut priùs.

Et quidem ejuſmodi ratio $\frac{5}{8}$ de quâ jam egimus, geometricè vera eſt, ac prorsùs accurata. At circa ſolidum quod fit ex converſione trochoidis circa axem, eadem certitudo non contingit, nec poteſt, niſi inventa fuerit ratio diametri rotæ ad ejus circumferentiam.

Neque etiam movemur quod Evangeliſta Torricellius aſſerat tale ſolidum ad ſuum cylindrum (qui ſcilicet altitudinem habeat axem trochoidis, at diametrum baſis baſim ejuſdem trochoidis) rationem eandem habere quam undecim ad octodecim; hæc enim ratio $\frac{11}{18}$ minor eſt quàm vera.

Ad hoc autem admittatur rursùs ſocia trochoidis, cujus

cujus beneficio ſolidum trochoidis dividetur in alia duo ſolida. Primum duabus ſuperficiebus curvis continebitur, eâ ſcilicet quæ à trochoide, & eâ quæ ab ejus ſociâ deſcribitur. Secundum vero, circulo baſis & eâ ſuperficie curva terminabitur, quæ à ſociâ trochoidis deſcribetur. Ratione autem initâ ſecundùm Geomtriæ regulas, primum ſolidum continebit quartam partem totius cylindri, ac præterea ſphæram rotæ, quæ ad ipſum cylindrum ſe habet ut ſexta pars quadrati diametri ad quadratum ſemicircumferentiæ : ſecundum autem ſolidum continebit ejuſdem totius cylindri partem quartam, ac præterea portionem quandam quæ juncta ſphæræ rotæ ad totum cylindrum ſe habebit, ut differentia inter quadratum quadrantis circumferentiæ & $\frac{4}{3}$ quadrati radii, ad quadratum ipſius ſemicircumferentiæ.

Ponatur radius partium æqualium	3000000	
Erit ſemicircumferentia	9424778	paulo major.
Quadratum ſemicircumferentiæ	88826439606	paulo minus.
$\frac{1}{4}$ ejuſdem quadrati	2220660990	minus.
$\frac{4}{3}$ quadrati diametri	4800000000	
Differentia hujus & quadrati ſemicircumf.	4082643960	
$\frac{1}{4}$ hujus differentiæ	1020660990	}
Semiquadratum ſemicircumferentiæ	4441321980	}
Summa duorum ultimorum numerorum	5461982970	

Erit numerator rationis ſolidi ad totum cylindrum, cujus denominator quadratum ſemicircumferentiæ.

Ratio Torricellii quadrati ſemicircumferentiæ	5428282420 $\frac{11}{18}$	ſeu $\frac{44}{72}$
ejuſdem quadrati	5551652475 $\frac{5}{8}$	ſeu $\frac{45}{72}$

Patet ergo rationem majorem esse eâ quæ à Torricellio assignatur; minorem tamen eâ quæ suprà assignata est pro solido circa basim, quæ est $\frac{5}{8}$.

AK3E4TPFB est trochoides: AMHQFB est ejusdem trochoidis socia: G3OHXIY est iter centri: C718F est axis: ANV6CB est basis: F vertex: DB parallelogrammum circumscriptum; & ductæ sunt rectæ ALZHRSF, & BF: item ductæ sunt quæcunque rectæ NMZOE, VH4, & PQRX 6 axi parallelæ; ac tandem quæcunque rectæ 13 KLM 7, & 14 T Q S 8 parallelæ basi.

Itaque pro solido circa basim, patet illud esse ad cylindrum circumscriptum, ut omnia quadrata NE, V4, 6P, CF, &c. in infinitum, ad totidem quadrata CF. Verum quadratum NE æquale est quadratis NM, ME, & duplo rectangulo NME; sicuti quadratum V4 æquale est quadratis VH, H 4, & duplo rectangulo VH4; & quadratum 6 P æquale est quadratis 6 Q, QP, & duplo rectangulo 6 QP, & sic de reliquis. Ex illis autem, quadrata NM, VH, 6 Q, CF & similia, sunt quadrata omnium sinuum versorum secundùm æquales arcus sumptorum, quæ simul constituunt $\frac{3}{8}$ quadratorum diametri CF, & eadem constituunt rationem solidi sociæ trochoidis ad cylindrum: hæc ergo ratio est $\frac{3}{8}$. Reliqua quadrata ME, H 4, QP, &c. unâ cum duplis rectangulis NME, VH 4, 6 QP, &c. ad quadrata CF collata efficiunt rationem quam habet ad eundem cylindrum duplus annulus qui fit ex figurâ AMHQFP4EA circa basim AB circumvolutâ, qui duplus annulus æqualis est annulo rotæ circa basim AB circumvolutæ, hoc est cylindro cujus basis sit rota, altitudo autem circumferentia rotæ, sive basis AB, qui cylindrus constituit $\frac{2}{8}$ totius cylindri. Quare solidum rotæ ad totum cylindrum constituit rationem $\frac{5}{8}$.

Aliter pro ſolido quod fit à trochoidis ſociâ. Omnia quadrata NM, ab A uſque ad VH æqualia ſunt omnibus quadratis NO, OM, minùs omnibus duplis rectangulis NOM. Item ab VH uſque ad CF omnia quadrata 6 Q æqualia ſunt omnibus quadratis 6 X, XQ, plus omnibus duplis rectangulis 6 X Q: verum hæc dupla rectangula 6 XQ æqualia ſunt illis NOM, omnia ſcilicet omnibus; exiſtentibus ergo contrariis ſignis plùs & minùs, elidunt ſe invicem hæc & illa dupla rectangula, remanentque omnia quadrata NM, 6 Q, æqualia omnibus NO, OM, 6 X, XQ: horum autem NO, 6 X, ſunt quadrata ſemidiametri, quæ conſtituunt quartam partem quadratorum totius diametri CF, ſive $\frac{2}{8}$. At quadrata OM, XQ, ſunt quadrata omnium ſinuum rectorum ſecundùm æquales arcus ſumptorum, quæ ideò conſtituunt dimidiam partem omnium qnadratorum ſemidiametri, ſive octavam partem quadratorum totius diametri. Patet ergo omnia quadrata NM, 6 Q, conſtituere $\frac{2}{8}$ & $\frac{1}{8}$, hoc eſt $\frac{3}{8}$ omnium quadratorum totius diametri CF, quæ eadem eſt ratio ſolidi quod fit à ſociâ trochoidis, ad cylindrum eidem circumſcriptum; putà ratio omnium quadratorum NM, 6 Q ad omnia quadrata CF.

Pro ſolido autem circa axem CF, admiſsâ rursùs ſociâ trochoidis in eâdem figurâ, manifeſtum eſt illud dividi in alia duo ſolida, quorum alterum inſtar annuli ſtricti terminatur duabus ſuperficiebus, eâ nempe quæ à trochoide, & eâ quæ ab ejus ſociâ deſcribitur: alterum autem ſolidum duabus etiam ſuperficiebus comprehenditur; eâ nempe quæ à ſociâ trochoidis gignitur, & eo circulo cujus ſemidiameter eſt recta CA.

Ac primum quidem ſolidum ad totum cylindrum collatum, eam habet rationem quam omnia ſimul quadrata MK, H 3, QT, & ſimilia, unà cum omnibus duplis

rectangulis 7MK, IH3, 8QT, & similibus, ad quadratum AC toties sumptum. At dupla illa rectangula æquivalent semel omnibus rectangulis sub 7 13 sive CA & MK; sub IG sive CA & H 3; sub 8 14 sive CA & QT; (propterea quod omnes rectæ 7M, IH, 8 Q, &c. bis sumptæ æquivalent omnibus rectis 7 13, IG, 8 14, &c. semel sumptis, hoc est rectæ CA toties sumptæ) & hæc rectangula constituunt quartam partem quadrati CA toties sumpti, sicuti omnes rectæ MK, H 3, QT, constituunt $\frac{1}{4}$ rectæ CA toties sumptæ. Omnia autem quadrata MK, H 3, QT, &c. ad quadratum CA toties sumptum eandem rationem habent quam sphæra rotæ ad totum cylindrum, hoc est, quam $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri rotæ ad quadratum CA, sive quam $\frac{2}{3}$ trilinei HQFI seu AMHG quadrato IF seu IC æqualis, ad quadratum CA. Patet itaque primum solidum continere quartam partem totius cylindri, ac præterea portionem aliquam quæ ad ipsum totum cylindrum eam habet rationem quam $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ.

Jam ad secundum solidum. Manifestum quidem est illud ad totum cylindrum sic se habere ut omnia quadrata CA, 7M, IH, 8 Q, &c. ad quadratum CA toties sumptum. Hæc autem ratio ut detegatur, adverte omnia illa quadrata æqualia esse omnibus quadratis DF, 14 Q, GH, 13 M, &c. quia singula singulis æqualia sunt ex natura trochoidis. Itaque si hæc & illa quadrata simul cum quadrato AC toties sumpto conferantur, res expedietur. Vide aliam demonstrationem secundi hujus solidi in Appendice quæ postea sequetur.

At hoc jam confectum est in universum in omni parallelogrammo quale est ACFD, ductâ primò utcunque lineâ qualis est socia AMHQF constituente duo trilinea primæ divisionis AHFC, & FHAD: tum ductâ

ſecundò rectâ VH 4 15, quæ & latera AC, DF, & parallelogrammum ſimul bifariam dividat, ſecetque lineam ipſam AMHQF utcunque in H, ita ut conſtituantur duo trilinea ſecundæ diviſionis AMHV, & HQF 15, & duo reliqua quadrilinea; ſi inſuper intelligamus rectam AC dividi tertiò in quotcunque partes æquales in infinitum, ex doctrinâ indiviſibilium, & per puncta diviſionis ductas eſſe rectas ipſi CF parallelas, quæ parallogrammum dividant in totidem partes æquales, ſed & lineam AMHQF in totidem punctis: conſtituent ergo ipſæ rectæ intra trilinea ſecundæ diviſionis AMHV, HQF 15, multa alia minora trilinea tertiæ diviſionis; tot ſcilicet intra ſingula quot partes æquales in ſingulis rectis AV, F 15, continentur. Puta ſi rectâ AV tertiâ diviſione in 1000 partes æquales dividatur, conſtituentur 1000 trilinea tertiæ diviſionis quorum maximum erit ipſum AMHV; & omnia communem habebunt apicem A; ac minimum quidem trilineum aſſumet ex rectâ AV primam partem ad A terminatam; ſequens autem aſſumet duas priores partes ad idem A terminatas; tertium tres; quartum quatuor, & ſic eodem ordine uſque ad maximum; eritque forſan unum ex intermediis AMN. Sic intra trilineum HQF 15 totidem conſtituentur minora trilinea tertiæ diviſionis quorum unum ex intermediis erit forſan F 18 Q. Præterea ex rectis CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quædam portiones intra prædicta trilinea ſecundæ diviſionis continentur: putà intra AMHV; portiones AV, M 17, &c. intra HQF 15 verò, portiones F 15, Q 16, &c. atque ex doctrinâ indiviſibilium demonſtratur horum omnium portionum quadrata ſimul ſumpta dupla eſſe omnium prædictorum trilineorum tertiæ diviſionis ſimul ſumptorum.

Hoc poſito, illud inquam jam confectum eſt ex doctrinâ indiviſibilium, diviſo triplici diviſione quovis

parallelogrammo CD, ut dictum est, sive prima divisio fiat in partes æquales, ut hîc, sive non; omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, DF, 14 Q, GH, 13 M, &c. quæ ad trilinea AHFC, & FHAD primæ divisionis pertinent, constituere dimidium omnium quadratorum CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quæ pertinent ad totum parallelogrammum CD; ac præterea duplum omnium quadratorum portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. quæ pertinent ad trilinea secundæ divisionis AMHV, & HQF 15; hoc est quadruplum omnium minorum trilineorum tertiæ divisionis, quæ in iisdem AMHV, HQF 15 comprehenduntur, ut suprà. Omnia enim quadrata omnium portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. simul sumpta dupla sunt omnium minorum trilineorum tertiæ divisionis quæ in ipsis AMHV, HQF 15 comprehenduntur: hoc autem ex doctrina indivisibilium demonstramus in secunda Propositione Appendicis quæ posteà sequetur. Et hoc quidem in universum in omni parallelogrammo: at hîc in specie trilinea quidem AHFC, & FHAD primæ divisionis æqualia sunt; sicuti æqualia sunt quoque AMHV, & HQF 15 secundæ divisionis: quare sumptis tantùm AHFC, & AMHV quæ constituunt dimidiam partem omnium quatuor; tunc quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. quæ pertinent ad secundum solidum de quo agitur, constituunt quartam partem quadrati CA toties sumpti, ac præterea quadruplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in trilineo AMHV comprehensorum.

Si itaque hæc quarta pars cum eâ quartâ quæ ex primo solido inventa est, conjungatur, habebimus solidum rotæ constituere dimidium sui cylindri, ac præterea duas portiones, quarum altera ad eundem cylindrum sic se habet ut $\frac{2}{3}$ trilinei AMHG ad quadratum AC, ut suprà: altera autem ad eundem cylindrum sic se habet ut qua-

druplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in AMHV comprehensorum, ad idem quadratum AC toties sumptum quot sunt rectæ CA, 7 M, IH, 8 Q, &c.

Superest ergò ut ostendamus duas illas portiones simul junctas, ad totum cylindrum eandem rationem habere, quam differentiam inter quadratum quadrantis circumferentiæ & $\frac{4}{3}$ quadrati radii, ad quadratum semicircumferentiæ : & quidem de $\frac{1}{3}$ trilinei AMHG nulla erit difficultas; de quadruplo autem trilineorum, sic patebit.

Producatur recta DGA versus A usque in 9, ita ut recta G 9, sit æqualis rectæ GH, hoc est quadranti circumferentiæ rotæ; & jungatur recta 9 H, hæc cadet extra trilineum AMHG, & cum curvâ AMH constituet ad punctum H angulum minorem omni angulo rectilineo, etiamsi producta secet eandem curvam AHMQF in ipso puncto H, in quo, tali sectione, constituentur duo anguli ad verticem oppositi æquales, ac singuli minores quovis angulo rectilineo; quod tamen hic parum refert : sufficit enim quod recta 9 H cadat extra trilineum AMHG; hoc autem sic ostendimus.

In ipsâ 9 H sumatur quodvis punctum 12 ex quo ducatur recta 12 10 parallela ipsi AG atque occurens rectæ GH in puncto 10, curvæ autem AMH occurrat ipsa 12 10 producta, si opus sit, in puncto 11; itaque recta 10 12 æqualis est rectæ 10 H, recta autem 10 H æqualis est arcui cuidam quandrante minori, cujus sinus rectus erit recta 10 11 ex naturâ sociæ trochoidis; quare 10 11 minor est quàm 10 H sive quàm 10 12: unde punctum 12 est extra trilineum AMHG, quod idem de omnibus punctis rectæ 9 H ostendetur. Quoniam autem trilineum HQF 15 secundæ divisionis, & omnia minora trilinea tertiæ divisionis in eo contenta, trilineo AMHU secundæ divisionis, & omnibus trili-

neis

neis tertiæ divisionis in eo contentis singula singulis ordine sumptis, æqualia sunt : quod de his ostendetur, de illis quoque verum erit.

Sumatur ergo QF 18 trilineum quodvis tertiæ divisionis assumens ex rectâ F 15, rectam F 18 quotcunque partium æqualium ex iis in quas divisæ sunt rectæ CA, FD; tum rectæ F 18 sumatur æqualis ex HG recta H 10, ducaturque recta 10 11 12, ut supra. Est igitur F 18, sive H 10, sive 10 12 æqualis cuidam arcui cujus sinus versus est 18 Q; sinus autem rectus est 10 11, ex naturâ sociæ trochoidis; quare recta 11 12 est differentia inter arcum & ejusdem arcûs sinum rectum : & trilineum quidem QF 18 ad parallelogrammum FX sic se habet, ut omnes sinus versi omnium arcuum æqualium minorum tertiæ divisionis in arcu F 18 contentorum, ad radium IF toties sumptum, quot in arcu F 18 continentur arcus minores ejusdem tertiæ divisionis, ex doctrinâ indivisibilium. Ut autem omnes illi sinus versi ad omnes illos radios, ita recta 11 12 differentia arcus F 18 & sui sinus recti, ad arcum F 18, ex Corollario septimo Propositionis præmissæ : quia recta F 18 refert arcum, cujus sinus rectus est 10 11, & differentia inter hunc sinum & ipsum arcum F 18, sive 10 12, est 11 12; atque insuper alter sinuum ab extremitatibus arcûs F 18 cadentium, puta sinus FI cadit in centrum : quare trilineum QF 18 est ad parallelogrammum FX, ut recta 11 12 ad rectam F 18; sed parallelogrammum FX ad parallelogrammum FH se habet ut recta F 18 ad rectam F 15 : quare ex æquo, ut trilineum QF 18 ad parallelogrammum FH, ita recta 11 12 ad quadrantem F 15 sive GH.

Cùm ergo idem de singulis trilineis tertiæ divisionis verum sit, quod de QF 18 jam demonstratum est; sequitur omnia illa trilinea simul sumpta ad parallogram-

mum FH toties ſumptum ſic ſe habere, ut omnes differentiæ inter omnes ſinus rectos ſecundum æquales arcus ſumptos, & ſuos arcus, ad quadrantem G 9 toties ſumptum. Ut autem hæ omnes differentiæ ad omnes quadrantes, ita trilineum AMH9, quod differentias illas omnes continet, ad quadratum quadrantis G 9, quod omnes illos quadrantes continet, ex doctrinâ indiviſibilium: quare argumentis ex arte inſtitutis quadruplum omnium trilineorum tertiæ diviſionis in trilineo HQF 15, ſive in trilineo AMHV contentorum, erit ad octuplum parallelogrammi FH toties ſumpti quot ſunt trilinea in AMHV, ut duplum trilinei AMH 9 ad quadruplum quadrati quadrantis G 9, ſive ut duplum trilinei ipſius AMH 9 ad quadratum ſemicircumferentiæ AC. At octuplum prædictum æquale eſt omnibus quadratis CA, 7 13, IG, 8 14, &c. ex doctrina indiviſibilium; quia tam ex octuplo illo, quàm ex omnibus his quadratis, conſtituitur idem ſolidum parallelepipedum, illud nempe quod baſim habet parallelogrammum AF, altitudinem autem rectam AC: ſive, quod idem eſt, quod baſim habet quadratum rectæ AC, altitudinem autem rectam CF.

Itaque quadruplum omnium trilineorum tertiæ diviſionis in trilineo AMHV contentorum, ad omnia quadrata CA, 7 13, IG, 8 14, &c. ſic ſe habet, ut duplum trilinei AMH9 ad quadratum AC. Ut autem quadruplum illud ad omnia quadrata ſemicircumferentiarum, ita erat una ex duabus portionibus reliquis ſolidi rotæ, ad totum cylindrum. Ut ergo talis portio ad cylindrum, ita duplum trilinei AMH9 ad quadratum AC; ſed & altera portio erat ad eundem totum cylindrum ut $\frac{2}{3}$ trilinei AMHG unà cum duplo trilinei AMH 9 ad quadratum AC; ſed $\frac{2}{3}$ trilinei AMHG unà cum duplo trilinei AMH9 ſimul differunt à quadrato quadrantis G9

tanto ſpatio quantum eſt $\frac{4}{3}$ ipſius trilinei AMHG; (patet, ex eo quod triangulum HG9 ſit dimidium ipſius quadrati G9.) Conſtat ergo propoſitum, nempe duas illas portiones reliquas ad totum cylindrum ſic ſe habere, ut differentia inter quadratum quadrantis & $\frac{4}{3}$ trilinei AMHG, quod quadrato radii æquale eſt, ad quadratum ſemicircumferentiæ.

Nota.

EX iis quæ expoſita ſunt de rotâ ſimplici, atque ſolidis quæ ab illius trochoide gignuntur, non difficile erit rotas alias tam prolatas quàm contractas contemplari: eadem enim in illis quàm in ſimplici valebit methodus, eademque vigebunt argumenta, ſed concluſiones erunt diverſæ propter diverſas rationes altitudinis cujuſcumque trochoidis ad ſuam baſim. Nos tamen iis præmiſſis nec abſolutis, ſed rudi tantum minervâ exaratis ne memoriâ exciderent, ſuperſedebimus, donec operi extremam manum imponere per tempus licebit. Tunc autem & centra gravitatis tam plani trochoidis, quàm ejus ſociæ, examini ſubjicientur, ac detegentur.

APPENDIX

Ad ſolidum trochoidis circa axem converſæ, continens aliam demonſtrationem ſecundi ſolidi duorum illorum ex quibus totum componitur, putà illius quod à ſociâ circa axem converſa deſcribitur.

AD hoc autem præmiſſis duabus Propoſitionibus Lemmaticis, illarumque Corollariis, accedant quæ ſequuntur.

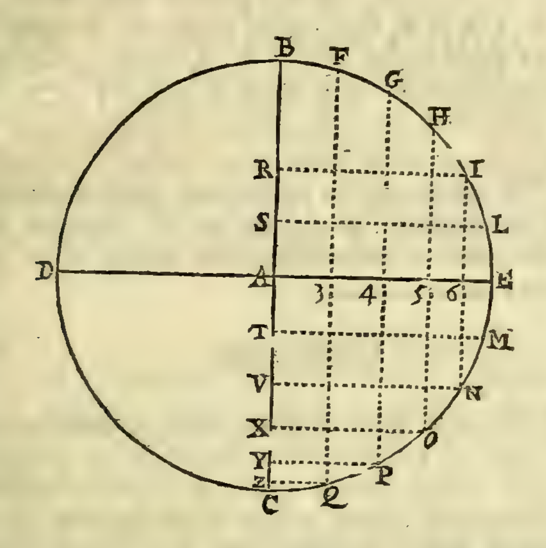
Corollario quidem ſeptimo præcedenti demonſtratum eſt in arcubus quadrante non majoribus, ſic eſſe omnes ſinus verſos ad radium toties ſumptum, ut differentia inter ſinum rectum & ipſius arcum ad ipſum eundem arcum. Hîc verò demonſtrabimus idem quoque verum eſſe de arcubus quadrante majoribus.

PROPOSITIO PRIMA.

Eſto circulus cujus centrum A, diametri BC, DE ad rectos angulos ſeſe ſecantes, ita ut BEC ſit ſemicircumferentia diviſa in duos quadrantes BE, CE, qui in quotlibet arcus æquales indefinitè dividantur in punctis B, F, G, H, I, L, E, M, N, O, P, Q, C, &c. atque ſumatur arcus quivis IEC quadrante major, & à punctis diviſionis illius demittantur in diametrum BC perpendiculares IR, LS, EA, MT, NV, OX, PY, QZ, &c. ut habeantur omnes ſinus verſi CZ, CY, CX, CV, CT, CA, CS, CR, &c. ad arcum IC pertinentes: ſinus autem rectus arcûs IEC erit IR. Dico ergò ſic eſſe omnes illos ſinus verſos ad radium AB toties ſumptum, ut differentia inter ſinum RI & ſuum arcum IEC ad ipſum eundem arcum.

DEMITTANTUR in diametrum DE ſinus recti F3, G4, H5, I6, &c. qui pertinent ad diviſiones arcus BI quadrante minoris ac ſemicircumferentiam perficientis. Itaque ex quarto Corollario, ut omnes ſinus recti BA, F3, G4, H5, I6, &c. ad radium toties ſumptum, ita ſinus IR ad arcum IB. Ut autem radius toties ſumptus quot ſunt puncta diviſionum in arcu IB, ad ipſum radium toties ſumptum quot ſunt puncta diviſionum in arcu IC, ita arcus IB ad ipſum arcum IC: ergo ex æquo in tribus terminis, ut ſumma ſinuum

BA, F 3, G 4, H 5, I 6, &c. ad radium toties ſumptum quot ſunt puncta diviſionum in arcu IC, ita ſinus IR ad arcum IC; & ſumptis differentiis pro antecedentibus, ut differentia inter ſummam ſinuum rectorum BA,



F 3, G 4, H 5, I 6, &c. radium toties ſumptum quot ſunt puncta diviſionum in arcu IC, ad ipſum radium toties ſumptum; ita differentia inter ſinum rectum IR & ſuum arcum majorem IC, ad ipſum eundem arcum. Verùm differentia illa ſummæ ſinuum & ſummæ radiorum æqualis eſt ſummæ ſinuum verſorum prædictorum, ut ſtatim demonſtrabimus: itaque conſtat Propoſitio.

Lemma.

QUOD autem aſſumptum eſt, hoc ita demonſtratur. Ex quadrante EC ſumatur arcus NC æqualis arcui IB, & demittantur in diametrum DE ſinus recti

Q 3, P 4, O 5, N 6, &c. qui æquales erunt ipsis F 3, G 4, H 5, I 6, &c. illis autem ex radio AC toties demptis, remanent manifestò sinus versi CZ, CY, CX, CV: superest autem radius toties sumptus quot sunt puncta divisionum in arcu IN; sed hic perficit sinus versos reliquos CT, CA, CS, CR: nam radius bis sumptus perficit duos sinus versos CV, CR; & idem radius rursus bis sumptus perficit duos sinus versos CT, CS; sinus autem versus CA est idem radius. Reliqua patent. Nec aliquem moveat quod idem sinus versus CV bis assumptus est: ille enim cùm sit magnitudo quædam determinata, semel tantum, plusquàm par est, sumpta, atque indefinitis numero magnitudinibus addita, nihil officit in doctrinâ indivisibilium.

Corollarium.

QUONIAM ergo in omni arcu, omnes sinus versi sunt ad radium toties sumptum, ut differentia inter sinum rectum ipsius arcus, & arcum eundem ad ipsum arcum; ut autem radius toties sumptus ad eundem radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in totâ semicircumferentiâ: ita arcus propositus ad ipsam semicircumferentiam. Patet ex æquo in tribus terminis omnes sinus versos arcûs propositi, ad radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in totâ semicircumferentiâ, eandem rationem habere, quam differentia inter sinum rectum arcûs propositi & ipsum arcum, ad integram semicircumferentiam.

PROPOSITIO SECUNDA.

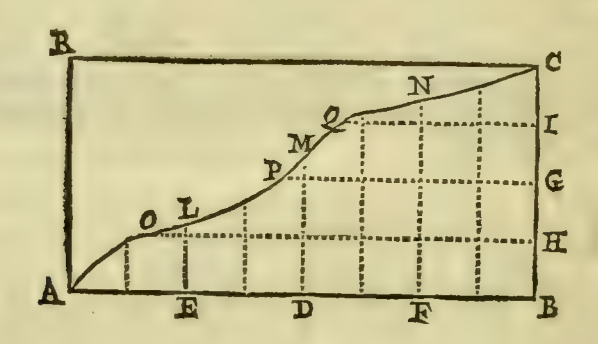
Esto trilineum quodcunque ABC, cujus duo ex lateribus puta AB, BC, sint lineæ rectæ, tertium verò AC utcunque rectum vel curvum; modo ipsum tale sit ut procedendo secundum ipsum à puncto A ad punctum C, idem fiat continuò propius ac propius rectæ BC; remotius autem ac remotius à rectâ AB: ut sic nec recta AB, nec BC, nec quævis iisdem parallela, ipsi lineæ AC duobus in punctis occurrere possit. Perficiatur autem parallelogrammum ABCR; atque intelligatur converti tam parallelogrammum quàm trilineum circa unum latus, putà BC.

MANIFESTUM est à parallelogrammo describi vel cylindrum, vel cylindraceum cylindro æqualem; à trilineo autem solidum quoddam: atque si latus ipsum BC dividatur in quotcunque partes æquales indefinitè in punctis H, G, I, &c. per quæ ducantur rectæ HO, GP, IQ, &c. ipsi AB parallelæ atque latere AC trilinei terminatæ, manifestum est quoque solidum trilinei ad cylindrum sic se habere ut omnia quadrata rectarum BA, HO, GP, IQ, &c. ad trilineum pertinentium, ad quadratum BA toties sumptum. Ut autem in quâvis tali figurâ horum solidorum comparatio rectè institui possit, proderit sæpissimè hoc elementum ex doctrinâ indivisibilium annotasse.

Alterum latus rectum AB dividatur in quotcunque partes æquales indefinitè in punctis E, D, F, &c. quæ quidem partes singulæ æquales sint singulis BH, HG, &c. ducanturque totidem rectæ EL, DM, FN, &c. lateri BC parellelæ atque latere AC trilinei terminatæ, quæ quidem trilineum ipsum divident, constituentque intra

illud alia trilinea numero indefinita atque ad communem verticem A constituta, putà AEL, ADM, AFN, ABC, &c.

Nec est quod quis dicat rectas AB, BC longitudine posse esse incommensurabiles; atque ita non posse partes unius æquales esse partibus alterius: nam præterquamquod in divisione indefinitâ hæc objectio locum non habet; illud præterea manifestum est, posse in utrâque



partes omnes esse æquales, præter extremam quandam portionem alterius illarum; quæ quidem erit definita quædam portio, quâ additâ aut detractâ, vel additis aut detractis, quæ ab illâ dependent magnitudinibus omninò definitis, nullo modo mutatur indefinitarum ratio, ex doctrinâ indivisibilium.

Dico ergo omnia hæc trilinea in trilineo ABC constituta, simul sumpta omnium quadratorum BA, HO, GP, IQ, &c. simul sumptorum dimidiam partem constituere. Intelligatur enim ipsa omnia quadrata erecta super plano trilinei; quo pacto ex doctrinâ indivisibilium illa constituent solidum quoddam quinque figuris comprehensum, quarum prima erit ipsum trilineum; secunda

ſecunda eſt trilineum cujus baſis ipſi rectæ AB parellela eſt & oppoſita, & vertex punctum ipſum C; tertia autem erit quadratum ſuper rectâ BA erectum; quarta ſuper rectâ BC erecta, erit trilineum ipſi ABC ſimile & æquale; quinta tandem ſuper lineâ AC erecta, erit utcunque plana vel curva, prout ipſa AC recta erit vel curva. Intelligatur quoque planum quoddam ſecans planum trilinei ABC ſecundùm rectam BC, atque ad idem inclinatum ſecundùm angulum ſemirectum versùs A: hoc ergo planum ſic inclinatum dividet bifariam omnia & ſingula quadrata erecta ut ſuprà; unde & idem planum dividet quoque bifariam ſolidum ex illis quadratis conſtans, eruntque partes duo ſolida inſtar pyramidum, ſingula quatuor ſuperficiebus contenta: horum quod præcipuè nobis utile eſt, baſim habet trilineum ABC, tres autem reliquæ ſuperficies illius ſunt, triangulum ſuper rectâ AB erectum & dimidium quadrati conſtituens; figura ſuprà lineâ AC erecta; ac figura ea quæ ex plano inclinato ſecante conſtituitur: tale autem ſolidum manifeſto conſtat ex dimidiis omnium quadratorum erectorum, ex doctrinâ indiviſibilium; eſtque vertex illius punctum extremum lateris illius quadrati, quod quidem latus ex puncto A erigitur, ipſique perpendiculariter imminet.

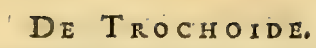
Oſtendamus ergo tale ſolidum conſtare etiam ex omnibus trilineis AEL, ADM, AFN; ABC, &c. vel ex aliis his iiſdem æqualibus; ſic enim patebit omnia hæc trilinea dimidiis omnium quadratorum erectorum eſſe æqualia, quandoquidem tam ab his trilineis quàm ab illis quadratorum dimidiis idem ſolidum conſtituetur, ex doctrinâ indiviſibilium. Ad hoc autem altitudo talis ſolidi, puta recta illa quæ ex puncto A perpendiculariter ad planum A B C erecta, ad ſolidi verticem pertinet, eſtque rectæ A B æqualis, eodem modo indefinitè

dividatur quo divisa est ipsa AB, ut partes partibus multitudine & magnitudine sint æquales, atque per puncta omnia talis divisionis ducantur plana plano ABC parallela, quæ manifestò secabunt solidum propositum inter verticem & basim, & tali sectione constituent trilinea prædictis AEL, ADM, &c. singula singulis similia, æqualia & parallela; ex quibus omnibus trilineis indefinitè sumptis secundùm doctrinam indivisibilium constituitur prædictum solidum quasi pyramidale, ut propositum est: reliqua patent.

PROPOSITIO TERTIA.

Jam ut ad solidum sociæ trochoidis circa axem conversæ veniamus. In figurâ trochoidis superiùs expositâ, intelligatur socia AMHQF 22 B circa axem CF conversa. Dico solidum ex tali conversione ortum ad cylindrum cui inscribitur eandem rationem habere quam dimidium quadrati semicircumferentiæ rotæ dempto dimidio quadrati diametri, ad integrum quadratum semicircumferentiæ.

NAM sicuti socia illa secat bifariam rectam GI in puncto H, sic eadem bifariam quoque secat rectam IY; esto in puncto 22: undè recta H 22: æqualis erit dimidio itineris centri GI, hoc est æqualis semicircumferentiæ rotæ. Super ipsâ H 22 ad partes verticis F, constituatur quadratum H 22 20 19, cujus diametri ducantur H 20, 22 19 secantes se invicem in centro quadrati, quod centrum sit 21 in axe CIF producto supra verticem F usque ad ipsum punctum 21. Patet autem diametrum ipsam quadrati H 20 esse rectam 9 H productam, ipsamque cadere extrà curvam sive sociam HQF, propter easdem rationes quibus probavimus suprà, rectam H 9 cadere extrà curvam HMA.



Jam utraque rectarum AC, CF in partes æquales indefinitè dividatur, & per puncta divisionis rectæ AC ducantur rectæ ipsi CF parallelæ, putà NM, VH, 6 Q, &c. usque ad sociam AMHQF; per puncta autem divisionis rectæ CF ducantur rectæ parallelæ ipsi AC, putà 7 M, IH, 8 Q, &c. usque ad eandem sociam. Quo posito solidum sociæ de quo agitur erit ad cylindrum integrum cui inscribitur, ut omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. ad quadratum CA toties sumptum: atqui illa omnia quadrata dupla sunt omnium trilineorum ANM, AVH, A6Q, ACF, &c. per secundam Propositionem hujus Appendicis, quare solidum illud ad cylindrum se habet ut omnia hæc trilinea bis sumpta ad quadratum CA sumptum ut jam dictum est, puta secundùm numerum rectarum CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. ex divisione diametri CF in partes æquales numero indefinitas, ortarum: hoc autem quadratum semicircumferentiæ toties sumptum æquale est rectangulo AF toties sumpto quot sunt partes æquales in rectâ AC: quia tam ex tali quadrato CF toties sumpto quot sunt partes in rectâ CF, quàm ex rectangulo AF toties sumpto quot sunt partes in rectâ AC constituitur idem solidum parallelepipedum, illud nempè quod basim habet rectangulum ipsum AF, altitudinem autem rectam AC; sive quod idem est, illud quod basim habet quadratum rectæ AC, altitudinem autem rectam CF, ex doctrinâ indivisibilium.

Itaque solidum sociæ trochoidis sic se habebit ad suum cylindrum, ut omnia trilinea prædicta bis sumpta ad rectangulum AF toties sumptum quot sunt partes in rectâ AC, hoc est toties sumptum quot sunt omnia trilinea prædicta semel sumpta. Verum rectangulum AF duplum est rectanguli AI. Sumpto igitur hoc rectangulo AI bis toties, quoties rectangulum AF, erit solidum sociæ trochoidis ad suum cylindrum, ut omnia trilinea

prædicta bis sumpta ad rectangulum AI toties bis sumptum; seu, sumptis tantum semel trilineis ac semel rectangulis, erit solidum sociæ trochoidis ad suum cylindrum, ut omnia trilinea semel sumpta ad rectangulum AI toties sumptum. Est autem triangulum H 20 22 dimidium quadrati semicircumferentiæ H 22, & bilineum HQF 22 est dimidium quadrati diametri CF, quandoquidem hujus bilinei dimidia pars, nempe trilineum HQFI, sive ipsi æquale AMHG ostensum est suprà æquale esse quadrato semidiametri AG vel CI; dempto autem hoc bilineo ex illo triangulo, remanet trilineum HF 22 20. Eò itaque res deducitur ut ostendamus omnia trilinea prædicta ad rectangulum AI toties sumptum sic se habere ut trilineum HF 22 20 ad quadratum integrum H 20; sic enim demum patebit solidum sociæ trochoidis esse ad suum cylindrum, ut dimidium quadrati semicircumferentiæ dempto dimidio quadrati diametri, ad quadratum semicircumferentiæ.

Ad hoc autem assumatur quodlibet ex ipsis trilineis, puta A 29 11, assumens ex rectâ AC portionem A 29 forsan quadrante minorem, cui ex rectâ H 22 sumatur æqualis portio HX; ducaturque recta XQ 30 secans sociam trochoidis in puncto Q, rectam autem H 20 in puncto 30. Itaque ex naturâ trochoidis ejusque sociæ A 29 & HX exhibebunt arcus æquales: & arcûs quidem A 29 sinus versus erit 29 11, arcûs autem HX sinus rectus erit XQ: cùmque recta X 30 æqualis sit arcui HX, erit recta Q 30 differentia inter sinum rectum XQ & suum arcum X 30. Unde ex Corollario primæ Propositionis hujus Appendicis, erunt omnes sinus versi arcûs HX sive A 29 ad radium toties sumptum, quot sunt divisiones in semicircumferentiâ AC, sive H 22, ut ipsa differentia Q 30 ad semicircumferentiam H 22, sive 22 20: atqui omnes sinus versi arcûs A 29 constituunt tri-

lineum A 29 11, & radius AG toties sumptus quot sunt divisiones in AC constituit rectangulum AI ex doctrinâ indivisibilium. Ut ergò trilineum A 29 11 ad rectangulum AI, ita recta Q 30 ad rectam 22 20.

De reliquis trilineis eadem erit ratio; ut si sumatur trilineum AVH assumens ex rectâ AC quadrantem circumferentiæ AV; posito etiam quadrante HI cujus sinus rectus sit IF, differentia autem inter ipsum & suum arcum sit F 21; probabitur esse trilineum AVH ad rectangulum AI, ut recta F 21 ad rectam 22 20. Pari ratione, si sumatur trilineum A 27 28 assumens ex AC rectam A 27 quadrante majorem, positâ rectâ H 24 æquali ipsi A 27, ductâque rectâ 24 25 26 parallelâ ipsi CF ac secante sociam quidem in puncto 25, rectam autem H 20 in puncto 26, ut recta 24 25 sit sinus rectus arcûs H 24 sive ipsi æqualis 24 26, recta autem 25 26 sit differentia ejusdem sinus & sui arcûs; probabitur esse trilineum A 27 28 ad rectangulum AI, ut recta 25 26 ad rectam 22 20; atque ita de omnibus trilineis.

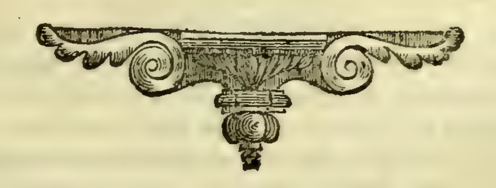
Itaque omnia trilinea simul sumpta ad rectangulum AI toties sumptum sic se habent ut omnes differentiæ sinuum rectorum & suorum arcuum Q 30, F 21, 25 26, &c. ad semicircumferentiam 22 20 toties sumptam: omnes autem illæ differentiæ constituunt trilineum HF 22 20; & semicircumferentia toties sumpta constituit quadratum semicircumferentiæ, ex doctrinâ indivisibilium: unde patet Propositio.

Corollarium.

Recidit autem hæc ratio cum eâ quæ suprà exposita est: siquidem trilineum HF 22 20 continet quadrantem totius quadrati H 20, ac prætereà duplum trilinei HQF 21, hoc est duplum trilinei HMA 9: un-

dè resumptis iis quæ ex primo solido oriuntur, putà quartâ totius parte, ac prætereà eâ portione quæ ad totum cylindrum eam habet rationem quam $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ, habebimus duos totius quadrantes, hoc est dimidiam partem totius, ac insuper duas portiones, quarum altera ad totum sic se habebit ut $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ; reliqua autem ad totum sic se habebit ut duplum trilinei HQF 21, sive HMA9 ad idem quadratum semicircumferentiæ, ut suprà.

Ut ergò unicâ enunciatione explicemus rationem totius solidi trochoidis circà axem conversæ, ad suum cylindrum; sume duos quadrantes integros quadrati H 20, puta 20 21 22, & 19 21 H; tum ex tertio quadrante H 21 22 sume duplum trilinei HQF 21, hoc est totum trilineum HQF 25 22 21 H, ac prætereà $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri, hoc est $\frac{2}{3}$ trilinei HQFI sive $\frac{1}{3}$ bilinei HQF 22: tumque hæc omnia spatia simul sumpta confer cum toto quadrato H 20; atque ita satis eleganter hoc concludes. Ut se habent $\frac{3}{4}$ quadrati semicircumferentiæ, demptâ tertiâ parte quadrati diametri, ad quadratum semicircumferentiæ; ita solidum trochoidis circa axem conversæ se habet ad suum cylindrum cui inscribitur.



PROPOSITIO QUARTA.

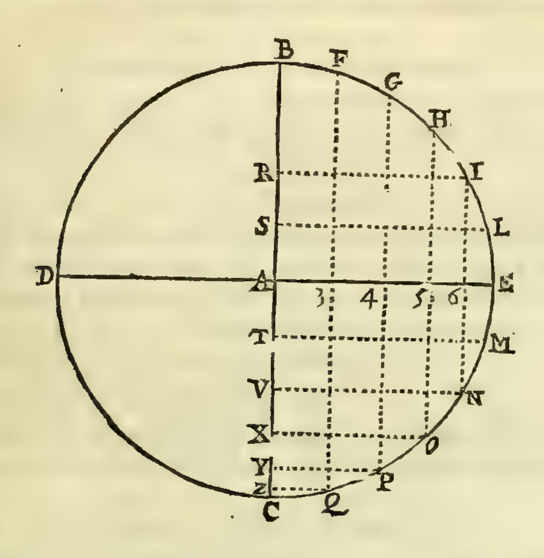
Quoniam supra in demonstrando solido trochoidis circa basim conversæ hoc tanquam verum sumpsimus, omnia quadrata omnium sinuum versorum semicircumferentiæ secundùm æquales arcus sumptorum constituere $\frac{3}{8}$ omnium quadratorum diametri toties sumpti: atque etiam omnia quadrata omnium sinuum rectorum semicircumferentiæ secundùm æquales arcus sumptorum constituere $\frac{1}{8}$ omnium quadratorum ejusdem diametri; lubet hìc utrumque assumptum unicà demonstratione ostendere.

IN figurâ primæ Propositionis hujus Appendicis, quadratum diametri BC æquale est quadratis, CZ, ZB, & duplo rectangulo CZB, sive duplo quadrato ZQ. Similiter idem quadratum BC æquale quadratis CY, YB & duplo rectangulo CYB sive duplo quadrato YP: atque ita de reliquis punctis divisionis diametri puta de punctis X, V, T, A, S, R, &c. at rectæ CZ, CY, CX, CV, &c. sunt omnes sinus versi: item rectæ ZB, YB, XB, VB, &c. sunt quoque omnes sinus versi qui prædictis singuli singulis, sed ordine converso sunt æquales; & horum quadrata singula singulis sunt æqualia; atque ita habemus duplum quadratorum omnium sinuum versorum. Sed & rectæ ZQ, YP, XO, VN, &c. per omnes arcus æquales semicircumferentiæ sunt omnes sinus recti; unde habemus duplum quadratorum omnium sinuum rectorum. Omnia ergo quadrata diametri æqualia sunt duplo omnium quadratorum sinuum versorum unà cum duplo omnium quadratorum sinuum rectorum.

Ducantur jam radii AQ, AP, AO, AN, &c. Itaque quadratum radii AQ æquale est quadrato sinus

recti

recti QZ unà cum quadrato AZ, ſive unà cum quadrato ſinus complementi Q3 : ſimiliter quadratum radii AP æquale eſt quadrato ſinus recti PY unà cum quadrato ſinus complementi P4, atque ita de reliquis : quo pacto habemus omnia quadrata radii æqualia eſſe omnibus quadratis ſinuum rectorum unà cum omnibus quadratis ſinuum complementorum. Verum omnes ſinus recti omnibus ſinibus complementorum ſinguli ſingulis



ſunt æquales, ſi minores cum minoribus & majores cum majoribus conferantur, quia ſumuntur ſecundùm arcus æquales ex hypotheſi : quare omnia quadrata radii æqualia ſunt duplis quadratorum omnium ſinuum rectorum. Omnia autem quadrata diametri quadrupla ſunt omnium quadratorum radii ; ipſa ergo omnia quadrata diametri quadrupla ſunt dupli quadratorum omnium ſinuum rectorum : unde omnia quadrata ſinuum rectorum ſemel

ſumpta, omnium quadratorum diametri octavam partem conſtituunt.

Quoniam ergo duplum omnium quadratorum ſinuum rectorum conſtituit duas octavas partes omnium quadratorum diametri, relinquitur ut duplum quadratorum omnium ſinuum verſorum conſtituat ſex octavas partes, atque ut ipſa quadrata omnium ſinuum verſorum ſemel ſumpta tres octavas partes conſtituant ipſorum omnium diametri quadratorum, ut proponitur.

PROPOSITIO QUINTA.

Vide Fig. pag. 411.

Sed & illud demonſtrare lubet, quod pro ſolido ſociæ trochoidis circa axem converſæ, priori modo demonſtrando, aſſumptum eſt tanquam quid confectum ex doctrinâ indiviſibilium. Omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, DF, 14 Q, GH, 13 M, &c. quæ ad trilinea primæ diviſionis AHFC, & FHAD pertinent, conſtituere dimidium omnium quadratorum CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quæ pertinent ad totum parallelogrammum CD; ac prætereà duplum omnium quadratorum portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. quæ pertinent ad trilinea ſecundæ diviſionis AMHV, & HQF 15.

ILLUD autem ſtatim conficitur, ex eo quod ductâ quâcunque rectâ 7 13 ex iis quæ rectæ AC parallelæ ſunt, quæ ſecet trilinea primæ diviſionis, ita ut ejus rectæ portio 7 M in uno trilineo, altera autem portio 13 M in altero contineatur; ſecet autem ipſa 7 13 lineam primæ diviſionis AMHF in puncto M, & rectam ſecundæ diviſionis V 15 in puncto 17: manifeſtum eſt, ex Geometriâ communi, ambo quadrata portionum 7 M, M 13 tantò majora eſſe dimidio quadrati totius 7 13, quantum eſt duplum quadrati portionis M 17, quæ ad trili-

neum ſecundæ diviſionis AMHV pertinet: quod cùm de omnibus aliis rectis verum ſit, patet Propoſitio.

DE LONGITUDINE TROCHOIDIS.

Propositio.

Cujuſcunque aſſignatæ portioni trochoidis primariæ, æqualem rectam exhibere, atque exinde toti trochoidi.

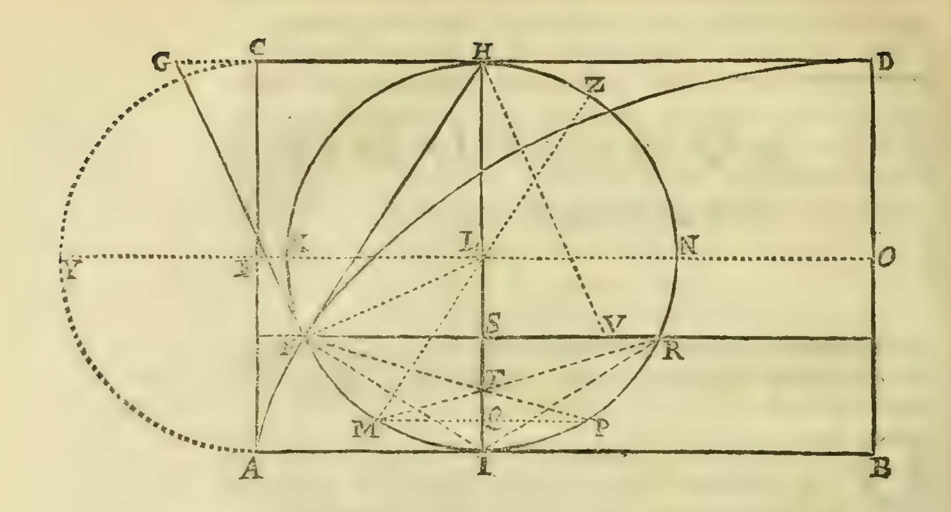
Quid ſit trochoides, quid rota ex qua illa naſcitur, quæ ſint tres illius præcipuæ ſpecies, & quomodo inter ſe diſtinguantur, hîc notum eſſe ſupponimus.

Utemur argumento ex motuum compoſitione deſumpto, quo ex æquali moti puncti velocitate æquales deſcribi lineas, ex inæquali inæquales, cæteris paribus neceſſe eſt, atque è converſo.

Etſi verò communiter rota progrediendo uniformi motu per iter rectum in plano, ſimul circa centrum ſuum convertatur, tamen hîc intelligemus rotam ipſam trahi tantùm recto itinere, non autem converti; ſed punctum trochoidem deſcribens, ferri ſecundùm circumferentiam rotæ motu uniformi, quod eódem quò ſuprà recidit, & Geometriæ aptius eſſe viſum eſt.

F punctum contactus tam FG rectæ tangentis rotam, quàm FH tangentis trochoidem primariam, cujus dimidium eſt AFD, initium A, recta AIB dimidium baſis, BD axis, AEC diameter rotæ initio motûs, CHD linea verticis.

IXHN rota eſt, cujus centrum L à principio motûs



jam percurrit rectam EL æqualem rectæ AI, exiſtente diametro rotæ in hac poſitione rectâ ILH; unde ipſa recta EL vel AI arcui IF æqualis eſt.

GF, GH rotam tangentes æquales ſunt; unde ductâ chordâ rotæ FR ipſi AI parallelâ, & ſectâ bifariam in S à diametro ILH; ductâ etiam HV ipſi FG tangenti parallela, ac ſecante ipſam FR productam, ſi opus erit, in V; erit parallelogrammum FGHV rhombus, cujus anguli GFV, GHV bifariam ſecabuntur à diagonali FH tangente trochoidem.

M punctum eſt in quo arcus rotæ FMI bifariam ſecatur, & à quo ducitur chorda rotæ MQP ipſi AI parallela, ſecans diametrum IH in Q; ſed & ductâ chordâ MR ſecante eandem IH in T, erunt rectæ QI, QT æquales, propter æqualitatem triangulorum IQM, TQM.

Reliquum conſtructionis ei qui trochoidem noverit,

per se ex ipsa figurâ satis ostenditur : præ cæteris notetetur chorda IM.

Ostendendum est portionem trochoidis AF ab initio A secundum longitudinem suam curvam mensuratam, æqualem esse quadruplo sinus versi IQ, sive duplo rectæ IT. Unde, quoniam AF est portio quæcunque dimidiæ trochoidis AFD, ostendetur ipsa curva AFD æqualis quadruplo semidiametri IL, seu duplo diametri IH. Hoc erit præcipuum hujusce Propositionis Corollarium.

Quoniam diametri rotæ ILH, AEC initio motûs congruebant, manifestum est tunc tria puncta I, A, F simul extitisse, & ambo E, L simul, & ambo C, H simul : exinde verò punctum I percurrisse rectam AI uniformi motu, sicuti & punctum L rectam EL, & punctum H rectam CH, & punctum F secundum rotæ circumferentiam percurrisse arcum IMF; quo factum est ut in trochoide primariâ quatuor illæ lineæ AI, EL, CH, & arcus IMF essent æquales : at propter implicationem recti motûs AI cum curvo IMF, punctum F tali motu composito descripsit portionem trochoidis AF, in quo ipsius F velocitas continuò mutata est augescendo sensim ab A in F. Examinemus ergò illam auctionem continuam per omnia puncta ejusdem AF; ac pro diversis positionibus puncti F, diversas ipsius velocitates in curvâ AF cum ejusdem uniformi velocitate in arcu rotæ IMF conferamus.

Incipiamus ab eâ positione quæ primum oblata est, in qua F est quodvis punctum in dimidiâ trochoide AFD ab A diversum. Patet ex motuum legibus, velocitatem puncti F in curvâ AF ad velocitatem puncti F in arcu IMF sic se habere, ut tangens FH ad tangentem FG in parallelogrammo FGHV : idem verò de singulis punctis in curvâ AF assumptis dicetur, mutatâ convenienti positione rotæ, & ductis congruis tangentibus; augetur

autem ratio FH ad FG dum F fertur ab A in F, ergo & ipſius velocitas; & eſt velocitas uniformis per infinitas tangentes arcûs IMF, ſicuti & ipſius puncti F in eodem arcu. Si igitur ipſe idem IMF infinitè dividatur æqualiter, atque illi diviſioni correſpondeat infinita diviſio curvæ AF (quod tamen fieri æqualiter non continget propter curvæ naturam, quod nihil intereſt) & ſingulis minoribus arcubus ipſius IMF aſſignentur ſuæ tangentes æquales, quibus etiam correſpondeant totidem tangentes curvæ AF, quanquam minimè æquales, erunt per vigeſimam quartam Libri quinti Euclidis, quoties opus fuerit repetitam, omnes tangentes curvæ AF ſimul ſumptæ ad omnes tangentes æquales arcûs IMF ſimul ſumptas, ut omnes velocitates puncti F in curvâ AF, ad omnes velocitates ejuſdem puncti F in arcu IMF: atqui ut velocitates inter ſe, ita ſunt lineæ ab ipſis percurſæ, putà curva AF & arcus IMF. Ut ergo omnes tangentes curvæ AF ad omnes tangentes arcûs IMF, ſic ipſa curva AF ad ipſum arcum IMF; quod primò notetur.

Præterea quoniam recta FG tangit circulum IFH, & à contactu ducitur recta FSR ipſum circulum ſecans, erit per trigeſimam ſecundam libri tertii Element. Euclidis, angulus GFR angulo FIR æqualis, & dimidius GFH dimidio FIS; unde triangula iſoſcelia FGH, FLI ſimilia ſunt. Ut ergo tangens FH ad tangentem FG, ita chorda IF ad radium FL; & diviſis infinitè, ut ſuprà, arcu IMF & curva AF, adjunctiſque iiſdem infinitis minoribus tangentibus, ducantur à puncto I totidem chordæ ad ſingula arcûs IMF puncta; probabimus ex Geometriâ, chordas illas omnes ſimul ſumptas ad radium FL toties ſumptum ſic ſe habere, ut omnes tangentes curvæ AF ſimul ad omnes tangentes arcus IMF ſimul; hoc eſt per primum notatum, ut curva ipſa AF ad arcum ipſum IMF: quod ſecundò notetur.

Jam arcus IM qui ipſius IMF dimidius eſt, dividatur æqualiter infinitè; ſed ita ut in ipſo IM tot ſint diviſiones quot in toto IMF, hoc eſt quot ſunt chordæ in ipſo arcu IMF, ſive quoties ſumptus eſt radius FL; tum à ſingulis arcûs IM punctis in radium IS demittantur totidem ſinus recti, quorum maximus eſt MQ: tot ergo ſunt ſinus recti ab arcu IM, quot chordæ in arcu IMF, & unuſquiſque ſinus unius cujuſque chordæ correlatæ dimidium eſt; unde ipſorum omnium ſinuum ſumma dupla æqualis eſt ſummæ chordarum ſemel ſumptæ. Erat autem ex ſecundo notato ſumma chordarum ad ſummam radiorum, ut curva AF ad arcum IMF; ergo ſinuum dictorum ſumma dupla ſe habet ad ſummam radiorum, ut curva AF ad arcum IMF. At ut ſumma illa dupla ſinuum ad ſummam illam radiorum, ſic ſe habet duplum ſinus verſi IQ ad arcum IM, per Lemma ad id inventum & ad alia permulta ardua perutile; & ut duplum IQ ad arcum IM, ita quadruplum IQ ad duplum arcus IM, hoc eſt ad arcum IMF. Ut ergo hoc quadruplum ſinûs verſi IQ ad arcum IMF, ita curva AF ad eundem arcum IMF; quare hæc curva AF æqualis eſt quadruplo ſinûs verſi IQ: quod erat propoſitum.

Corollarium.

COROLLARIUM manifeſtum eſt. Si enim pro trochoidis portione AF, ut ſuprà, aſſumamus ipſam dimidiam trochoidem integram AFD, tunc rotæ diameter quæ erat IH, cum axe BOD congruet; & punctum I puncto B, & punctum H puncto D, & punctum L, puncto O, & punctum F punctis H, D, & punctum M puncto X, & punctum Q punctis ſeu centris L, O, & punctum T punctis ſeu verticibus H, D, &c. Unde arcus IMF fiet ſemicircumferentia rotæ IXH, & arcus

IM fiet quadrans IX, & ſinus verſus IQ fiet radius IL, &c.

Itaque per Propoſitionem, ſemi-trochoides AFD ſinus verſi IL erit quadrupla, ſeu diametri IH dupla, quod eſt Corollarium.

Hæc & multa alia, cùm circa annos 1635 & 1640 vigente animi robore detexiſſem, & ferè omnia publicè multotiès patefeciſſem, tam in Cathedra Regia, quàm in multorum doctorum conventibus; immò & quibuſlibet amicis literatis privatim, unicam hanc de longitudine trochoidis Propoſitionem ſemper reticui, ſperabam enim eâdem methodo (quam primus, ut puto, detexi) me multò majora detecturum, atque imprimis multas quadraturas. Nec me ſpes ex toto fefellit; innumeras enim adhuc teneo, non eas tamen quas præcipuè intendebam, de quibus viderint poſteri quibus hæc noſtra ſpeculatio non erit forſan inutilis. Hoc tamen eos monebo, doctrinam de motuum compoſitione adeò univerſalem eſſe, ut nec analyſi ſolâ coerceatur; nec adjunctâ infinitorum doctrinâ, cum rationalibus & irrationalibus, atque logarithmicis quantitatibus; quippe hæc omnia motus comprehendit, non ab ipſis comprehenditur: hinc latiſſimus patet exercitationibus Mathematicis campus, idemque pluſquàm ſolidus.

Negligentiâ tamen meâ, quòd nihil prælo committerem, factum eſt ut quidam Extranei nationis noſtræ æmuli, vel potiùs eidem invidi, ex eorum numero qui ut fuci, apum favos invadunt, & quod elaborare non poſſunt mel, vi & injuriâ ſibi vendicant, multa mea mihi eripere conarentur, eaque ſibi tribuere. Sed & ad id adjuverunt ex Noſtratibus quidam, mihi præ cæteris invidi; qui cùm mihi nihil reliquum eſſe cuperent nec inventa mea ſibi arrogare auderent, ne ridiculi apud

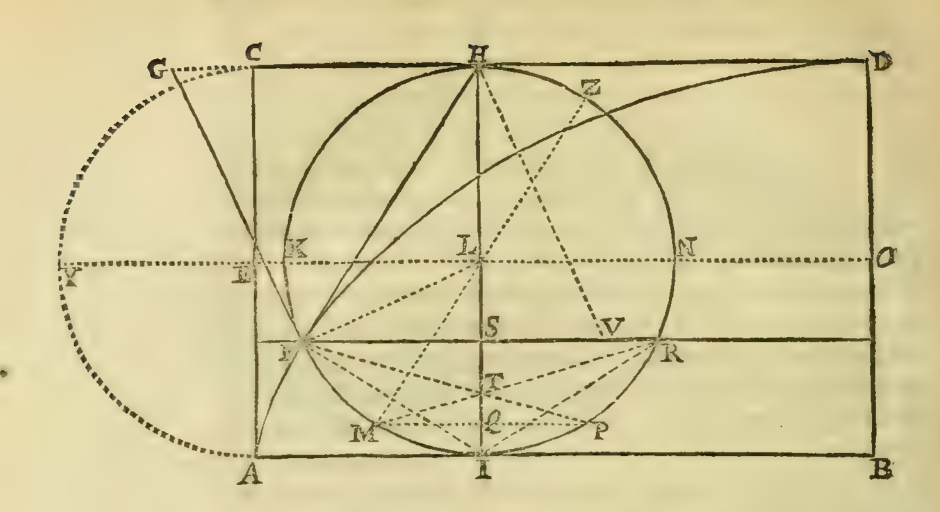
Gallos

Gallos haberentur, ea cuilibet extraneo, (quamquam multis annis posteriori) quàm mihi suo civi & vero inventori, mallent addicere; & sic contra perspectam sibi veritatem, & verbis & scriptis impudenter mentiri.

His artibus, ipsa trochoides, ejusque tangentes, & plana, sed & solida fermè omnia mihi erepta sunt; ac ne ad extrema fures penetrarent, solus obex obstitit, solidum circa axem, quod de industriâ cum Propositione præmissâ de longitudine reticueram. Sustinui, & expectavi donec circa ipsum solidum fœdè errarent qui præ cæteris sapere videri volebant, quorum ipsorum, super hac re, literas autographas etiamnum asservo, easque non unicas: tunc verò solidum ipsum vulgavi anno 1645, nostrisque atque illis extraneis patefeci, quorum (extraneorum inquam) responsum accepi mœroris atque indignationis plenum, ob errorem contra spem suam patefactum. Lætabar interim, & hæc illis subinde (arrogantiùs forsan) exprobrabam, Certè meæ quisquiliæ alicujus sunt pretii, in quas fures adeò cupidè involent, easque sibi retinere tantâ pertinaciâ contendant.

Possum tamen cùm libuerit, mea à furibus recuperare. Habeo enim ad id instrumenta valida, scripta manu, annis & diebus suis munita à viris celeberrimis; nec deerunt testimonia prælis commissa à quibusdam, prudentiùs quàm ego de futuro furto præsagientibus, idque multis annis ante furtum ipsum: his, dum adhuc vivo, utar, ex amicorum meorum judicio.

Redeo ad præmissam Propositionem de longitudine trochoidis, de qua nihil, nec publicè, nec privatim me communicasse jam testatus sum; eam tamen multis annis postea invenit Anglus quidam vir doctissimus, & prælo per se vel per amicos, suo nomine vulgavit. Methodus illius à nostrâ planè diversa est, sed conclusio vera & elegans. Ait enim portionem quamcunque semitro-



choidis AFD, (ſemicycloidem ille cum multis aliis vocat) putà portionem DF à vertice D incipientem, duplam eſſe tangentis HF. Hanc enuntiationem cum noſtra coincidere, ſic demonſtramus.

Quoniam quatuor arcus FM, MI, IP, PR æquales ſunt, ſecabunt ſe invicem chordæ æquales FP, RM in eodem puncto T diametri IH; & rectæ IQ, QT ſunt æquales; & anguli TFI, TFS æquales; ſed & angulus HFR ſive HFS, æqualis eſt angulo HIF, quia inſiſtunt arcubus æqualibus HR, HF; ergo ſumma angulorum HFS, TFS, æqualis eſt ſummæ angulorum HIF, TFI; prior autem ſumma conſtituit angulum HFT, & poſterior ſumma æqualis eſt angulo externo HTF in triangulo ITF; æquales ſunt ergo anguli HFT, HTF; unde in triangulo HFT latera HF, HT ſunt æqualia: ſed HT cum IT conſtituunt diametrum; ergo & HF cum IT diametrum conſtituunt; & eſt IQ dimidia ipſius IT;

quare HF cum dupla IQ conſtituunt diametrum; & ſic dupla HF cum quadrupla IQ, diametri duplum conſtituunt. Sed & ex Corollario, ſemitrochoides AFD ejuſdem diametri dupla eſt; itaque ipſa A F D duplo tangentis HF, & quadruplo ſinûs verſi I Q æqualis eſt: demptis ergo utrinque æqualibus, hinc quidem quadruplo ſinûs verſi, illinc autem portione A F ſemitrochoidis, ſupereſt ut reliqua portio ſemitrochoidis FD duplo tangentis HF ſit æqualis.

Potuit demonſtratio directè inſtitui per motuum compoſitionem, initio ſumpto à vertice D, in curva DF portione quâcunque ſemitrochoidis; quo pacto, concluſio per ſe incidiſſet in duplum tangentis HF, ut mox dictum eſt. Ad hoc, ductâ diametro MLZ ipſi HF parallela, demittendi eſſent ab omnibus punctis arcûs rotæ HF infinities æqualiter diviſi, totidem ſinus recti in ipſam diametrum MLZ; & totidem tangentes ad ipſum arcum rotæ HF pertinentes; atque totidem ipſis correſpondentes, pertinenteſque ad curvam D F; omninò ſicuti de arcu I M F, ac de curva A F ſuperiùs dictum eſt, &c. adhibito tandem Lemmate, & congruis argumentis. Sed prior demonſtratio prior etiam in mentem incurrit, in quâ ideò mens ipſa conquievit, quod & Propoſitionis, & ipſius trochoidis idem eſſet initium punctum A.

De longitudine trochoidum aliarum ac ſociarum omnium, aliàs dicemus.

EPISTOLA

ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL

AD R. P. MERSENNUM.

REVERENDE PATER,

Ex propositionibus Clarissimi Torricellii eas tantum examinandas censui, quas nonnisi ab egregio Geometrâ profectas esse judicabam. Quapropter prætergressis octo primis circa sphæram, & solida eidem inscripta & circumscripta, quarum examen, quemvis vel mediocriter versatum fugere non posse existimavi, nonam aggressus sum quæ est de dimensione cochleæ, quam, ut ardua est, ita veram esse certissimâ demonstratione perspexi; ita ut ex ea unica Authorem inter præstantes hujus sæculi Mathematicos annumerare non verear. Quodque fortassis mirere nihil refert; magisne an minus inter se distent spiræ ipsius cochleæ, modò idem sit semper triangulum à quo describatur; sed & etiamsi ipsum triangulum moveatur tantum ad motum parallelogrammi, non autem motu progressivo, ita ut idem triangulum absolutâ conversione in se ipsum redeat: eodem modo se res habebit, nec mutabitur Propositio.

De centro gravitatis parabolæ inveniendo à priori, nullâ suppositâ ejus quadraturâ; si ipse sic proponit, ut se invenisse intelligat, laudamus: si verò à nobis quærit, dabitur illi non solum in parabola conica, quam quadraticam appellamus, quia in ea quadrata ordina-

tim applicatarum inter se sunt, ut portiones diametri; sed etiam in parabola cubica, in quadrato quadratica, &c. atque in earum solidis; sive ipsæ parabolæ circa suos axes, sive circa tangentes ad extremitatem axis, sive circa aliquam ex ordinatis ad axem convertantur, & geniti inde solidi, sive fusi parabolici, dimidium plano ad ipsius axem erecto resectum proponatur: & multa alia de quibus, si aliquando res postulabit, fusiùs agemus. Nunc verò hoc indicasse sufficiat, in dimidio fuso parabolico quadratico centrum gravitatis axem dividere in duas portiones, quarum ea quæ ad verticem ad eam quæ ad basim se habet ut 11 ad 5; in cubico, ut 13 ad 7; in quadrato-quadratico, ut 15 ad 9; in quadrato-cubico, ut 17 ad 11; atque ita in infinitum, addendo semper 2 ad singulos præcedentis rationis terminos. Prætereo rationes solidorum ipsorum ad cylindros quibus inscribuntur, quas omnes invenimus, & quarum speculatio forsan minimè spernenda viro clarissimo videbitur.

In cycloide Torricellii agnosco nostram trochoidem, nec rectè percipio quomodo ipsa ad Italos pervenerit, nobis nescientibus. Quod si illa tanto viro placuerit, lætor. Spero autem brevi fore ut eadem in lucem emittatur, cum suis tangentibus, cumque solido ex conversione illius circa basim genito, forsan & circa axem: neque id tantùm in prima trochoide cujus basis æqualis esse ponitur circumferentiæ rotæ genitricis; sed etiam in quavis alia trochoide sive prolata, sive contracta; atque in sociis earumdem.

Propositio de solido à qualibet sectione coni circa axem circumvolutâ descripto, atque ad conum eidem inscriptum unicâ enunciatione collato, elegantissima est & verissima, sicut demonstravimus: nec ei inferior est ea quæ sub eadem figura habetur de centro

gravitatis ipsorum solidorum, quam etiam demonstravimus. Quod si ambas duabus tantùm demonstrationibus ostenderit, nihil video quod in hac materia desiderari possit; sed vereor ne positis Authorum demonstrationibus, ipse inde propositiones suas deduxerit: quod etiamsi ita esset, tamen non parum laudis mereretur; neque enim cuilibet contingit, aliorum inventis addere tanti ponderis propositiones.

Ejusdem fere argumenti est sequens Propositio de frusto sphærico duobus planis parallelis secto, de quo nihil dicimus, quia in eo non immorati sumus.

Vide Torricell. de solido Hyperb. pag. 113.

Omnium elegantissima est decima quarta, cujus demonstrationem hîc addere libet, cuperemque valde scire utrum in idem cum clarissimo viro medium inciderim, vel diversum. Igitur in figura cujus constructionem ex ipsius Torricellii Propositione notam esse suppono, existente B centro hyperbolæ, assymptotis BA, BC ad angulos rectos, solido autem quovis DEFG terminato, ut propositum est; primum ostendamus tale solidum medium proportionale esse inter duos cylindros ejusdem altitudinis cum solido, puta rectæ AH, quorum unius basis sit circulus DE, alterius vero FG; ex hac enim cætera demonstrabuntur. Inter BA, & BH, media proportionalis sit BT; tum inter BA & BT, media quoque proportionalis sit B N; atque inter B T & B H, esto B 4. Item inter BA & BN, sit BK; inter BN & BT, sit BQ; inter BT & B 4, sit BY; inter B 4 & BH, sit B 7 atque ita tot continuè inveniantur mediæ quot libuerit, sic enim erunt quoque continuè proportionales differentiæ ipsarum H 7, 74, 4Y, &c. usque ad ultimam KA, & in eadem ratione primarum. Patet autem hac ratione eò deveniri posse, ut cylindrus cujus basis circulus FG, altitudo autem ultima differentia KA, minor sit quovis spatio solido dato. Jam per puncta 7, 4, Y, T, ducan-

tur plana ad rectam AB erecta, solidum secantia secundum circulos quorum diametri 68, 35, XZ, SV, &c. parallelæ ipsi FG; patet quoque ex natura hyperbolæ, proportionales esse rectas FH, 67, 34, XY, ST, & reliquas in eadem ratione, sed inversa, primarum BH, B7, B4, &c. Denique inscribantur & circumscribatur ipsi solido totidem cylindri quot sunt differentiæ, H7, 74;

4 Y, &c. sintque inscripti 8 21, 5 10, Z 14, &c. circumscripti vero F 11, 6 15, 3 17, &c. constat ergo omnes circumscriptos simul superare omnes inscriptos simul, minori spatio quàm cylindro altitudinis K-A, & basis FG; hoc est minori spatio quovis proposito. Præterea cylindrus basis S V, & altitudinis A H, est medius proportinalis inter cylindros ejusdem altitudinis, sed basium DE, FG. Dividatur ipse medius in cylindros ejusdem basis S V; sed altitudinum H 7, 74, 4 Y, YT, &c. usque ad ultimum altitudinis AK, qui ultimus major quidem est primo inscripto 8 21, sed minor circumscripto F, 11, quod sic ostendimus. Quoniam recta ST media proportionalis est inter D A & F H, major erit ratio circuli medii S V ad circulum 6 8, quàm rectæ DA ad rectam 6 7 : at idem circulus medius S V, ad circulum F G minorem habebit rationem quàm eadem recta DA ad eandem 6 7; ut autem D A ad 6 7, ita H 7 ad A K : ergo circulus medius SV, ad basim quidem inscripti 6 8, majorem habet rationem; ad basim vero circumscripti FG, minorem quàm altitudo communis inscripti, & circumscripti H 7 ad altitudinem ultimi medii AK. Eodem modo demonstrabimus cylindrum altitudinis NK, basis verò circuli medii SV majorem quidem esse secundo inscripto 5 10, minorem vero secundo circumscripto 6 15; atque ita de reliquis ordine sumptis. Patet igitur tandem, totum cylindrum medium omnibus quidem inscriptis simul sumptis majorem esse; omnibus verò circumscriptis minorem. Cætera persequi apud vos inutile fuerit.

Corollarium.

Corollarium.

PATET autem manifestò positis rectis BH, B 7, B4, BY, &c. continuè proportionalibus, & factâ constructione eâdem, dividi totum solidum hyperbolicum FG, ED in portiones continuè proportionales in eadem quidem, sed inversa ratione rectarum ipsarum BH, B 7, B4, &c. quæ portiones erunt FG 8 6, 6 8 5 3, 3 5 ZX, &c. quia qui ipsis portionibus æquales erunt cylindri, proportionales erunt in ratione proposita, quæ proprietas eximia est.

Secundò intelligamus solidum hyperbolicum BA versùs A infinitè productum esse, atque idem secari quovis plano 3 5 ad rectam BA erecto in puncto 4, ac circulum constituente cujus diameter 3 5; tum super hac base, circulo 3 5, esto cylindrus 3 5 24 23, cujus altitudo sit B 4 : dico talem cylindrum æqualem esse solido hyperbolico super basi 3 5 constituto, atque infinitè versùs A extenso.

Aliàs, vel cylindrus major est solido, vel minor. Esto primùm major, si fieri potest, & excessus esto magnitudo 25, ita ut solidum hyperbolicum unà cum spatio 25 intelligatur æquale esse cylindro proposito 3 5 24 23. Jam intelligatur cylindrus quidam cujus altitudo B 4, semidiameter verò basis PQ, ita ut hic cylindrus minor sit spatio 25 : sit autem PQ perpendicularis ad BA, atque interjecta inter hyperbolam, & assymptoton, hoc enim fieri potest. Tum fiat ut B 4 ad BQ, ita BQ ad BA, & terminetur solidum hyperbolicum circulo DAE. Erit ergo ex prædemonstratis solidum 3 5 ED æquale cylindro altitudinis A 4, basis verò semidiametri PQ. Addantur inæqualia; solido quidem, spatium 2 5; cylindro verò, alter cylindrus altitudinis B 4, & ejusdem

basis semidiametri PQ. Fient ergo inæqualia : illinc solidum hyperbolicum 3 5 ED, unà cum spatio 25, majus; hinc verò, totus cylindrus altitudinis AB basis semidiametri PQ, minor. At totus hinc cylindrus æqualis est cylindro proposito 3 5 24 23, quia bases & altitudines reciprocantur ex natura hyperbolæ : ergo solidum hyperbolicum 3 5 ED, unà cum spatio 25, majus esset cylindro 3 5 24 23. Verùm solidum hyperbolicum infinitè extensum versus A, unà cum eodem spatio 25, positum est æquale eidem cylindro 3 5 24 23 : hoc ergo infinitè extensum minus esset sua portione 3 5 ED, quod est absurdum. Esto secundò cylindrus 5 23 minor solido hyperbolico infinitè extenso, si fieri potest; poterit ergo ex ipso solido detrahi portio quædam, puta 3 5 ED major eodem cylindro 5 23; ita ut planum DE, parallelum sit plano 3 5, constituatque circulum cujus centrum A. Inveniatur recta BQ media proportionalis inter BA & B 4; secetùrque solidum hyperbolicum plano PQR parallelo ipsi 3 5. Jam ut suprà, solidum 3 5 ED æquale est cylindro basis PQR, altitudinis verò A 4 : cylindrus verò 5 23 æqualis est cylindro ejusdem basis PQR, altitudinis verò AB : ponitur autem solidum 3 5 ED majus cylindro 5 23; ergo cylindrus basis PQR altitudinis A 4 major esset cylindro ejusdem basis & altitudinis AB, quod est absurdum.

Tandem proposito quovis solido hyperbolico ex prædictis, putà DEGF : oporteat ipsum dividere in duas portiones quæ datam servent rationem, ut magnitudo data 26 ad datam magnitudinem 27 : fiat ut recta FH ad rectam DA, ita magnitudo 26 ad aliam quampiam 28; dividaturque recta AH altitudo solidi in puncto T, ita ut portiones HT, TA eandem habeant rationem quàm magnitudo 28, ad magnitudinem 27 : & per punctum T ducatur planum STV parallelum plano FG vel

DE, quod quidem planum STV dividat ſolidum hyperbolicum in duas portiones FGVS, & SVED: dico has portiones eandem inter ſe rationem habere, quàm magnitudo 26 ad magnitudinem 27. Nam inter BT & BH media ſit proportionalis B 4: item inter BT & BA media ſit proportionalis BN; & per puncta 4, N ducantur plana prædictis parallela, atque ſolidum ſecantia ſecundùm circulos quorum diametri 3 4 5, MNO. Quoniam ergo continuè ſunt proportionales BH, B 4, BT, erunt quoque proportionales in eadem ſed inverſa ratione rectæ FH, 3 4, S T propter hyperbolam: quare ex prædemonſtratis, cylindrus altitudinis HT, baſis verò diametri 3 5 æqualis eſt portioni ſolidi hyperbolici FGVS. Simili argumento cylindrus altitudinis TA, baſis autem diametri M O, æqualis eſt reliquæ portioni SVED: ſunt autem ipſi cylindri in ratione data magnitudinis 26 ad 27, ut jam demonſtrabimus; quare & portiones ſolidi hyperbolici ſunt in eadem ratione datâ.

Et quidem, quod cylindri ſint in ratione data magnitudinis 26 ad magnitudinem 27, ſic conſtabit. Quoniam ex conſtructione, ut magnitudo 26 ad magnitudinem 28, ita recta FH ad rectam DA: ut autem FH ad DA, ita ſumpta communi altitudine recta ST, rectangulum ſub FH, ST ad rectangulum ſub DA, ST, hoc eſt, ita quadratum 3 4 ad quadratum MN; ſive circulus diametri 3 5 ad circulum diametri MO. Ergo, ut magnitudo 26 ad magnitudinem 28, ita circulus diametri 3 5, ad circulum diametri MO. Addatur hinc quidem ratio altitudinis HT ad altitudinem TA; illinc autem ratio magnitudinis 28 ad magnitudinem 27, quæ rationes ſunt eædem; ex conſtructione igitur, ratio compoſita ex rationibus circuli 3 5 ad circulum MO, & altitudinis HT ad altitudinem TA, hoc eſt ratio cylindrorum, componitur ex rationibus magnitudinis 26 ad magnitudinem 28,

& 28 ad 27; quæ ambæ rationes conſtituunt rationem 26 ad 27, ut propoſitum eſt.

Hîc mirabilis quædam proprietas accidit circa plana ſpatia hyperbolica hujus conſtructionis, illa nempe FG 8 6, 6 8 5 3, 3 5 ZX, XZVS, &c. quæ omnia ſunt æqualia, poſitis continuè proportionalibus rectis B H, B 7, B 4, BY, &c. ut ſupra cujus quidem proprietatis demonſtratio non erit difficilis cuiqui animadverterit omnia parallelogramma iiſdem ſpatiis inſcripta, eſſe æqualia; ſicuti & circumſcripta æqualia.

Tamdem ſi aſymptoti hyperbolæ non ſint ad angulum rectum, vel eædem erunt ex ſe demonſtrationes omnes præcedentes; vel additione, aut detractione conorum quorumdam, fient eædem.

Cæterum, REVERENDE PATER, hoc ſcias velim, me magnifacere adeo Excellentem Virum, etiam ultrà quàm verbis aut litteris exprimere poſſim. Fac etiam, obſecro, ut ipſe innoteſcat noſtris Geometris, præſertim D. D. *De Fermat*, & *Deſcartes*, quorum utrumque, meo quidem judicio, nec ipſi Archimedi jure quis poſtpoſuerit; hoc enim apud me recipio, fore ut & his & illi gratiſſimum quid facturus ſis.

CLARISSIMO VIRO ROBERVALLIO

EVANGELISTA TORRICELLIUS S. P.

LOQUAR apertè tecum ſine alio interprete, VIR CLARISSIME, quis enim diſſimulare poſſit? Et quanquam litteræ tuæ ad Clariſſimum Merſennum miſſæ ſint, cohibere tamen non poſſum animi mei impetum, quin ad te currat, tibique totum ſe dedicet tanquam

Apollini Geometrarum. Fortunatas certè jam existimare debeo nugas meas, atque illas non jam ampliùs nihilifacere, quandoquidem dignæ habitæ sunt, quæ judicium tuum subirent, & animadversionibus tuis nobilitarentur. Principio, ex me quæris an centrorum gravitatis parabolæ à priori, ut inventum à me proponatur, aut quæratur ut ignotum: erubescerem certè ignotum theorema inter alias propositiunculas meas à me demonstratas collocare. Ostendimus illud unicâ, brevique demonstratione; sed eâ occasione admiratus sum fœcunditatem ingenii tui circa tot parabolas atque earum solida, non solùm Geometricè, sed etiam Mechanicè considerata, & ad mensuram scientiamque redacta. De his nihil ego habeo quod proferam, & fortasse non habebo; siquidem difficillimæ, nisi fallor, contemplationis censeo hujusmodi theoremata. Præterea immorari non soleo circa figuras non vulgatas, & circa solida quæ si nova sint, saltem ab antiquis & receptis figuris planis ortum non habeant; atque hoc eâ præcipuè ratione, ut laborum fructus, quando res ex animi voto succedet, communem litteratorum applausum sortiatur, neque sit qui invideat figuras à me ipso fabricatas. Mensura cycloidis, (hoc enim nomine Clarissimus Galilæus appellavit 45 jam ab hinc annis figuram quæ fortasse tibi nunc trochois est) mihi sese ultrò obtulit non speranti, penè dixi non quærenti. Illam deinde quinquies diversis semper principiis demonstravi. Quoad solida nihil habeo: tangentem prædictæ lineæ jam ostenderat mihi Vincentius Vivianus Florentinus Clarissimi Galilæi alumnus, etiam nunc adolescens. Quoad auctorem hujus figuræ, credo ego ingenium tuum acutissimum & feracissimum, illam ex se observare potuisse nemine indicante; hujusmodi enim lineæ natura familiaris erat, constatque ex compositione duorum

motuum, recti & circularis. Attamen vivunt adhuc teſtes quibus olim Galilæus irritas lucubrationes ſuas communicavit circa hanc figuram; imò ſuperſunt paginæ aliquot clariſſimi Mathematici, in quibus & picturas & aggreſſiones ſuas nonnullas circa hoc ſubjectum jam adoleſcens delineaverat. Pluribus abhinc annis theorema hoc propoſuit ille mirabili Geometræ Cavalerio noſtro, ipſique dixit idem quod & mihi, & pluribus aliis confirmavit, nempe ſe olim experimentum feciſſe, appenſis ad libellam ſpatiis figurarum materialibus, quantuplum eſſet cycloidale ſpatium ad circulum ſuum genitorem, & ſemper illud inveniſſe, neſcio quo fato minus quàm triplum; ideo incœptam contemplationem deſeruiſſe, ob incommenſurabilitatis ſuſpicionem. Quod ſi aliquando, inconſtanti fallaciâ, reperiſſet minus quàm triplum, aliquando verò majus, tunc aſſerebat Lincæus Mathematicus ulteriorem contemplationem proſecuturum fuiſſe; rejectâ ſcilicet variationis causâ in materiæ inæqualitatem atque raſuræ.

Propoſitionem illam de ſolido à qualibet coni ſectione circa axem revoluta deſcripto, atque de ejuſdem ſolidi centro gravitatis, unicâ ſimul brevique demonſtratione oſtendimus, ſuppoſitâ tantum modicâ Apollonii cognitione. Verùm duplex hoc theorema inter neglecta à me rejicitur; nullum enim habebit locum in opuſculis, quæ nunc propalare cogor, in quibus præcipuè profiteor materiæ unitatem.

Quoad ſolidum hyperbolicum, jam non meum ſed tuum, diſperearn ſi jam ampliùs ſpero me viſurum tam ſublimem & tam doctam demonſtrationem quæ cum tua conferri mereatur. Optimum equidem maximumque nunc percipio laborum meorum fructum, eo tantum nomine, quod tu, Vir Clariſſime atque Ingenioſiſſime, tam acutis demonſtrationibus, tantâque doctrinæ affluen-

tiâ, unicàm ineptiolam meam illuſtrare dignatus ſis. Gratias primùm ago maximas. Deinde ut deſiderio tuô ſatifaciam, methodus mea circa demonſtrationem hujus ſolidi diverſiſſima eſt à tuâ. Altera quidem ex meis aggreſſionibus per doctrinam indiviſibilium procedit, quæ ſi cum erudito lectore ſemper ageretur, pauciſſimis verbis expediri poſſet: altera verò per inſcriptionem & circumſcriptionem, more Veterum, non adeo expedita eſt, ſed facilis, & fortaſſe curioſa. Hoc unum reperi in tua ſcriptura, quod conveniat cum meis, nempe conſtructio illa pro ſecando fruſto ſolidi hyperbolici in data ratione; demonſtrationes verò ab eadem conſtructione diſſimillimæ emanant.

Cæterùm evidentiores agnoſco hyperbolas in laudibus quibus me exornas, quàm in demonſtrationibus quibus hyperbolicum ſolidum ipſe metiris. Utinam illis aliquando dignus fiam, ut in lectione operum tuorum, quæ avidiſſimus expecto, illa intelligere valeam, fructuſque ſcientiæ ſuaviſſimos, & divitias ingenii inæſtimabiles inde colligere poſſim, & intellectum meum ditare. Vale Vir Clarissime, tuorumque Operum, editionem accelera, in publica litteratorum omnium utilitatem.

Florentiæ Kal. Octob. 1643.

EPISTOLA

ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL

AD EVANGELISTAM TORRICELLIUM.

VIR CLARISSIME,

Si me unum respicerem; si nullâ existimationis nostræ, si nullâ cæterorum hominum, si nullâ ipsius, quam præ cæteris diligo, veritatis habitâ ratione, internâ animi tranquillitate conquiescerem: non me moveret profectò, quòd vos Deûm atque hominum fidem invocetis, quòd celeberrimorum hominum testimonium in me adducere conemini, quòd denique nullum non moveatis lapidem, ad hoc ut ego meorum ipsius operum plagiarius habear: quippe qui planè mihi conscius sum, ex iis quæ ad vos scripsi, nihil non verum esse; sed fateor ingenuè; longè absum à præstanti illo vitæ philosophicæ statu, tantamque beatitudinem si optare nobis licet, non etiam sperare statim licet. Ego enim inter multos natus, inter multos educatus, cum multis vivere atque conversari assuetus, cum multis etiam necessitudines contraxi; ita ut rebus externis non moveri huc usque nondùm didicerim. Itaque admonet nos existimatio nostra, quam tueri, quamque, si quo id labore liceat aut impendio, promovere tenemur; postulant amici, collegæ, Mathematici Galliarum præstantissimi, quibus omnia me debere fateor; cogit ipsa cui totum me dicavi veritas: ne tam gravem vestram accusationem

nem prorsùs negligam, præſertim quam nullius negotii fuerit refellere; cùm præter rationes noſtras, quæ per ſe ſufficiunt, iiſdem ambo teſtibus utamur. Erit etiam quod de vobis expoſtulem, & ut ſpero non injuriâ, qui cùm feſtucam in noſtris oculis quæratis, trabem in veſtris non animadvertatis. Nolim tamen ob id tolli inter nos litterarum commercium; quod vos nimiùm rigidè, meo quidem judicio, quaſi aliquid nobis timendum minati eſtis: quin potiùs optarim tales iras, ſuaviſſimi commercii redintegrationem eſſe. Quod ſi inter nos, per nos ipſos conveniri non poteſt, judicent amici: nos judicio ipſorum ſtare promittamus. Ad rem venio.

De propoſitione Rotæ atque Trochoidum illius, primùm audivi Pariſiis anno 1628. (eo enim demùm anno ab expeditione Rupellana reversùs, ſtatui in maxima illa atque omni ſtudiorum genere excultiſſima urbe, firmas ſedes ſtabilire; cùm anteà vagus, incertis ſedibus, diverſis in regni Gallici partibus degiſſem) aſſeruitque qui proponebat celeberrimus vir Pater Merſennus, talem quæſtionem per multos jam annos à pluribus tentatam, eouſque inſolutam permanſiſſe: cui ego reſpondi, hoc ei commune eſſe cum multis aliis vetuſtiſſimis nobiliſſimiſque Propoſitionibus; neque ideò quicquam in illa magis quàm in his mirandum videri, ſi unà cum illis ſolutione careret. Ac tunc ipſe, cùm difficillimam exiſtimarem, certè ſupra vires meas, intactam ita dimiſi, ut per ſex annos de illa ne quidem ſomniarim. Atque ut verum fatear, ego tunc annum agens vigeſimum ſeptimum, etiamſi continuo decennii anteacti exercitio, diſcendo, docendoque, atque agendo in rebus Mathematicis, in primis verò in Analyticis, quibus etiamnum maximè delector, non mediocriter profeciſſem; tamen neque eum adhuc habitum mihi comparaveram, neque eas ingenii vires ſuſceperam,

quæ ad ejuſmodi quæſtiones ſufficerent. Interea, cùm mecum ipſe ſæpiùs cogitarem, quâ potiſſimùm ratione poſſem in ſuaviſſimæ Matheſeos adita penetrare, ſtatui divinum Archimedem, quem ferè unum inter antiquos Geometras ſuſpicio, attentiùs conſiderare; ex qua conſideratione ſublimem illam & numquam ſatis laudatam infiniti doctrinam mihi comparavi : ſic enim tunc vocabam eam quæ à Clariſſimo Cavallerio vocatur doctrina indiviſibilium. Ridebis forſan; &, Hic ergo Gallus, inquies, non ſolùm trochoidum dimenſionem ante nos, ſi Diis placet; non ſolùm parabolarum omnium, non ſolum ſolidorum ad has & illas pertinentium, non ſolùm planorum ab helicibus cujuſcunque gradus aut dignitatis compræhenſorum, non ſolum earumdem helicum ſecundùm longitudinem cum prædictis parabolis comparationem, non ſolùm curvarum omnium tangentes per motuum compoſitionem, non ſolùm doctrinam centrorum gravitatis invenerit, ſed & præſtantiſſimi noſtri Cavallerii indiviſibilia quoque? atque illa omnia nobis; hæc illi, plagiarius ille impunè eripuerit? Verumtamen, rideatis licet, & talia, aut iis pejora de nobis putetis, aut vociferemini, Ego trochoides, parabolas, helices, tangentes, & centra ante vos; imò & multò plura non ſolùm inveni, ſed & vulgavi : an vultis ut verum reticeam quod partes noſtras adjuvat, falſum autem proferam quod nobis nociturum ſit? nos ætate aut tempore ſaltem priores, ætatis aut temporis beneficia reſpuemus, & junioribus aut ſaltem tempore poſterioribus, vivi adhuc relinquemus? Apage ſtultam illam in noſmetipſos injuſtitiam. Quòd ſi cuncta ego unicâ epiſtolâ quam ad vos ſcripſi, non enumeravi, nihil mirum; illa enim aliunde ſatis prolixa extitit, nec id neceſſarium, aut operæ pretium judicavi. Deinde etiam, quid de paucis aliquot propoſitionibus enumeratis gloriari attinet?

Pauperis est numerare pecus.

Sed de vobis plura posteà : nunc de Indivisibilibus, quoniam illa ad rem faciunt, dicamus. Illa ergo, an ante nos Clarissimus Cavallerius invenerit, nescio : certè illud scio, me integro quinquennio antequam in lucem emiserit, eâ doctrinâ usum fuisse in solvendis multis, iisque planè arduis propositionibus. Attamen, absiste moveri ; ego tanto viro, tantæ ac tam sublimis doctrinæ inventionem non eripiam ; nec possum ; nec si possim, faciam. Ille prior vulgavit : ille, hoc jure, suam fecit : ille, hoc jure, habeat atque possideat : ille tandem, hoc jure, inventoris nomine gaudeat. Absit ut in posterum, quod nec priùs feci, in tali causâ, intercessoris ridiculi provinciam mihi suscipiam ; præsertim cùm nequidem inter amicos quicquam unquam de tali doctrina vulgaverim, quam neque publici juris facere, nisi post aliquot annos, juvenili quodam mei ipsius amore, decreveram. Quippe sperabam interim, fore ut solutione quæstionum quas quotidie nullo negotio tali instrumento adjutus vulgabam, doctrinæ famam facilè consequerer : neque sanè hæc spes ex toto me fefellit. Postquàm enim ingenti ardore doctrinam ipsam excoluissem, eandemque ad puncta, ad lineas, ad superficies, ad angulos, ad solida præcipuè ; postremò etiam ad numeros extendissem, haud fuit difficile ea exequi propter quæ amici lætarentur, invidi disrumperentur. Exultabam ergo nimiùm juveniliter, ac tanto diligentiùs doctrinam ipsam reticebam ; dignus planè in quem Poëta dixerit,

Nec ferre videt sua gaudia ventos ;

qui detectâ auri fodinâ ditissimâ, dum grana quædam ex ea decerpta ostento, ut ex divitibus ac beatis qui-

ctam habear; interim alius eandem à ſe quoque dete-ctam, palàm, plaudentibus omnibus, oſtendit, ac publici juris facit; ita ut exinde periculum ſit ne ridear, ſi à me quoque inventam fuiſſe affirmavero. Eſt tamen inter Clariſſimi Cavallerii methodum & noſtram, exigua quædam differentia. Ille enim cujuſvis ſuperficiei indiviſibilia ſecundùm infinitas lineas; ſolidi autem indiviſibilia ſecundùm infinitas ſuperficies conſiderat. Unde ex vulgaribus Geometris plerique; ſed & quidam ex ſuperbis illis ſciolis qui ſoli docti haberi volunt, quique ſi nihil aliud, certè hoc unum ſatis habent, ut in magnorum Virorum opera inſurgant, quòd à ſe minimè profecta eſſe invideant, occaſionem carpendi Cavallerii arripuerunt, tanquam ſi ille aut ſuperficies ex lineis, aut ſolida ex ſuperficiebus reverà conſtare vellet. Quanquam autem illi coram eruditis nihil aliud lucrentur quàm ignorantiæ aut invidiæ titulum, tamen iidem coram imperitis, ſuâ authoritate, de doctorum famâ non mediocriter detrahunt; nec ab iis illæſus evaſit Cavallerius. Noſtra autem methodus, ſi non omnia, certè hoc cavet, ne heterogenea comparare videatur: nos enim infinita noſtra ſeu indiviſibilia ſic conſideramus. Lineam quidem tanquam ſi ex infinitis ſeu indefinitis numero lineis conſtet, ſuperficiem ex infinitis ſeu indefinitis numero ſuperficiebus, ſolidum ex ſolidis, angulum ex angulis, numerum ex unitatibus indefinitis: immo plano-planum ex plano-planis numero indefinitis componi concipimus, atque ita de altioribus; ſingula enim ſuas habent utilitates. Dum autem ſpeciem aliquam in ſua infinita reſolvimus, æqualitatem quandam, vel certè notam aliquam progreſſionem inter partium altitudines aut latitudines ferè ſemper obſervamus. Sed de hoc ſatis ſuperque: nunc ad vos redeo. Cùm itaque ope indiviſibilium multa protuliſſem, tandem anno 1634

celeberrimus P. Merſennus trochoidem in memoriam revocavit, non ſine gravi expoſtulatione quaſi propoſitionem haud quaquam ignobilem, de induſtriâ præterirem difficultate illius perterritus. Ego ſic caſtigatus cœpi ſedulò ipſam inſpicere; ac tunc quidem, quæ abſque indiviſibilibus difficillima viſa erat, ipſis opitulantibus, nullo negotio patuit. Modus autem noſter ab aliis omnibus quos huc uſque videre contigit, longè diverſus eſt; & niſi me nimiùm amo, idem illis omnibus longè antecellit; quia omnium ſimpliciſſimus, breviſſimus, univerſaliſſimus, & ad ſolida detegenda aptiſſimus exiſtat, ut ſponte à natura productus, cæteri per vim ab arte efficti videantur. Habes annum quo trochoidem invenimus; diem etiam ſi ita expediret adjicerem. Cætera jam ad te ſcripſi, & horum omnium teſtem locupletiſſimum (præterquam plurimos alios, quorum epiſtolas de hac re etiamnum apud me aſſervo) ipſum eundem habeo quem laudas, celeberrimum P. Merſennum. Vide ergo num ſit cur doleam, cùm vos per exprobrationem objicitis propoſitionem illam forſan ante obitum Galilæi nondum fuiſſe inventam, qui tamen vixit uſque ad annum 1642, præcipuè, cùm jam ad vos ſcripſerim me anno duodecimo jam elapſo inveniſſe. Ut ſic mihi tot teſtes habenti, & cui una ſufficere debuit veritas, fidem omnem denegetis. Inventâ infiniti doctrinâ (liceat adhuc eo nomine uti in hac epiſtola; poſthac, abſit) eaque, pro tempore ſatis probè excultâ; ego ad tangentes curvarum animum applicui. Ac primum, vi Analyſeos, methodum quandam reperi, quæ, etiamſi longè poſteà univerſalis eſſe deprehenſa ſit, tamen recens inventa, talis non apparuit : quærebam verò univerſalem; & particulares methodos (ut adhuc) ubique dedignabar. At trochoides noſtræ occaſionem dederunt cur ad motuum compoſitionem reſpicerem. Occaſio ſatis fuit, ac propo-

ſitionem univerſalem tangentium inde deductam vulgavimus circa annum 1636. Extant adhuc, & circumferuntur hac de re lectiones noſtræ à nobiliſſimo *du Verdus* noſtro diſcipulo collectæ, atque à multis exſcriptæ. Itaque jamdudùm fide publicâ nobis aſſerta eſt talis doctrina, nec alii teſtes quærendi, qui omnes habeamus. Circa hæc tempora nempe anno 1635, mediante ampliſſimo ſenatore Domino *de Carcauy*, cœpi per Epiſtolas commercium litterarum habere cum ampliſſimo ſenatore Tholoſano Domino *De Fermat*, de quo quid ſentiam habes in ea Epiſtola quam ad R. P. Merſennum direxi ſuper ſolido veſtro hyperbolico infinito. Is ergo vir præſtantiſſimus, primus omnium, duas propoſitiones nobiliſſimas ad nos miſit ſine demonſtratione: alteram de parabolis, alteram de planis helicum, utriſque per omnes dignitatum gradus ſumptis. (Ne ergo dubites ampliùs, quis primus tales quæſtiones propoſuerit; illæ meæ non ſunt; quanquam illas ego proprio marte, inventâ ad id peculiari noſtrâ methodo, demonſtraverim) immò univerſalius multò quàm ipſe proponas: quippe non ſolùm poteſtates in helicibus propoſuit, ſed etiam poteſtatum radices. Exempli gratiâ: Si in helice ſemidiametri omnium revolutionum ordine ſumptarum, ſe habeant ut radices quadratæ, aut cubicæ, &c. numerorum ordine naturali progredientium 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. quarum primam (quadraticam putà) reperies in prima revolutione dimidiam partem ſui circuli conſtituere. Cúmque ipſum arduarum (ut tunc) propoſitionum demonſtrationes rogarem, ille in hæc verba reſcripſit, *Ego*, inquit, *ut invenirem laboravi; labora & ipſe: in hoc enim labore præcipuam voluptatis partem conſiſtere deprehendes.* Quid facerem à tanto viro incitatus? Laboravi, atque in auxilium infinita noſtra advocavi; (nondum enim tunc noſtra ampliùs non eſſe

resciveram) eaque tum primùm ad numeros extendi. Animadverti enim & parabolarum plana, ad sua parallelogramma; & earumdem solida, ad suos cylindros; & spatia helicum, ad suos circulos feliciter comparari posse, si innotesceret in numeris ratio summæ potestatum omnium ejusdem generis, ordine, atque indefinitè sumptarum, ad earum maximam toties sumptam; idque in omni genere potestatum. Quod quidem non difficulter assecutus sum. Illicò idem patuit summam omnium numerorum quadratorum, ordine naturali atque indefinitè sumptorum 1, 4, 9, 16, 25, &c. ad eorum maximum toties sumptum quot sunt illi quadrati; hoc est ad cubum ejusdem radicis cum maximo illo quadrato collatam, se habere ut 1 ad 3, sive constituere $\frac{1}{3}$; summam cuborum eodem modo sumptorum, ad eorum maximum toties sumptum, sive ad quadrato-quadratum ejusdem radicis cum maximo cubo, se habere ut 1 ad 4, sive constituere $\frac{1}{4}$; summam quadrato-quadratorum, eodem modo constituere $\frac{1}{5}$; atque ita in infinitum. Ex hac propositione quæ sola sufficit, innumera deduxi corollaria, qualia sunt hæc: Summa radicum quadratarum numerorum omnium, ordine naturali, atque indefinitè sumptorum, ad earumdem radicum maximam totiès sumptam, collata; putà summa radicum quadratarum horum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. eam habet rationem quam 2 ad 3; summa radicum quadratarum omnium numerorum quadratorum, ordine naturali, atque indefinitè sumptorum, ad earumdem radicum maximam totiès sumptam, se habet ut 2 ad 4; summa radicum quadratarum omnium numerorum cuborum, ad maximam totiès sumptam, ut suprà, se habet ut 2 ad 5; atque ita in infinitum, radices quadratæ numerorum quadrato-quadratorum, quadrato-cuborum, cubo-cuborum, &c. ad earum maximam totiès sumptam, ut suprà, sic

comparabuntur, ut antecedens rationis sit semper 2 exponens quadrati; consequens verò sit summa ex ipso exponente 2 & alio exponente ipsius gradus ad quem pertinent numeri quorum sumuntur radices quadratæ. Ut si sumantur radices quadratæ numerorum quadrato-quadrato-cuborum qui sunt septimi gradus cujus exponens est 7, erit consequens rationis 9, conflatum ex 2 & 7, & ratio erit ut 2 ad 9. Similiter, summa omnium radicum cubicarum omnium numerorum ordine naturali, hoc est in primo gradu, atque indefinitè sumptorum, ad earumdem radicum maximam totiès sumptam, se habet ut 3 exponens cubi, ad 4 compositum ex eodem 3 & 1 exponente primi gradus; summa omnium radicum cubicarum omnium quadratorum, ad earumdem radicum maximam toties sumptam ut suprà, se habet ut 3 ad 5; atque ita in infinitum, radices cubicæ omnium graduum, ad earumdem maximam sumptam ut supra, comparabuntur; eritque in omnibus antecedens 3, consequens verò componetur ex eodem 3 juncto cum exponente gradus cujus radix cubica sumpta fuerit. Nec aliter radices quadrato-quadratæ omnium graduum, ad earum maximam sumptam ut dictum est, comparabuntur, eritque antecedens 4; & sic in infinitum infinities, ut satis ex prædictis patet. Hæc cùm ad amplissimum virum scripsissem, dubitavit num eorum demonstrationem haberem. Itaque paucis verbis indicavi eam esse facillimam, per duplicem positionem more Veterum, incipiendo ab unitate, & procedendo ordine per omnes potestates. Quo pacto, facilè est concludere in quadratis, exempli gratiâ, summam omnium numerorum quadratorum ordine naturali, sed finitè, sumptorum, ad eorumdem maximum toties sumptum, collatam, majorem esse quàm $\frac{1}{3}$; at dempto ab eadem summa, seu ab antecedente rationis, ipsorum quadratorum

torum maximo tantùm, remanente integro conſequente, reliqui rationem minorem quàm $\frac{1}{3}$. Nec ad id demonſtrandum, aliò recurrendum eſt quàm ad geneſim quadratorum, quâ fit ut quivis numerus quadratus componatur ex proximo quadrato minore, ex duplo radicis ejuſdem minoris, atque ex unitate; quemadmodum etiam quivis numerus cubus componitur ex proximo cubo minore, ex triplo quadrati minoris, ex triplo radicis minoris, atque ex unitate. Qui quidem cubus eſt ipſum maximum quadratum toties ſumptum quot ſunt numeri quadrati ab unitate incipientes, atque ita de ſingulis poteſtatibus, ſecundùm uniuſcujuſque geneſim. Corollaria, quomodò ab iis deducantur, aliàs, ſi ita expediat, explicabimus. Neque etiam fortaſſis ſpernendum videbitur corollarium aliud quod ex tali numerorum inſpectione deduxi: illud autem tale eſt. Propoſitis quotcunque numeris multitudine finitis, qui ab unitate, ſecundùm naturalem numerorum ſeriem procedant 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. uſque ad 100000000 exempli gratiâ; exhibere ſummam quadratorum, aut cuborum, aut quadrato-quadratorum, aut cubo-quadratorum, aut cubo-cuborum, &c. omnium talium numerorum: quæ ſanè regula, pro quadratis, & cubis, reperitur ſpecialis apud Authores; at pro omnibus poteſtatibus, nullam apud illos reperimus univerſalem. Hæc ergo fuit noſtra pro parabolarum planis ac ſolidis, ſimúlque pro planis helicum, methodus. Poſt hæc propoſuit vir ampliſſimus (quod & ipſe jamdiu in omnibus figuris univerſaliter quærebam) prædictarum figurarum centra gravitatis invenire. Ac ille quidem ad analyſim recurrit, nos ad noſtra infinita; unde methodus illius, ut pleriſque inventis analyticis acccidit, abſtruſiſſima eſt, ſubtiliſſima, atque elegantiſſima: noſtra aliquot menſibus poſterior, ſimplicior evaſit, & univerſalior; quò fit ut cæteris collata, magis nobis arri-

deat. Ut tamen alicui poſſit eſſe univerſalis, debet is omnibus numeris abſolutus eſſe Geometra, qualis huc uſque nullus apparuit. Quoniam verò hoc noſtræ hujuſce diſſertationis præcipuum caput eſt, ac vos non obliquè aut occultè, ſed directè & apertè innuiſtis methodum noſtram, quam tamen huc uſque nondum vidiſtis, illius quam circa finem anni 1644. ad R. P. Merſennum à vobis miſſam legimus, eſſe inverſam, ac proinde noſtram à veſtra fuiſſe deſumptam; quo poſito tanquam vero, adeo indignamini, ut tres maximas epiſtolas ad ampliſſimos celeberrimoſque viros, adjectis etiam ad id magnis Appendicibus, graviſſimis querelis impleveritis; quò nos nihil tale meritos, acerbiſſimâ plagiarii contumeliâ afficeretis: idcircò & locus & res poſtulat ut tam atrocem injuriam, quandoquidem & licet & facilè poſſumus, à nobis propellamus. Ad hoc autem ſatis ſuperque futurum ſperavi, ſi noſtram illam methodum ad vos cum demonſtratione mitterem; non quidem ſuis omnibus numeris abſolutam, nimis enim longa eſt, ſed ſic digeſtam, ut à vobis, aliiſque non vulgaribus Geometris nullo negotio intelligatur; præcipuè ab iis qui indiviſibilia non oderint: alios enim nihil moror, & Geometrarum nomine indignos puto, qui viâ apertâ, tutâ, atque facili relictâ, longuos ac difficiles anfractus ſequi malint. Hoc pacto, cùm illa noſtra à veſtra planè diverſa ſit, ac diverſis omninò fundamentis innitatur, non erit ampliùs quòd vobis ereptam conqueri jure poſſitis. Eam ergo ſeorſim cum ſuis figuris conſcripſimus, ne hujus epiſtolæ lectionem interturbaret.

Facile autem erit animadvertere methodum illam eo modo quo propoſita eſt, univerſalem quidem eſſe abſoluto Geometræ, attamen eandem à priori raro procedere (univerſalem autem à priori invenire, hoc eſt ex ſola figuræ aut lineæ definitione, nullâ ejus cum aliâ

quavis figurâ, aut lineâ comparatione factâ, vix sperandum puto : quæ tamen si haberetur, & circuli & hyperbolæ, aliarumque numero infinitarum figurarum quadratum simul haberetur) siquidem illa in figuris, vix solâ plani cum plano aut solâ solidi cum solido comparatione contenta, utramque simul & plani & solidi aut etiam altioris speciei comparationem persæpe requirit. Immò, illâ methodo, solidorum centra vix directè, sed plerumque indirectè tantùm, putà mediante aliquo plano congruo deteguntur. Sed nec illa linearum centris inservit, nisi ipsæ lineæ, earumque proprietates quædam ex præcipuis ac specificis examinari geometricè possint : quæ omnia ex adjectis exemplis post ipsam methodum seorsim videre licet. De methodo Domini *De Fermat*, nisi eam adhuc videris, hoc scies, ipsam trianguli, atque planorum parabolicorum omnium & solidorum ab iis ortorum centra à priori elegantissimè ostendere. Verùm eandem aliarum figurarum centris accommodare, hîc labor; cum ne quidem à posteriori, reliquis figuris huc usque inservierit; quanquam forsan, quominùs id fieri possit, nihil repugnet. Jam quòd ad tempus attinet, meministi opinor, Vir Clarissime, methodum vestram non ante annum 1644. Parisios missam fuisse, atque eandem tunc admodùm recens inventam : siquidem, ut ex vestris literis patet, vobis eâ adjutis, solidi trochoidis circa basim mensura paulò ante demùm patuerat, quam sub finem anni 1643. nondum habebatis : hæc enim sunt vestra verba in primâ vestrarum ad me epistolâ, *Quoad solida, nihil habeo.* Ego verò meâ methodo usus sum jam ab anno 1637, atque illius ope, & planorum parabolicorum omnium & solidorum centra jam tum inveneram; quorum centrorum quæ ad dimidios fusos parabolicos pertinent, enuntiavi eâ epistolâ quam ad R. P. Mersennum de vestris inventis scripsi anno 1643,

quo primùm anno de Torricellio Parisiis auditum est. Hæc, inquam, enuntiavi anno plusquàm integro priusquàm vestra illa methodus appareret; quæ vestris forsan, & nostris, unà cum aliorum inventis (ingeniosè procul dubio) collatis, tandem apparuit. Sed finge id quod non est, ipsam vestram ante annum 1644. fuisse inventam. Finge etiam id quod multò magis non est, ipsam cum nostrâ prorsus convenire, ac planè eandem esse: quid tum? An nos nostram statim ut minime nostram repudiabimus, qui eâ septennio integro ante prædictum illum annum 1644. tanquam nostra, immò verè nostrâ nemine reclamante usi fuerimus? Num potiùs præscriptionis jure nos tutabimur? & quibuscunque intercedentibus, nostram ut nostram lege asseremus, cùm in talium rerum possessione, vel unius diei præscriptionem valere, nemo inficiari possit? Multò ergo potiori jure nunc, quandoquidem nostra & tempore longè prior est, & penitùs diversa, intercessoribus valere jussis, & nostra tota manebit, qualiscunque tandem illa sit; & nostram ubique asserere, & fructibus ab ea productis tanquam nostris uti ubique licebit. Sed neque argumenta quæ produxisti, ejus ponderis esse videntur, ut illa quemquam ex iis qui nos vel mediocriter norunt, in tam sinistram de nobis opinionem pertraherent. Primùm enim, dum ais me nunquam ne verbum quidem fecisse de centro gravitatis trochoidis; cùm intereà tantoperè, & quidem meritò gloriarer de omnibus aliis, quadraturâ, (comparationem cum circulo dicere voluisti) tangentibus, solidis, &c. nec verisimile esse, cùm reliqua omnia proponerem, de unico centro gravitatis siluisse; si illud tantùm speravissem; quod quidem problema, tuo judicio, nulli reliquorum posthabendum videtur: dum hæc ais, inquam, Vir Clarissime, ex tuo genio loqueris; nos, dum scripsimus, ex nostro etiam.

genio ſcripſimus. Tu, cùm magnifaceres centra, quia ex iis ſolida deducere poſſe confidebas, ſolida autem præcipuè intendebas; ideò centrorum inventionem magnificè extuliſti, nec cæteris poſthabendam, immò præhabendam judicaſti. Ego contrà, quia ſine centris ſolida & quæſivi & viâ Geometricâ inveni; datis autem ſolidis, ſtatim, & abſque labore centra ſequebantur. Ideò centra ne reſpexi quidem, neque ad ea unquam animum applicui; certus omninò ex præmiſſa noſtra methodo, dato plano quod dudum habebam, ſola ſolida mihi quærenda ſupereſſe; centra autem ſimul cum plano & ſolidis haberi. Quòd ſi apologo uti liceat: ego ſim Æſopi illius Phrygis ſtatuarius: plani trochoidis menſura, eſto mihi ſummi Jovis ſtatua, menſura ſolidi, ſtatua Neptuni; centrum autem, eſto ſtatua Mercurii. Jam adſit nobis è cœlo ſub forma hominis ignoti Mercurius ipſe, Jovis & Maiæ filius; interrogetque, Quanti ſtatua Jovis? Indicabo ſanè ego alicujus pretii. Interroget deinde de ſtatua Neptuni: ego & ipſam alicujus precii indicabo. Tandem interroget de ſua ipſius Mercurii ſtatua, quid ego? quid autem aliud niſi hoc? Amice, ſi priores illas duas emeris, tum tertiam hanc auctarium tibi dabo. Itaque, Vir Clariſſime, quæ tibi Jovis aut Neptuni ſtatua meritò fuit, illa nobis Mercurii tantùm ſtatua extitit. Ignoſce, ſi placet, ſtylo; hoc uſiſumus ut mentem noſtram aperiremus. De R. P. Merſenno, quid ſcripſerit in ea epiſtola cujus verba toties repetita contra me adducis, neſcio: quid autem illi dixerim ego planè memmini, nec ipſe omninò oblitus eſt; nec etiam illa quæ dixi malè congruunt cum iis quæ ſæpius pro te citaſti. Sed rursùs, nos ex mente noſtra locuti ſumus; ille, ut intellexit, ſic ſcripſit: vos ex mente veſtra interpretati eſtis; ac illa veſtra interpretatio à noſtra mente alieniſſima eſt. Omnibus tamen at-

tentè confideratis, pace tuâ dixerim, Vir Clariffime, cenfui præcipuam malæ intepretationis culpam in vos recidere: neque enim verba illius, quæ ipfe adducis, à noftro fenfu adeo aliena fuerunt, quin ab iis verum illum noftrum fenfum facilè perfpexiffes, fi æqui interpretis perfonam tibi affumere voluiffes. Scripferas ad ipfum te utrumque trochoidis folidum beneficio centrorum priùs inventorum detexiffe: ac illud quidem quod circa bafim, ut fe habet reverà, enuntiaveras ut 5 ad 8; quod ille cùm verum fciret (jam dudum enim ego illi tale indicaveram) non ægrè perfuafus eft, & alterum quoque circa axem tale effe quale affirmabas ut 11 ad 18. Lætus itaque ftatim ille mihi per litteras fignificavit habere fe quod mecum communicare vellet. Adivi; epiftolam tuam legi, ac circa illud poftremum folidum tantùm quod circa axem, immoratus fum; quippequod nondum habebam, nifi in terminis vero admodùm proximis, extra quos excurrebat ratio illa à vobis affignata 11 ad 18. Hinc ergo, quia de noftris terminis nullum nobis fupererat dubium, illicò animadvertimus, rationem illam veftram 11 ad 18 verâ effe minorem. Cùm igitur fuper hâc re cogitabundus hærerem, tum R. P. ad me prior, Quid ergo, inquit, dices de Clariffimo Torricellio? nonne infignium adeò theorematum cognitionem ipfi te debere fateberis? Faterer, refpondi, fi vera effent; at talia non effe certus fum: miror fanè quod vir talis falfum pro vero nobis velit obtrudere, nec aliud fufpicari poffum, nifi quod ille Mechanicâ quâdam ratione, per approximationem, hujufmodi rationem à vero non admodum-longè aberrantem invenerit, exiftimaveritque veram rationem non poffe detegi; ac proinde fuam haud veram effe, à nemine poffe demonftrari. Hæc, inquam ego tum, oratione, fateor, planè fcyticâ; quam ille fuâ ad vos epi-

ſtolâ lenivit, pro ſuo genio qui omninò mitis eſt, ut ex ſtylo ejus ſatis perſpicere potuiſtis. Jam, cùm dixi, Faterer me debere, ſi vera eſſent; planum eſt me non intellexiſſe de ſolido circa baſim quod jamdiu ante vos habebam, & habere me ad vos ſcripſeram; neque de centro trochoidis, quod dato tali ſolido, unà cum plano latere non poterat. Intellexi ergo de ſolido circa axem ac de centro hemitrochoidis quod ab eo dependet, quæ etiamſi brevî habiturum me confidebam, tamen jure præſcriptionis, veſtra fuiſſent, ſi veſtra illa enuntiatio cum vero congruiſſet. Hinc ſanè nemo non videt minimè difficile fuiſſe, ex verbis epiſtolæ R. Patris quæ vos toties citaviſtis, verum ſenſum qualem jam attulimus, elicere : ſed neſcio quo fato aliter accidit unde lis hæc pro re nullius fere momenti, putà pro nugis noſtris, ut ipſe ſæpe loqueris, inter nos ſuſcepta eſt. Itaque, ne quid in poſterum ſimile accidat, ſi tale commercium inter nos continuetur, oro vos ubicunque agetur de propoſitione Mathematica cujus diſcuſſio ad me pertinebit, ne cujuſcunque literis fidem habeatis, niſi manu meâ illæ obſignatæ ſint : ſic enim fiet ut ego mea tantum, non etiam aliorum ſcripta, ex meo ſenſu interpretari tenear. Nam, pace amicorum hoc dictum eſto, hac in materia, ſoli mihi fidere eſſuevi, jamdudum expertus, interpretes pleroſque, vel dum amicis blandiri appetunt, vel dum rem non ſatis intelligunt, omnia literis obſcurare ac prosùs deformare. Unde qui tales literas accipiunt, illi, dum vel placitis laudibus ac blanditiis avidè ſeſe ingurgitant, vel quod obſcurum eſt ad placitum ſibi ſenſum detorquent, fit neceſſariò ut & ſcribentis & primi authoris verum ſenſum longè relinquant. Ac hujuſmodi quidem allucinationis exemplum afferam ex tuis ipſius litteris, ex proprio tuo ſenſu, ſine interprete ad R. P. Merſennum ſcriptis, in quibus hæc habes : *Tibi*

verò, vir clarissime, corollariolum mitto ex ipsis hyperbolis deductum. Quadratura quædam est, quarum centenas, immò infinitas poteram mittere, nisi vidissem satis superque esse unam, ut statim omnes emergant. Deinde in iis quas ad nos scribis, quas ipse R. P. etiam ante nos legerat, hæc habes : *Si unius hyperbolæ primariæ quadratura tam diu quæsita est, nos pro una infinias damus.* Ex quibus verbis statim existimavit R. P. primariæ hyperboles quadraturam à te inventam fuisse. Itaque cùm aliquo post tempore, de ipsis quadraturis cum eo colloquerer, diceremque non difficulter illas assecutum esse me : Habes ergo tandem, inquit ille, hyperbolæ conicæ quadraturam ? Nequaquam, respondi ; neque enim legitima hæc, & nothæ illæ iisdem legibus addictæ sunt. Me misellum, inquit, quantâ spe decido, qui ubi Cleopatræ aut etiam majoris prætii unionem speravi, ibi vitreas tantùm ampullas reperio ! Sed de hoc ipse forsan rescribet : ego verò ideò scripsi, ut tali exemplo monerem hac in materia non esse tutum interprete uti ; cùm etiam absque hoc tantæ eveniant allucinationes. His ergo nostris rationibus, acerbissimæ vestræ accusationis argumentis luculenter respondisse, atque cumulatè satisfecisse speramus. Nunc verò.

Aspice num mage sit nostrum penetrabile telum ?

Videamus, inquam, nunc, num sit quod de vobis multò potiori jure queri possim. Ac primùm. Nonne vos trochoidem nostram, postquàm & à R. P. Mersenno & à nobis moniti estis, jam à multis annis eam nostram esse, eamque brevi à nobis in lucem emittendam, postquàm vestris ad ipsum R. P. & ad me literis polliciti estis vos talem messem nobis relicturos intactam ; tamen omni jure, ac vestrâ etiam fide violatis, tanquam vestram non literis modo manuscriptis (quanquam neque hoc ferendum

ferendum fuerit) sed libello ad id prælis commisso, vulgavistis? idque interim, ac eodem prorsùs tempore quo continuis vestris literis contraria promitteretis? Hæccine vestra religio? hæc consuetudo? Quòd si ego huc usque de tali injuria pro rei acerbitate questus non sum, fateor, soli ne id facerem evicerunt communes amici. Quid autem lucri feci illis obtemperando? nempe crevit vobis fiducia, quia me bardum, qui illatarum injuriarum nihil sentirem, existimavistis. Attamen si ad paucula verba quæ super hâc re ad vos scripsi animum adverteritis, facilè ex iis percipietis de me dici posse:

Vultu simulat: premit altum corde dolorem.

Nonne ergo ipse prior idem quod vos, sed non absque causa clamare debui, *Vim patior; incredibile est quanto desiderio expectem responsum super hac re.* Quibus sanè verbis, ac multò etiam pluribus cùm ad R. P. Mersennum tum ad amplissimum D. *de Carcavy* scriptis, non obscurè significavistis vos, nisi coram vobis purgati fuerimus, in nos acerbius quidpiam omninò statuisse; ut sic & injuriâ, & mulctâ simul afficeremur. Sed de hoc satis: nunc ad alia capita transeamus.

Rursùs igitur, nonne primus omnium parabolas ego cum helicibus comparavi secundùm longitudinem? Nonne jam annus quintus excurrit, ex quo theorema vulgavi, idemque meo nomine prælis mandavit R. P. Mersennus? Nonne vos ab amicis rescivistis, ac tum demum anno 1645. ad id animum applicuistis? Habeo sanè super hâc re vestras ad vestros amicos Romanos literas vestrâ manu ac vestro idiomate scriptas. Quid tum? Jam vos palam, omnibus ferè vestris literis gloriamini, non solùm parabolam conicam cum helice Archimedea comparasse, sed & reliquas parabolas cum propriis suis helicibus, immò & quemlibet helicis arcum vel partem,

ſive ex centro incipat ſive non, & ſive primam revolutionem excedat ſive non, demonſtraſſe cuidam lineæ parabolicæ eſſe æqualem. Quid hoc rei eſt? Gloriaris de rebus noſtris tanquam ſi tuæ illæ ſint; atque id poſtquam noſtras eſſe ſic reſciviſti, ut niſi reſciviſſes, nequidem de illis forſan unquam ſomniáſſes. Nec eſt quod fingas exiſtimaſſe te nos ſolam helicem Archimedeam conſideraſſe; nimis enim frigidum fuerit figmentum, & abſque ullo fundamento; cùm una eademque ſit illius & cæterarum, demonſtrationis via & methodus, quam qui invenerit, omnia procul dubio invenerit, ſi modo voluerit, nempe hæc, Quævis parabola unà cum helice ſibi propriâ ſic ſe habet, ut ſi portio axis parabolæ, comprehenſa inter ordinatim applicatam, ad axem, & tangentem à termino applicatæ ductam, æqualis eſſe intelligatur circumferentiæ circuli primæ revolutionis in helice: (intellige helices planas; nos enim conicas quoque cum parabolis comparavimus) applicata autem æqualis ſemidiametro ejuſdem circuli: tum, quæ inter verticem & applicatam interjicitur parabola, æqualis ſit longitudine helici primæ revolutionis. Quòd ſi in eadem parabola ſumatur à vertice quævis portio; à principio autem helicis propriæ ſumatur etiam portio, à cujus termino ducta recta ad helicis centrum, æqualis ſit rectæ à termino ſumptæ portionis parabolæ ad axem applicatæ: erunt & hæ portiones æquales. His ſic à nobis inventis, ſi quis quidpiam addiderit; aut ſi imitando ſimilia effecerit, habeat ſanè quam ipſe laudem merebitur. In helicibus conicis exiſtente cono recto, omnia ſe habent ut ſuprà; modò tantùm loco ſemidiametri circuli primæ revolutionis, qui circulus in ipſo cono exiſtit, ſumatur recta à vertice coni ad circumferentiam ejuſdem circuli terminata. Hîc autem, centrum helicis erit vertex coni; & quæ à centro ad puncta helicis du-

cuntur rectæ, erunt portiones laterum coni ejuſdem. At equidem reſciviſſe me fateor, dices. Verùm demonſtrationem proprio marte adinveni. Eſto : quid inde ? Sanè ſi quæſtionem propoſuiſſem tantùm , non etiam ſolviſſem, illa tua fuiſſet, qui prior ſolviſſes : nunc quando prior ſolvi ego, & ſolutam vulgavi, mea eſt; nec mihi, etiamſi omnes conentur, verè eripi poteſt. An, quæſo, meæ aut etiam veſtræ ſunt parabolarum Domini *De Fermat* quadraturæ ? aut ſpatiorum helicum cum circulis comparationes, quas ambo proprio marte invenimus ? Quid de ipſis ſperetis vos, neſcio ſanè : ego certè, quanquam mea multò quàm veſtra potior ſit cauſa, ipſam tamen prorsùs deſero. An meum eſt ſolidum veſtrum hyperbolicum ? an mea hyperbolarum veſtrarum novarum quadratura ? minimè verò ; attamen amborum ipſorum theorematum demonſtrandorum una eademque eſt methodus, quam nos invenimus, & jampridem ad vos miſimus veſtro ſolido accommodatam, quamque iiſdem hyperbolis accommodare non admodum difficile eſt. Reperi quoque in illarum ſingulis, ex parte unius tantùm ex aſymptotis, reſecari poſſe ſpatium planum acutum & versùs acumen infinitum, quod tamen ſpatio finito atque undique clauſo ſit æquale. Obiter autem, ut verum fatear, nonne iſtis hyperbolis occaſionem dedêre parabolæ illæ Domini *De Fermat* ? Nonne etiam illa noſtra propoſitio de helicibus & parabolis longitudine æqualibus anſam præbuit illi alteri de qua adeò magnificè gloriaris ? de illo, inquam, helicum genere quæ deſcribuntur, dum recta uniformiter quidem circa manens centrum circumvolvitur, at punctum interim ſecundùm illam rectam fertur proportionaliter, quam quidem helicem rectæ cuidam aſſeris æqualem ? Quæ autem ſit illa recta, & quomodo ad datas ſe habeat, tanquam ſi Cereris Sacrum ſit, planè reticuiſti. Non ta-

men nos latet, eam æqualem esse hypotenusæ cujusdam trianguli rectanguli, cujus unum laterum æquale sit rectæ à centro ad terminum helicis ductæ: sed enim, quis triangulum istud dabit, ex hypothesi quod dentur positione & longitudine duæ ex iis rectis quæ à centro ad helicem terminantur? vel contrà, quis triangulo dato, dabit helicem? Utrumque si dederis, Vir Clarissime, vel alterutrum tantùm, ego munus id eo munere compensabo, quod vel ipse duplo pluris facias. Sed cave: hîc via præceps est & lubrica; ac talis, ex qua ad parallogismum lapsus sit facillimus: nisi tamen quod petimus datum fuerit, propositio nullius pretii remanebit. Illud etiam non videris animadvertisse, propositionem hanc non esse novam, sed ipsam prorsùs eandem esse cum antiqua illa, quâ quæritur linea per quam pondus ad centrum terræ laberetur secundùm uniformem ad suum horizontem inclinationem; talis enim linea ad tale genus pertinet. Quàm verò minimè nova sit propositio, testabitur ipse R. P. Mersennus. Verùm, quia datâ inclinatione, hoc est, dato specie triangulo rectangulo, datoque centro helicis in centro terræ, dato insuper uno ejusdem helicis puncto, putà in ipsius terræ superficie; non poterat geometricè, nec etiam suppositâ circuli quadraturâ, assignari aliud in ea punctum; ideò illa inculta permansit, ac ferè ex toto neglecta est. Neque rursùs, idem solum aut primum genus est earum helicum, quæ finitæ cùm sint, infinitas tamen circa punctum quoddam revolutiones absolvunt: tales enim & longè antiquiores sunt illæ quæ in globis terrestribus atque in mappis mundi, loxodromias seu ventorum vias referunt, quæque præter has illud habent peculiare, quòd ex utraque parte finitæ sint; & tamen circa utrumque polum infinities circumvolvantur. Cumque sic imitando, res Geometricæ in infinitum plerumque abeant,

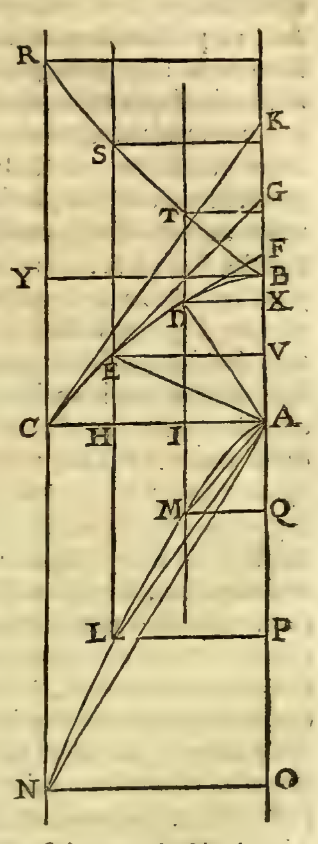
quidni etiam linea recta circa manens centrum æqualiter vel proportionaliter circumvolvetur, ac ſimul punctum mobile vel æqualiter vel inæqualiter ſecundùm rectam eandem legibus quibuſdam feretur vel à centro, vel versùs centrum, ad deſcribenda infinitiès infinita helicum genera? Ex iis autem, genus illud novimus, cujus helices hyperbolis conicis demonſtrantur æquales, quidni rursùs licebit, pro infinitis hyperbolis effingendis, imitari vigeſimam primam propoſitionem libri primi Conicorum Apollonii, ſicuti pro infinitis parabolis vigeſimam propoſitionem imitatus eſt D. *De Fermat*? Verùm hîc omnia perſequi nec lubet nec vacat. Supereſt unum expoſtulationis noſtræ caput circa novas noſtras quadratrices lineas, quas non ita pridem, vix ſcilicet ante biennium invenimus, nec multò poſt ad vos miſimus. Poſſem hîc, & ſanè potiori jure, eadem verba adjicere quæ vos circa centra gravitatis: *Utinam non miſiſſem*; ſed illa nimis acerbam, prorsùſque contumelioſam præ ſe ferunt exprobrationis ſpeciem: quin contrà, & miſiſſe lætor; quandoquidem ita vobis placuerunt; & niſi tunc miſiſſem, nunc utique mitterem. Illas, inquam, lineas ex quibus fiunt ſpatia plana longitudine infinita, quæ tamen ſpatiis finitis undique clauſis ſunt æqualia; vos lineas Robervallianas, ab inventoris nomine, vocaviſtis; ego voco quadratrices, ab earum officio, & inventionis fine: ego enim figurarum quadraturæ intentus, dum nihil negligo eorum quæ ad propoſitum illum finem conducere videntur, præcipuè verò ipſarum figurarum in alias figuras tranſmutationem experior; in tales lineas incidi hac ratione.

Eſto in figura, trilineum ABC quale requiritur, cujus punctum B ſit vertex; recta AB altitudo; recta AC baſis; & linea BC ſit quæcunque curva: nihil enim refert qualiſcunque accipiatur. Verùm, ut ex infinitis

generibus aliquod hîc eligamus, quod vobis inſtar omnium ſit, eſto illa curva BC ad eaſdem partes cava, putà ad partes ductæ rectæ BC, ita ut ipſa tota ſit extra triangulum ABC, & eadem à puncto B ad punctum C, continuè recedat à recta BA, & ad rectam CA propiùs accedat; ſumpto utroque, receſſu ſcilicet & acceſſu, ſecundùm perpendiculares à curva BC ad rectas BA, AC ductas. Tum in ipſa curva BC, ſumantur continuè à vertice B, quæcunque & quotcunque puncta D, E, &c. à quibus ductæ intelligantur rectæ DF, EG, &c. tangentes curvam BC in iiſdem punctis D, E, &c. atque occurrentes axi AB producto ultra verticem B, in punctis F, G, &c. Intelligatur quoque per punctum C recta CK tangens eandem curvam BC in puncto C; quæ quidem recta CK vel eidem axi AB occurret ultra verticem B, vel eadem CK eidem AB erit parallela, coincidetque cum recta CR, quam ipſi AB ponimus eſſe parallelam. Præterea, à punctis D, E, &c. ducantur rectæ DI, EH axi BA parallelæ, atque occurrentes baſi AC in punctis I, H, &c. & per punctum A, ipſis tangentibus DF, EG, &c. ducantur totidem rectæ ordine parallelæ, AM quidem ipſi DF; AL autem ipſi EG, &c. occurratque recta AM rectæ DI productæ in M, atque ita habebimus punctum M: occurrat quoque recta AL rectæ EH productæ in L; atque ita rursùs habebimus punctum L & ſic de cæteris. Quo pacto habebimus à puncto A infinita alia puncta continuo ordine diſpoſita M, L, &c. Per hæc intelligatur ducta linea continua AML &c. illa erit primaria noſtra quadratrix: primariam vocamus, quia ipſa prima occurrit, & prima à nobis vulgata eſt; cæteræ autem ab illa primaria, ſaltem per occaſionem, dependerunt. Quòd ſi tangens CK occurrat axi AB, ductâ rectâ AN parallelâ eidem CK, & productâ rectâ RC donec ipſi AN occurrat in N,

Supple rectam lineam BC à puncto B ad punctum C ductam.

erit & punctum N in eadem quadratrice AMLN. Aliàs autem, si CK coincidat cum ipsa CR (cùm scilicet ipsi AB fuerit parallela) linea AML in infinitum producta nunquam concurret cum recta RC etiam infinitè producta; sed hæc RC producta, ipsius AML productæ erit asymptotos, & punctum N à puncto C infinitè distabit. Potuit etiam loco trilinei, assumi bilineum aut aliud quodcumque spatium; sed omnia exequi unicâ epistolâ, nec possumus, nec volumus, ut ii quibus inventum placuerit, habeant quod imitando addere possint. Jam ergo, in assumpto exemplo trilinei ABC, positis quæ supra diximus, fit quadrilineum quoddam ABCN duabus curvis BC, AN, & duabus rectis BA, CN comprehensum; sive id quadrilineum finitum sit versùs N, sive idem in infinitum versùs illam partem abeat: hoc ergo spatium ABCN dico esse trilinei ABC duplum. Demonstratio nostra omninò universalis erit pro omnibus curvis, & spatiis; poteritque more Veterum, per duplicem positionem institui, nos tamen per infinita sic procedemus. Ducantur, aut duci intelligantur à puncto A ad infinita seu indefinita numero puncta curvæ BC, rectæ AD, AE, &c. ut sic



ſpatium ABC in infinita trilinea reſolvi concipiatur: quæ quidem trilinea totidem rectis AD, AE, &c. ac portionibus interceptis curvæ BC comprehendantur; ſpatium autem ABCN in totidem quadrilinea reſolvatur, quot ſunt trilinea quæ quadrilinea à parallelis DM, EL, &c. ac portionibus interceptis curvarum BC, AN conſtituantur: erunt ergo ſingula trilinea cum ſingulis quadrilineis, ſuper eâdem baſi conſtituta ad puncta D, E, &c. propter tangentes, (abſque tangentibus enim falſum eſſet) atque in iiſdem parallelis; putà trilineum ad AD cum quadrilineo ad DM, in iiſdem parallelis DF, MA; trilineum autem ad AE, cum quadrilineo ad EL in iiſdem parallelis EG, LA, atque ita de reliquis. Quapropter ſingula quadrilinea ſingulorum trilineorum erunt ut dupla, ex legibus infiniti; & omnia omnium, hoc eſt totum ſpatium ABCN quod ex omnibus quadrilineis conſtat, duplum erit totius ſpatii ABC, quod conſtat ex omnibus trilineis. Patet autem eodem ratiocinio, quadrilaterum ABDM, trilinei ABD duplum eſſe; & quadrilaterum ABEL, trilinei ABE, & ſic de cæteris. Si ergo trilineum CAMLN totum extra trilineum ABC exiſtat, ut in aſſumpto exemplo, erunt duo illa trilinea æqualia, ſive punctum N in infinitum abeat, ſive non. Quòd ſi præterea, eo caſu quo curva AMLN tota extra trilineum ABC exiſtit, ex punctis D, E, &c. ducantur rectæ DX, EV baſi CA parallelæ, atque axi occurrentes in punctis X, V, &c. fient ſpatia BDX, BEV, &c. ſpatiis AIM, AHL, &c. ſingula ſingulis æqualia. Quoniam enim, ex demonſtratione univerſali præmiſſa, totum quadrilineum ABDM, totius trilinei ABD, duplum eſt; & ablatum parallelogrammum AXDI, ablati trianguli AXD eſt quoque duplum, erit & reliquum reliqui duplum: reliquum autem primum conſtat ex duobus trilineis BDX, AIM; ſecundum verò eſt

ſolum

ſolum trilineum BDM : quare duo illa trilinea BDX, AIX ſimul, hujus ſolius BDX dupla ſunt, ac proindè æqualia ſunt inter ſe trilinea illa BDX, AIM. De cæteris eadem eſt demonſtratio. Sed & trilineum BDF bilineo AM, & trilineum BEG bilineo AL, æquale eſſe facile demonſtrabitur; & multa alia quæ conſultò omittimus. Poteſt quoque ad ſolida extendi hoc noſtrum inventum; ſi ſcilicet, prædictæ omnes figuræ circa axem AB utrinque productum quantùm ſatis, convertantur; ac ſpatia quidem ſolida ad rectas AD, AE, &c. conſtituta, pro pyramidibus; ſpatia autem ſolida ad parallelas DM, EL, &c. pro parallelepipedis accipiantur. Quo pacto ſolidum deſcriptum à quadrilineo ABCN, ſive illud versùs N infinitum ſit, ſive non, triplum erit ſolidi à trilineo ABC deſcripti : & ſolidum à trilineo ACN in aſſumpto exemplo deſcriptum, duplum erit ſolidi à trilineo ABC deſcripti; & hinc habentur innumeræ ſpecies ſolidorum infinitè finitorum.

Poſſunt etiam rectæ MI, LH, &c. produci versùs puncta D, E uſque ad puncta T, S, &c. ita ut rectæ IT, HS, &c. æquales ſint rectis DM, EL, &c. & per puncta B T S, &c. poteſt intelligi curva quadratrix B T S: hæc autem illa erit quam ad vos miſimus; de qua ideò nihil eſt quod hîc addamus : quòd autem illa ſecundaria ſit, manifeſtum eſt.

Tandem, ductis tangentibus DF, EG, &c. ut ſuprà; potuit loco puncti A aſſumi aliud quodcunque punctum B vel C, vel quodvis in plano trilinei ABC quantumvis producto exiſtens, per quod ducerentur rectæ tangentibus illis parallelæ; quemadmodum hîc ductæ ſunt AM, AL, &c. & per puncta D, E, &c. duci quoque potuerunt totidem aliæ rectæ inter ſe & cuivis datæ parallelæ, quæ cum tangentibus & tangentium parallelis parallelogramma conſtituerent, qualia ſunt AFDM,

AGEL, &c. unde aliæ infinitæ generabuntur quadratrices: sed hæc nunc indicasse sufficiat. Vides itaque, Vir Clarissime, quàm latus hoc loco ad imitandum pateat campus. Vides etiam alia prorsùs à tuis hyperbolicis diversa genera solidorum, & multitudine innumerabilia, & illis forsan, magis miranda; eo quòd hæc nostra de externa sua latitudine nihil unquam remittant, ut vestris necessariò accidit. Neque tamen nostra nos ad vestrorum imitationem effinximus (quod si factum fuisset, quantumcunque abstrusa, vobis tamen tribueremus) sed hæc à nostro linearum quadraticarum invento sic dependerunt, ut ab illis sejungi non potuerint. Vides denique nos nec plana, nec solida infinitè finita præcipuè intendisse; sed nostras quadratrices, quæ ex figurarum in alias transformatione nascuntur, ex quarum origine talia spatia necessariò consecuta sunt; & nobis aliud animo agitantibus, sese ultro obtulerunt.

Jam, quadratura parabolæ quomodo ex prædictis facilè deducatur, sic ostendimus. Intelligatur in hoc nostro exemplo, curva BC esse quævis parabola, sive conica illa sit, sive alia: (unica enim omnibus inservit demonstratio) cujus axis sit AB; vertex B; basis AC; & recta BY ipsam tangat in vertice, occuratque rectæ NC productæ in puncto Y, ut sit parallelogrammum ABYC spatio trilineo parabolico ABC circumscriptum. Ducantur etiam, vel duci intelligantur à singulis punctis curvæ AMLN, putà à punctis M, L, N, &c. rectæ MQ, LP, NO, &c. basi AC parallelæ occurrentes axi BA producto in punctis Q, P, O, &c. quo pacto, constituetur aliud quoddam trilineum ANO, cujus axis erit AO, vertex A, & basis NO. In hoc trilineo, rectæ ad axem ordinatim applicatæ erunt MQ, LP, NO, &c. quæ ordinatim applicatis in parabola, DX, EV, CA, &c. singulæ singulis debito ordine sumptis, erunt æqua-

les; at portiones axis AO inter verticem A, & applicatas interceptæ, putà AQ, AP, AO, &c. æquales erunt rectis FX, GV, KA, &c. singulæ singulis debito ordine sumptis: quæ omnia ex constructione manifesta sunt. Est autem in quavis parabola, ut FX ad XB, sic GV ad VB, & sic KA ad AB, propter tangentes DF, EG, CK. Quare erit quoque, positâ in nostro exemplo quâvis parabolâ BDEC, ut AQ ad BX, ita AP ad BV, & ita AO ad BA, &c. Est ergo curva AMLN parabola ejusdem speciei cum parabola BDEC; cùmque AC, ON sint æquales, erit spatium AON ad spatium ABC, ut axis AO ad axem AB. Ostensum autem est spatium ABC æquale esse spatio ACN; quare spatium AON ad spatium ACN est ut AO ad AB: & componendo parallelogrammum ACNO ad spatium ACN, sive ad spatium ABC, se habet ut recta OB ad rectam BA. Sed ut parallelogrammum AY ad parallelogrammum AN, ita recta AB ad rectam AO; ergo, ex æquo, in ratione perturbata, erit parallelogrammum AY ad spatium ABC, ut recta OB ad rectam AO. Datæ autem sunt rectæ illæ OB, AO, quia AO ipsi AK datæ æqualis est, ex constructione: ergo data est ratio parallelogrammi AY ad spatium trilineum parabolicum ABC, ut propositum est; & est talis ratio ut recta composita ex AK & AB, ad rectam AK.

Simili ratiocinio, in solidis ipsarum parabolarum circa axem AB conversarum, concludemus universaliter sic esse cylindrum AY ad solidum ABC, ut recta composita ex AK & dupla ipsius AB, ad ipsam eandem AK.

Quomodo ergo in ejusmodi quadratrices inciderim, jam tenes: quàm verò ingenuè ad vos miserim, ipsi scitis: sciunt & Academiæ nostræ proceres, qui omnes epistolam nostram, antequam ad vos mitteretur, perlegerunt; sciunt & multi alii cum quibus eandem ego, vel amici communicavimus; sciunt, inquam, illi omnes,

me expreſſis verbis, veluti florem quemdam ex horto illo delectum, vobis indicaſſe quadraturam parabolæ primariæ ſeu conicæ. Quis igitur meo loco conſtitutus, fore ſperaviſſet ut Clariſſimus Torricellius, inde per imitationem, cæteras parabolas quadrandi arreptâ occaſione, (quod nullius fuit negotii, quia una eademque eſt omnium methodus) hæc verba ſubjiceret: *Prædictæ methodi, tum pro quadraturis, tum pro tangentibus, ſunt quas minimi præ cæteris ego facio; non tamen patiar mihi illas eripi.* Et hæc: *Linea Robervalliana, ſi ortum ducat ex aliqua parabolarum, ſemper parabola evenit ejuſdem ſpeciei; quod ego novum eſſe ſcio, licet fortaſſe turpe videatur hoc fateri.* Et rursùs in alia epiſtola: *Quadraturas ad Clariſſimum Robervallium mitto, fortaſſe ad ſubeundam eandem fortunam cum meo centro gravitatis cycloidis*, hoc eſt trochoidis. Atque ita, ſicuti palam nos accuſaverat Torricellius, tanquam ſi centrum illud noſtræ trochoidis, à nobis illi ſurreptum fuiſſet, ſic timere ſe ſimulavit, ne eodem fato illæ ſuæ (ſi Diis placet) parabolarum quadraturæ ſibi à nobis eriperentur. Quis, inquam, hoc ſperaviſſet? Nam, Deum Immortalem! quid illis in quadraturis aut novum eſt aut ad Torricellium pertinet, ut ei poſſit eripi? An in univerſum quadraturæ illæ ſunt Torricellii? Nequaquam. Primariæ enim ſive conicæ parabolæ quadratura Archimedis eſt; cæterarum autem, D. *De Fermat*: dico D. *De Fermat*; quia cæterarum illarum medium à medio Archimedis planè diverſum eſt, & diverſum eſſe debuit, quandoquidem ad illas, medium Archimedeum omnino ineptum eſt. Quòd ſi omnibus illud aptum fuiſſet; tunc, quantumvis ab eo diverſum eſſet medium D. *De Fermat*, omnes tamen illas quadraturas uni Archimedi tribueremus, ac cæteras per imitationem inventas ad primariam remitteremus. Si quidem facile eſt in-

ventis addere : authorem verò ſeſe præbere, hoc opus hîc labor eſt. Non igitur aut Torricellii, aut noſtræ ſunt parabolarum quadraturæ in univerſum; nec illæ aut ipſi aut nobis eripi poſſunt. Supereſt igitur ut de medio decertemus. Sed ad quid hoc? Quandò, ſive ego vicero ſive Torricellius, ipſa res vel Archimedi cedet, vel D. *De Fermat*. Attamen quod in eo medio præcipuum eſt, noſtrum eſt, ipſo Torricellio concedente, nempe noſtra quadratrix, quam ipſe Robervallianam vocat. Quid igitur ipſi relinquitur? Forſan, inquiet aliquis, vult Torricellius ſuum eſſe, quòd uſus fuerit complementis æqualibus parallelogrammorum, eaque prædictis Robervallianis quadratricibus accommodaverit, ut duplici poſitione inſcriptorum & circumſcriptorum uteretur more Veterum. Atqui ob tantillum, quod nec ipſum univerſale eſt, adeo ſollicitum eſſe, adeoque invigilare ne ſibi eripiatur, pauperis cujuſdam eſt, qui hoc unum poſſideat, non autem ditiſſimi Torricellii, qui infinitos rerum multò pretioſiarum poſſidet theſauros. At, dicet alius: Robervallius unicam parabolam primariam ſeu conicam, Torricellius verò omnes omninò quadravit. Robervallius ſcilicet unicam! Quis autem nos uſqueadeo cæcos exiſtimaverit? præcipuè cùm una eademque ſit omnium methodus quam ſuprà oſtendimus? Egone in eo quod difficilius fuit, ſi tamen quid ibi difficile dici potuit, nempe in quadratricibus ipſis detegendis, atque in primariæ parabolæ quadratura preſpicax; in facillimis repentè cæcutiero? Quin ergo ſaltem enuntiaviſti? Satis fuit unam enuntiare; cæteræ ſponte ſequebantur. Quid hoc rei eſt? An tandem ego ea omnia ignoraſſe cenſebor, quæcunque unicâ quam ad Torricellium ſcripſi epiſtolâ expreſſis verbis non comprehendi? Reſpiciat ille ad verba noſtra, ut quid voluerimus intelligat: florem mittebamus, non arborem. Ac jam

decennium est ex quo absolutis nothis illis parabolis, vix animo occurrit, nisi urgeat occasio, ut illas ampliùs nominem; Torricellio verò ipsæ novæ sunt, adeoque ipsarum ille non obliviscitur, ut magnum quid putet, si centum modis illas quadraverit, cùm tamen infinitis id fieri possit. Rursùs ergo, quid in illis quadraturis novum est quod ad Torricellium pertineat? Non video sanè: attamen scire gestio, ne quod illius est, quodque sibi eripi minimè passurum esse minatur, imprudentes auferamus.

Jam perspiciat quicunque Torricellii legerit epistolas, quàm multa prætercam legitimæ expostulationis capita. Enimverò, illud ne viro ingenuo ferendum fuit, quod nobis comminando scripsit super aliâ quâdam methodo centrorum gravitatis inveniendorum, quam habere se gloriatur? *Oro vos*, inquit, *ne inter vestra hanc etiam habeatis: nam hoc esset tollere penitus omne litterarum, scientiarumque commercium.* Quid aliud ad manifestum furem scribi potuit? Interim tamen, de illa methodo callidè ac de industriâ tacuit Torricellius: ita ut si aliquam ego aut alius quispiam proferamus, jam ipsi liberum sit illam astutiis ejusmodi, atque in longum prospicientibus verbis, sibi asserere, ac de ea locutum esse se, suâ fide affirmare.

Quis rursùs feret quod ad R. P. Mersennum scribit, cùm de centro nostræ trochoidis loquitur? *Quod certè* (ait) *immò certissimè scio non habuisse Robervallium, antequam demonstrationem meam videret*; *ut P. V. vel ipsemet, vel tandem universa Europa testis esse poterit.* De centro illo jam satis suprà, immò usque ad nauseam; nec circa illud universa Europa testis nobis formidanda; quin, si fieri posset, præ cæteris optanda. Verùm, quid tale centrum ad universam Europam? Crede mihi, Clarissime Torricelli; esto (quod tamen sine arro-

gantia dici non poteſt) quòd in rebus Mathematicis ambo ſimus egregii ita ut paucos pares, nullos agnoſcamus ſuperiores : nequaquàm tamen, hoc pacto, tales erimus quos univerſa reſpiciat Europa; nempè miſellos Geometras de neſcio quo puncto diſceptantes. Simus potiùs ambo, ego triginta millium peditum noſtrorum veteranorum dux, tu totidem veſtrorum : adſit utrique equitatus tali numero debitus, nihilque deſit armorum, annonæ, aut fidei militum erga duces; ac tunc univerſá forſan nos reſpiciet Europa.

Hoc loco, Vir Clariſſime, cogitare ſubiit quî fieret, ut cùm ſemel ad te ſcripſerim (prima enim alia noſtra de te epiſtola ad R. P. Merſennum directa fuerat) idque ſtylo qui meo & amicorum judicio, nihil omninò acerbi, quanquam poſt ereptas à te nobis noſtras trochoides, redolet; ipſe tamen è contrario, acri adeò ſtylo reſcripſeris; nec mihi ſoli, quo pacto faciliùs res componerentur, ſed tribus (neſcio num etiam pluribus) literis ad ampliſſimos celeberrimoſque viros de me ſcriptis, haud alio argumento quamquòd exiſtimares (nimis tamen leviter) centrum trochoidis ipſius tibi fuiſſe ereptum. Tantuſne Torricellio earum quas ſuas putat, nugarum zelus (liceat eo tibi familiari nugarum vocabulo uti) ut ſtatim atque eas ſibi ereptas putaverit,

Irruat & fruſtra ferro diverberet umbras,

ne quidem cogitando quantas ille, cùm directè, tùm indirectè, ab aliis ſumpſerit, ob quas periculum ſit ne quamvis placidos acriùs irritando, ipſe viciſſim pœnas luat? Atqui conſentaneum erat, vir prudens cùm ſit, ut meminiſſet hujus præcepti, quod qui dedit, is procul dubio fuit ad unguem factus homo; videlicet,

Qui, ne tuberibus propriis offendat amicum
Poſtulat, ignoſcat verrucis illius.

Equidem, inter plurimas hujusce tam acris styli causas, hæc nobis videtur probabilior, quod tu, Vir Clarissime, spatium Mathematicum ingressus, seu fato seu sponte, viam à nostris jam à ante plures annos tritam inieris, à qua huc usque parùm deflexeris; unde non mirum est si in easdem stationes, littora, portus, fluvios, & regiones incidas, quibus illi dudum detectis nomina indiderunt, eaque omnia in chartas intulerunt: ipse autem, cùm illa à te primùm detecta existimes, fit ut postea indigneris si quis contrarium asseruerit, atque id quod verum est candidè enarraverit. Memineris ergo spatium illud infinities infinitè infinitum esse, idemque solidum, immò etiam plusquàm solidum, tibi verò nec pedes, nec pennas, nec alas deesse: deflectas ergo paululùm vel ad dextram, vel sinistram, vel suprà vel infra: curre, nata, vel etiam vola: hæc enim potes omnia, quæ sanè

pauci, quos æquus amavit
Jupiter, aut ardens evexit ad æthera virtus,
potuere;

sic enim fiet, ut, quod non semel, immò pluries jam præstitisti, & novas regiones detegas, & viros doctos non solùm adeò feliciter imiteris, quanquam nec ipsum laude caret; sed, quod multò laudabilius est, teipsum viris doctis præbeas imitandum.

Huc usque pro nobis plura diximus: nunc pro divino Archimede pauca liceat. Bis, ut tua excuses, tantum virum in discrimen adducis, Vir Clarissime; semel pro libris tuis de motu projectorum; iterum autem, pro illâ tuâ minimè verâ ratione solidi trochoidis circa axem, ad suum cylindrum ut 11 ad 18. Ac primùm quidem, pro libris de motu projectorum hæc ais: *Archimedes supposuit olim projecta, non per parabolas sed per lineas spirales*

Spirales suas procedere. Hanc Archimedis suppositionem nullibi videre licuit in ejus operibus : commentarios autem, forsan, non omnes legi; sed nec eorum authoribus licuit tanto viro absurdas ejusmodi suppositiones affingere. Deinde, pro excusando vestro illo fictitio trochoidis solido, hæc scribis ad R. P. Mersennum : *Habemus apud Archimedem, prop. 2. de circuli dimensione, circulum ad quadratum diametri esse ut* 11 *ad* 14 *: quæro ab ipso* (*Robervallio, supple*) *undenam putet me habuisse rationem quam ad numeros* 11 *&* 18 *reducebam?* Quæ post verba illa sequitur linea, solitam totius epistolæ redolet acerbitatem. Equidem Archimedes hæc habet : at non dissimulavit statim (nempe propositione tertiâ, quæ manifestò lemma est ad illam secundam) talem rationem 11 ad 14 non esse accuratam, sed tantùm veræ proximam : apud vos autem nihil tale habetur; sed vestram illam rationem 11 ad 18 tanquam accuratam proposuistis, ex invento priùs centro tanquam accurato deductam : immò, illam pro accurata exceperunt quicunque existimaverunt vos adeò candidos esse, ut nefas existimaretis ea enuntiare quæ vera non essent. Enimverò, Vir Clarissime, plerique ex nostris vix persuaderi potuissent, Torricellium nobilem adeò Geometram, aliquid purè Geometricum sine demonstratione affirmare voluisse. Sed nec illa vestra ratio 11 ad 18 ex terminis vero proximis ab Archimede assignatis pro circuli dimensione deducta est, cùm eadem extra ipsos terminos longè evagetur; unde non video quid vobis hîc proficiat Archimedis authoritas, præcipuè in materia purè Geometrica, ubi pro errore accipitur quidquid accuratè verum non est, quantumcunque illud ad verum proximè accedere deprehendatur.

Hîc fieri posse video, ut aliquis hujusce nostræ epistolæ stylum ideò carpat, quòd ille nec amico, nec ad-

verſario convenire videatur ; ut potè qui pro amico, acrior, pro adverſario contrà, lenior quàm par ſit appareat. Equidem, Clariſſimum Torricellium adverſarium habere abſit ut unquam optaverim ; adverſarius ſanè illi ego ero nunquam, niſi ipſe prior talem me effecerit. Quòd autem amicum & cupierim & adhuc cupiam, argumentum certiſſimum eſt, quòd prior amaverim, ac nomen ejus celebre per Galliam, quàm maximè potui, reddiderim. Siccine ergo (urgebit cenſor) cum amicis tuis te gerere ſolitus es ? Primùm quidem, apologiam contra acerbam ipſius accuſationem mihi debui ; deinde metui (fateor) ne ipſe quem ſummopere amicum mihi cupio, exillis eſſet qui aliena veluti perſpicillis cavis reſpiciunt ; ſua, convexis aut iis forſan quæ plurimis faciebus diſtinguntur, unde fit ut iidem aliena contractiora, ſua verò ampliora aut numeroſiora, aut etiam pulchris coloribus ornatiora quàm ſint reverâ videre videantur. Itaque admonere eum volui officioſè, ut amorem proprium alieno temperaret. Ac, ne ad excitandum duriuſculus haberetur, ſtylum adhibui utcunque acutum & mordacem : ſic enim fore ſperavi ut ſapiens cùm ſit, ſe ab amante pungi ſentiret, atque ita ad redamandum acriùs incitaretur. Quanquam autem tot paginas minimè inutiles fore ſpero, doleo tamen quòd illas in tractando ejuſmodi ingrato ac planè tædioſo argumento inſumere oportuerit ; cùm alia ferè innumera longè ſuaviora, ac viris doctis, ut puto, acceptiora, cùm ex nobis, tùm ex noſtris habeamus ; qualia ſunt quæ ſequuntur. Circa analyſim quidem, de æquationum recognitione, & emendatione, novâ prorſus methodo, de earumdem determinatione ac de ipſarum per locos proprios reſolutione, atque compoſitione. Circa Geometriam, de locis planis, ſolidis, atque ad ſuperficiem ; ubi in ſpecie, reſtituta habemus loca ſolida ad tres &

quatuor lineas: de cylindris, & conis isoperimetris, cùm demptâ base, tum additâ: de iisdem sphæræ inscriptis, & circumscriptis, seu spatiorum solidorum, seu etiam superficierum tantum habeatur ratio; ubi mirabere forsan quâ ratione à nobis concludi potuerit, positâ sphæræ diametro 32 partium, axem coni inscripti cujus superficies comprehensa base sit maxima, esse hanc apotomen $23 - \sqrt{17}$; si sphæræ superficies uno, duobusve, vel tribus aut pluribus circulis, in quotcunque & quascunque portiones secta sit, quamcunque ex illis portionibus cum alia ac cum tota comparamus, ac uniuscujusque centrum gravitatis assignamus. Circa cylindricas & conicas superficies scalenas, tum etiam circa rectas, mira habemus. Inter illa perpende qualenam sit hoc problema: Portionem superficiei cylindri recti exhibemus, quæ superficiei datæ cylindri scaleni sit æqualis. Sed & istud: Dato quadrato, æqualem damus cylindricæ superficiei portionem, idque absolutè, nullâ suppositâ circuli quadraturâ, & exclusis cylindri basibus. Problemata atque theoremata innumera habemus soluta, cùm circa conicas sectiones, tùm circa alia fere omnia Geometriæ huc usque notæ tam theoreticæ quàm practicæ capita. Circa Arithmeticam, Musicam, Opticam, Astronomiam, Gnomonicam, & Geographiam,

Plura quidem feci, quàm quæ comprehendere dictis
In promptu mihi sit;

sed illa omnia vulgaria æstimo. Attamen, dic quibus in terris Luna minori spatio quàm 24 horarum nostrarum communium, bis oriatur, aut bis occidat ejusdem horizontis respectu. Facile quidem theorema, sed quod primâ fronte impossibile multis videatur. At Mechanicam à fundamentis ad fastigium novam extruximus, rejectis omnibus, præter paucos admodum, antiquis la-

pidibus quibus illa conſtabat; ita ut nunc octo contignationibus, hoc eſt totidem libris, abſolvatur. Primus eſt de centro virtutis potentiarum in univerſum, an detur tale centrum, & quibus potentiis conveniat, quibus verò minimè; ſecundus de libra, ubi de æquiponderantibus; tertius de centro virtutis potentiarum in ſpecie; quartus de fune mira continet; quintus de inſtrumentis & machinis; ſextus de potentiis quæ in diverſis mediis agunt; ſeptimus de motibus compoſitis; octavus denique, de centro percuſſionis potentiarum mobilium. In his omnibus nulla admitto nova poſtulata, ſed tantùm ea quæ vulgò recepta ſunt apud Authores: quòd ſanè exequi, quàm non facile opus ſit, teſtes ſunt quotquot huc uſque de gravibus ſuper planis inclinatis exiſtentibus egerunt; inter quos & ipſe haberis, Vir Clariſſime, qui propoſitione prima libri primi de motu gravium deſcendentium, ad id demonſtrandum novo poſtulato uſus es, quod quivis non facilè conceſſerit, quia pondera quæ proponis, non librâ rigidâ & rectâ, ut fieri ſolet, ſed fune molli ac perfectè plicabili invicem alligantur. Nos autem ad hoc, librâ utimur modo uſitato diſpoſitâ, cujus beneficio propoſitionem illam non aliter demonſtramus, quàm aut vectem aut axem in peritrochio: eam autem jam ante quindecim annos invenimus, atque anno *1636.* tanquam Mechanicæ noſtræ prodromum, prælo commiſimus atque vulgavimus, ſed Gallico idiomate. Neque etiam eum tantùm caſum conſideravimus qui ſolus ab omnibus attenditur; cùm ſcilicet potentia pondus in plano inclinato poſitum retinens, agit per lineam directionis ipſi plano parallelam; ſed & dum eadem linea directionis aliam quamcunque poſitionem obtinuerit: quo pacto, ratio ponderis ad potentiam infinitè mutatur. Ibi autem quiddam demonſtravimus quod multis omninò paradoxum viſum eſt; nem-

pe, si intelligatur prælum aliquod duobus planis parallelis perfectè rigidis constans, quod ita disponatur ut ejus plana horizonti non sint parallela : tunc, quantâcunque potentiâ prematur prælum illud, planis semper perfectè planis ac parallelis inter se remanentibus, illa nullum pondus inter se retinebunt ; sed illud pondus propriâ gravitate statim labetur inter ipsa plana, atque idem à prælo sese liberabit, nisi aliunde retineatur. Hæc quidem ad quintum nostrum librum pertinent. Libet autem ex quarto quoque hæc addere. Si tres potentiæ totidem funibus ad communem nodum religatis agentes, (nodus est quodvis punctum in fune) æquilibrum constituant : tunc describi poterit triangulum cujus centrum gravitatis sit nodus ipse, tres autem anguli ad tria funium puncta alicubi terminentur (infinita quidem describerentur triangula, sed omnia similia) erunt autem tunc tres potentiæ in eâdem ratione cum tribus rectis à centro trianguli ad tres angulos terminatis ; ita ut quælibet potentia homologa sit ei rectæ quæ in fune ipsius existit. Si quatuor potentiæ non existentes in eodem plano, totidem funibus ad communem nodum religatis agentes, æquilibrium constituant : tunc quod suprà de triangulo dictum est, de quadam pyramide tetragona verum erit. Hinc aliud paradoxum, funis horizonti minimè perpendicularis quantâ vi tendatur, si perfectè plicabilis, nullo modo autem rigidus ex se existat, imposito quocunque vel minimo pondere, aut si ipse ex se gravis esse intelligatur, flectetur necessariò, vel rumpetur, nec viribus ullis fieri poterit ut rectus evadat. Similiter, tres vel quotcunque funes ad communem nodum religati, totidem potentiis in eodem plano existentibus, quod planum horizonti non sit perpendiculare, quibuscunque viribus tendantur ; imposito quocunque vel minimo pondere, vel si ipsi funes per se graves esse intelligantur,

nunquam tamen poterunt eò adduci ut in eodem plano consistant. Tandem etiam, ex octavo libro illud habebis : Omnis sectoris circuli semicirculo non majoris circa centrum circuli circumvoluti, existente axe motus ad planum ejusdem circuli sive sectoris, perpendiculari, centrum percussionis sive impetus in recta angulum sectoris bifariam dividente quæsitum, sic reperietur : Ut chorda arcus sectoris ad ipsum arcum, ita tres quadrantes semidiametri circuli ad rectam inter ipsius circuli centrum, & centrum percussionis sectoris interceptam. Ex tali centro quod extra sectorem aliquando existet, si impetus sectoris eo modo moti quo dictum est, excipiatur, productâ ad id rectâ angulum bifariam dividente, si centrum illud extra sectorem excurrerit, erit impetus ille maximus omnium qui ex quovis puncto in eadem recta existente excipi possunt.

De his & aliis agemus in posterum, si ita tibi placuerit, Vir Clarissime, postquam litibus valere jussis, solidam inierimus amicitiam, quam, ut spero, non recusabis. Illius autem leges, quòd ad litterarum commercium attinet, tales sunto. Nihil tentandi gratiâ scribam. Quicquid scripsero, nisi de eo dubitare me, aut illud quærere scripsero, verum existimasse censear. Quoties per otium licuerit alicujus enuntiati demonstrationem mittere, mittam : nisi misero, si cupias, quàm citò mittere tenear. His legibus, si quid addere, aut detrahere; immò, si ipsas prorsùs tollere, & alias ferre voles, licet. Memineris tamen, quæstionibus agere tentandi gratiâ odiosum esse atque amico indignum; neque enim omnia possumus omnes : tum etiam amicum delectare oportet, non torquere. Hæc si observaverimus, tunc procul dubio, & durabit amicitia ; & dum uterque nostrum vicissim & reciprocè docebit & docebitur, uterque amborum scientiam, salvâ tamen inventoris laude, possidebit.

DE LA PRATIQUE

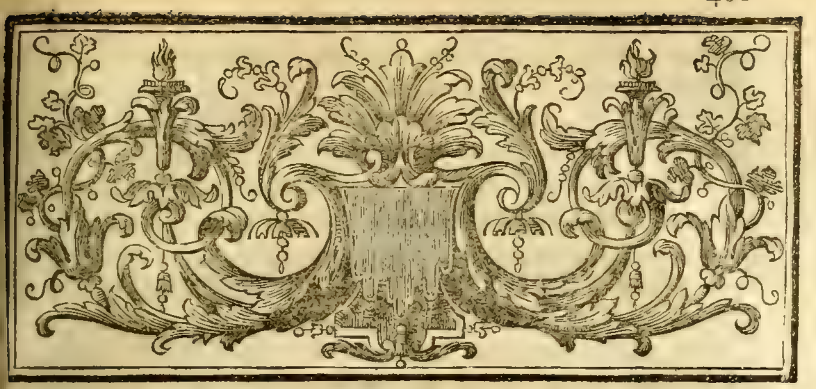
DES

GRANDS CADRANS

PAR LE CALCUL.

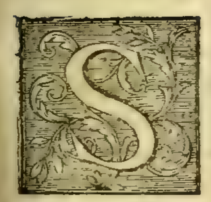
DE

DIVERS
OUVRAGES
DE
M. L'ABBÉ PICARD.



DE LA PRATIQUE DES GRANDS CADRANS PAR LE CALCUL.

Par M. Picard.



SI l'on voit peu de grands cadrans qui ſoient bons, cela vient autant de la difficulté qu'il y a de bien pratiquer en grand, & ſur un mur les regles vulgaires de la Gnomonique, que de l'ignorance de ceux qui ont, pour ainſi dire, avili cette curieuſe & utile partie des Mathematiques.

Mon deſſein n'eſt pas de parler contre les pratiques de Geometrie, ni de prendre à tâche de m'en paſſer entiérement; principalement lorſqu'elles ſont ſimples & ſans embaras de lignes : mais toutes choſes bien conſiderées, on demeurera d'accord que la meilleure ma-

niere pour bien réussir à la construction d'un grand cadran, est de le calculer ; ce qui se peut faire à loisir & commodément dans le cabinet.

C'est cette maniere que je me suis proposé d'expliquer à ceux qui ont déja quelque entrée dans la Gnomonique, & qui d'ailleurs sçavent la pratique des triangles sphériques & l'usage des logarithmes.

CHAPITRE PREMIER.

Des préparations.

JE suppose que l'endroit où l'on a dessein de faire un grand cadran soit bien plan, ensorte qu'une regle y convienne par tout & en tout sens. Ce n'est pas qu'on ne puisse faire des cadrans sur toutes sortes de surfaces, quoiqu'irrégulieres ; mais cela demande des pratiques particulieres, & souvent méchaniques.

On pourra commencer par un faux style qui sera de longueur à discretion & qui ne servira que pour connoître la position du plan à l'égard du ciel ; le plus long sera toûjours le meilleur, pourvû que son ombre puisse être terminée dans le plan : mais si on en veut mettre d'abord un qui soit pour demeurer, il sera bon d'avoir fait en petit sur le papier un dessein du cadran proposé ; & pour cet effet il suffira d'avoir sçû à peu près par la Boussole ou autrement la déclinaison du plan. Nous avons mis à la fin de ce Traité des Tables, où l'on trouvera tout ce qui est necessaire pour faire promptement un cadran vertical, supposé la déclinaison du plan.

Par le moyen de ce dessein ou modele, on connoîtra suffisamment la forme que l'on devra donner au cadran, & les heures que l'on y pourra ménager ; comme aussi le lieu & la hauteur convenable du style. Surquoi on peut remarquer en passant, que supposé deux

plans verticaux d'égale grandeur, mais de différente déclinaison; celui qui déclinera le plus demandera une plus grande longueur de ſtyle, ſuivant la raiſon des ſinus de complément des hauteurs du Pole ſur ces plans. La raiſon eſt, que par ce moyen le rayon équinoxial ſera d'une même longueur à tous.

La broche qui tiendra lieu de ſtyle ſera recourbée & de figure propre, pour faire que le point qui répond perpendiculairement à l'extrémité du ſtyle, & que nous appellerons ſimplement le pied du ſtyle, ſoit dégagé du pied de la broche. On prendra garde auſſi que le pied de cette broche n'embarraſſe pas la ligne ſouſtylaire. Tout cela ſe ſçaura aſſez bien par le petit deſſein que nous avons ſuppoſé.

Le ſtyle ſera terminé par une plaque ronde dont le bord ſera abattu pardeſſous tout au tour en chanfrain, afin que l'ombre ſoit toûjours cauſée par la ſurface ſupérieure de la plaque, au centre de laquelle il y aura un point frappé, qui puiſſe arrêter la pointe du compas. Le diamétre de cette plaque pourra être environ la 36me partie de la plus grande diſtance à laquelle l'ombre devra être portée.

On fera enſorte, en plantant la broche, que la plaque ſoit bien parallele au plan du cadran, ce qui ſe pourra faire facilement avec une équierre préſentée tout au tour; ou bien ſimplement par le moyen de l'ombre, qui lorſqu'elle ne ſera pas beaucoup éloignée du pied du ſtyle, devra être ronde. Je mets cette condition; car bien qu'il ſoit vrai qu'une plaque ronde conſiderée ſans épaiſſeur, & parallele à un plan, fit ſur le plan un ombre qui ſeroit toûjours ronde ſi le ſoleil n'étoit qu'un point; néanmoins à cauſe de la grandeur du diſque du ſoleil, ſi cette ombre eſt reçuë obliquement, elle ſe trouve étreſſie tout au tour par une infinité d'el-

lipſes de lumiere, dont les grands diamétres tendent vers le ſoleil, & ſont tous paralleles entr'eux; deſorte que cette ombre ne peut demeurer ronde que tandis que les ellipſes de lumiere peuvent paſſer pour des cercles.

De l'ombre qu'une plaque ronde expoſée au ſoleil fait ſur un plan parallele à la plaque.

SI une plaque que je conſidere ſans épaiſſeur eſt parallele à un plan, l'ombre du ſoleil reçû ſur ce plan, à quelque obliquité que ce fût, ſeroit ſemblable & ſenſiblement égale à la plaque, ſi le ſoleil n'étoit qu'un point, à cauſe de la diſtance du ſoleil preſque infinie. Mais pour comprendre ce qui doit arriver à l'ombre d'une plaque ronde, à cauſe de la grandeur du diſque entier du ſoleil, il faut conſiderer qu'au lieu que le rayonnement du centre du ſoleil par le contour d'une plaque ronde parallele à un plan, enfermeroit toûjours ſur le plan un cercle d'ombre égal à la plaque; au lieu de cela, dis-je, le rayonnement du diſque entier du ſoleil, au travers du centre de la plaque, étant reçû obliquement ſur le plan terminant, y feroit une ellipſe de lumiere; car il ſe feroit alors deux cônes de lumiere droits, & oppoſez l'un à l'autre, ayant leur ſommet commun au centre de la plaque, & dont l'un auroit ſa baſe droite dans le ſoleil, & l'autre ſeroit coupé obliquement par le plan terminant.

Nous appellerons cercle du milieu celui que l'on s'imagine fait du rayonnement du centre du ſoleil par le contour de la plaque; comme auſſi ellipſe du milieu celle que nous avons imaginée faite par le rayonnement du diſque entier du ſoleil au travers du centre de la plaque.

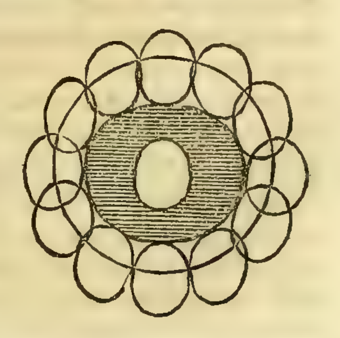
Cela ſuppoſé, il faut s'imaginer. 1°. Que le cercle

d'ombre, tel qu'il ſeroit ſi le ſoleil n'étoit qu'un point, eſt diminué par une infinité d'ellipſes de lumiere faites du rayonnement de tout le diſque du ſoleil au travers de chacun des points de la circonférence de la plaque, leſquelles ellipſes nous appellerons laterales.

2°. Que tous les grands diamétres des ellipſes laterales ſont paralleles & égaux à celui de l'ellipſe du milieu; car il faut s'imaginer des cônes égaux, dont les axes qui ſont des rayons venans du centre du ſoleil, ſont tous paralleles, & par conſéquent également inclinez au plan terminant qui les coupe tous à une égale diſtance de leur ſommet.

3°. Que dans toutes les ellipſes le point qui repréſente le centre du ſoleil, & auquel aboutit l'axe du rayonnement n'eſt pas le centre de l'ellipſe; mais coupe inégalement le grand diamétre en raiſon des côtez du cône, ou des ſecantes des hauteurs des deux bords ſupérieurs & inférieurs du ſoleil conſideré à l'égard du plan terminant, ou en raiſon réciproque des ſinus des mêmes hauteurs.

4°. Que ces mêmes points qui repréſentent le centre du ſoleil dans les ellipſes laterales, ſont tous rangez dans la circonférence du cercle du milieu; parce que les mêmes rayons qui viennent du centre du ſoleil, & qui paſſant par le contour de la plaque vont aboutir à la circonférence du cercle du milieu, ſont auſſi les axes des cônes lateraux, d'où il s'enſuit que l'ombre eſt plus diminuée du côté du ſoleil qu'à la partie oppoſée, d'autant que la plus grande portion du grand diamétre



de chaque ellipſe laterale ſe trouve dans le cercle du côté du ſoleil, au lieu que de l'autre côté eſt la moindre : de ſorte que l'ombre eſt rétreſſie comme en ovale, mais plus d'un côté que d'autre, juſques à ce qu'elle ſe perde enfin à meſure que les ellipſes croiſſent, & cette maniere d'ovalle d'ombre ſera contrepoſée à l'égard des ellipſes de lumiere.

5°. Que de même qu'on s'eſt imaginé une infinité d'ellipſes de lumiere rangées à l'entour du cercle du milieu qui demeure toûjours égal à la plaque, on peût auſſi s'imaginer une infinité de cercles égaux à celui du milieu, qui auront leurs centres dans les bords de l'ellipſe du milieu, leſquels cercles ſeront faits par le rayonnement de chaque point du bord du diſque du ſoleil, par le contour entier de la plaque.

6°. Que ſi au lieu d'une plaque qui fait ombre, on conſidere un trou rond & parallele au plan terminant; il y aura une infinité de cercles de lumiere égaux au trou, qui venant du rayonnement de chaque point des bords du ſoleil par le trou tout entier, ont leurs centres dans les bords de l'ellipſe qui repréſente le ſoleil: ou bien on aura une infinité d'ellipſes de lumiere rangées dans la circonférence d'un cercle égal au trou, de la maniere que nous avons dit à la quatriéme remarque.



CHAPITRE II.

Des préparations.

PREMIER PROBLEME.

Trouver le pied du ſtyle.

AYEZ un grand compas à verge, dont les pointes ſoient recourbées en dedans : faites tenir une des pointes de ce compas appliquée au centre de la plaque du ſtyle, pendant qu'avec l'autre pointe vous décrirez ſur le mur ou ſur le plan du cadran un cercle qui ſoit le plus grand qu'il ſe pourra commodément. Le centre de ce cercle ſera le pied du ſtyle requis.

On trouve communément le centre d'un cercle par trois points pris dans ſa circonférence ; mais la pratique la plus expeditive, ſera d'ouvrir premierement le compas de la grandeur du diamétre entier du cercle, puis l'ayant tranſportée ſur une échelle de parties égales, en prendre la moitié pour ſervir à trouver le centre requis.

Il faut prendre garde en traçant le cercle, de ne pas faire plier le compas, & ſuppoſé que le plan ſur lequel on travaille ſoit bien dreſſé, on ſera aſſuré que l'on aura bien fait, ſi la hauteur du ſtyle, le demi-diamétre du cercle, & la premiere ouverture du compas qui a ſervi à décrire le cercle, ſont les trois côtez d'un triangle rectangle, ce qui ſe connoîtra facilement par les quarrez, en poſant pour ſon hypotenuſe l'ouverture du compas qu'on a priſe d'abord. On voit par là qu'il auroit ſuffi d'avoir deux de ces grandeurs pour en conclure la troiſiéme ; joint que ſi la premiere ouverture du compas pour

décrire le cercle, a été faite exprès de 1000 parties, & que le demi-diamétre du cercle se soit trouvé, par exemple, de 643 parties, lequel nombre cherché dans les Tables des sinus est celui de 40 degrez 1 minute ; son sinus de complément 766 sera la hauteur du style. Il est vrai que dans les Tables le sinus de 40 d 1 m est 7658754 ; mais à cause que les quatre figures que j'ai retranchées valent la fraction $\frac{8754}{10000}$, qui approche de l'entier, j'ai dû prendre le nombre 766 au lieu de 765.

On doit aussi retrancher les quatre dernieres figures des nombres naturels des sinus, des tangentes & des secantes, lorsque l'on fait le rayon de 1000 parties, ou de quatre figures seulement, parce que dans les Tables il est ordinairement de huit figures. Mais à l'égard des logarithmes, parce qu'ils sont faits comme si le rayon étoit de onze figures, il s'ensuit que lorsqu'on voudra faire le rayon de 1000 parties, il faudra déprimer de sept unitez la caractéristique des logarithmes des sinus & des tangentes ; quoique leurs nombres naturels n'ayent été déprimez que de quatre figures, ce qui soit dit seulement en passant pour servir d'avertissement.

Définition.

LA *ligne verticale* est la section d'un plan perpendiculaire au plan du cadran, & qui passe par le centre de la plaque du style, ou bien par son pied, ce qui est la même chose.

SECOND

SECOND PROBLEME.

Trouver la ligne verticale.

SUSPENDEZ un plomb au centre de la plaque du ſtyle, ou bien au côté d'une petite équerre dreſſée ſur le pied du ſtyle, puis bornoyant par le pied du ſtyle, marquez ſur le mur un autre point qui ſoit caché ſous le fil du plomb : la ligne tirée par le pied du ſtyle, & par le point que vous aurez marqué, ſera la verticale que l'on cherche.

REMARQUE.

ON pourra encore trouver cette verticale par le moyen d'une ligne horizontale ou de niveau tracée ſur le mur en quel endroit on voudra ; car la ligne que l'on menera par le pied du ſtyle, & perpendiculaire ſur cette ligne horizontale, ſera la verticale que l'on cherche.

TROISIE'ME PROBLEME.

Trouver l'inclinaiſon du mur, ou du plan du Cadran à l'égard de l'horizon.

CETTE opération ſe ſera par le moyen de l'inſtrument qu'on appelle *Inclinatoire* ou *Réclinatoire*, qui aura pour cet effet quelques degrez & leurs minutes marquées ſur un petit limbe qui doit être au bas : mais au défaut de cet inſtrument, & principalement lorſqu'il ne fait point de vent, on pourra ſe ſervir d'un plomb & d'une grande régle, obſervant de combien ſur certaine hauteur de la regle le plomb s'éloigne ou s'appro-

che du plan du cadran, en appliquant un des côtez de la regle contre le mur sur la verticale, le plomb étant attaché au haut de cette régle. Si le plomb s'approche plus du mur par le bas que par le haut, le mur sera en talus; au contraire, s'il s'éloigne plus du mur par le bas que par le haut; le mur sera surplombé.

On trouvera l'angle de l'inclinaison du mur à l'égard de l'horison, c'est-à-dire, l'angle que le mur fait avec le vertical, si l'on fait comme la longueur du fil du plomb sur la régle, à la difference d'entre les deux distances perpendiculaires au mur, depuis les extrémitez du fil du plomb sur la régle; ainsi le rayon ou sinus total au sinus de l'angle de l'inclinaison.

CHAPITRE III.

Des observations pour un grand cadran.

POUR être assuré de réussir à faire un bon cadran, il ne faut point épargner les observations. Car quoique dans la theorie, comme on verra ci-après, un point d'ombre observé soit suffisant pour trouver ce qui est necessaire pour sa construction; on ne doit pas pour cela negliger dans la pratique d'en observer plusieurs pour operer avec plus d'exactitude. Il ne faut pas aussi prétendre se passer des choses que l'on peut sçavoir d'ailleurs, comme de la hauteur du pole du lieu où l'on est, & de la déclinaison du soleil : elles sont si faciles à sçavoir, que nous les supposerons toûjours connuës lorsqu'on pourra s'en servir, puisque l'on ne sçauroit avoir trop de choses données.

Il faut premierement considerer que les cadrans qui sont faits autour de la terre font aussi bien leur effet, que si l'extrémité du style étoit posée à son centre, &

que dans un même lieu on peut faire servir toute sorte de cadrans. De plus, on doit aussi considerer tout plan comme un horizontal pour quelque lieu de la terre, puisqu'en effet, il est toûjours parallele à quelque horison; de sorte qu'il a son zenith, son méridien, & sa hauteur de pole particuliere. D'où il est facile de voir que si le le méridien du plan convient avec celui du lieu, un cadran sur ce plan se fera tout simplement à la maniere d'un horizontal pour une certaine hauteur de pole. Mais si les méridiens sont differens, les heures du plan seront aussi differentes de celles du lieu, & il sera necessaire d'en faire la réduction; tout de même que si étant sous un méridien different de celui de Paris, on vouloit avoir un cadran horizontal qui montrât les heures de Paris, c'est-à-dire, les heures, comme on les compte à Paris dans le même temps.

PREMIER PROBLEME.

Trouver par observation la ligne soustylaire.

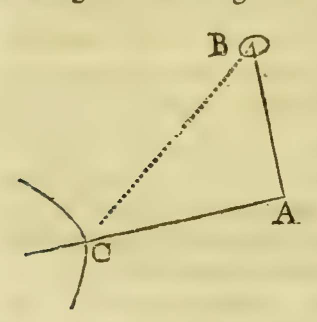
La ligne qu'on appelle soustylaire est proprement la ligne méridienne du plan du cadran. Marquez plusieurs points d'ombre correspondans devant & après la soustylaire, comme on fait ordinairement pour trouver la ligne méridienne sur un plan horizontal. Car comme je suppose que l'on sçache à peu près l'heure à laquelle l'ombre devra être aux environs de la soustylaire; on sçaura assez les temps convenables pour les observations devant & après. Cette pratique hors les solstices a besoin de quelque correction que nous donnerons à la fin de ce Traité.

SECOND PROBLEME.

Trouver par obſervations la hauteur du pole ſur le plan.

DE même qu'on trouve la hauteur du pole d'un lieu par la hauteur méridienne du ſoleil, ſuppoſé ſa déclinaiſon ; on trouve auſſi la hauteur du pole ſur le plan, par l'obſervation de l'ombre la plus courte & la plus proche du pied du ſtyle. Pour cet effet il faut dans un même jour, avoir marqué aſſez de points d'ombre aux environs de la ſouſtylaire pour être aſſuré que celui de la plus courte ombre y eſt compris. La plus petite diſtance entre le pied du ſtyle & la trace d'ombre obſervée, ſera ce que j'appelle la plus courte ombre.

Maintenant il faut faire comme la hauteur du ſtyle AB eſt à la plus courte ombre AC, ainſi le rayon eſt à la tangente de l'angle ABC, qui eſt la diſtance entre le ſoleil dans le méridien du plan & le zenith du plan. De ſorte que ſi le plan regarde vers le midy, il faudra ôter la déclinaiſon ſeptentrionale, ou bien ajoûter la méridionale, pour avoir la diſtance entre le zenith du plan & l'équinoxial, laquelle diſtance eſt égale à la hauteur du pole. Mais ſi le plan regarde le Septentrion, il faudra ôter la déclinaiſon méridionale, ou bien ajoûter la ſeptentrionale à l'angle ABC pour avoir la hauteur de pole du plan.



REMARQUE.

IL *faut entendre par ces mots de* plan qui regarde le midy, *que c'est lorsque la soustylaire depuis le pied du style jusqu'à la trace de l'ombre, tend vers le midy; & au contraire, par les mots de* plan qui regarde le Septentrion.

Il faut aussi remarquer que lorsque le zenith est entre le lieu du soleil & l'équateur, il faut ôter l'angle ABC à la déclinaison méridionale ou l'ajoûter à la septentrionale, de même qu'il est marqué ci-dessus, pour ôter ou ajoûter la déclinaison à l'angle ABC. Par exemple, si le plan regarde le Septentrion, c'est-à-dire, si la soustylaire depuis le pied du style jusqu'à la plus courte ombre, tend vers le Septentrion, & que le zenith soit entre l'équateur & le lieu du soleil, il faudra ôter l'angle ABC à la déclinaison méridionale pour avoir la hauteur du pole; & au contraire, l'ajoûter à la déclinaison septentrionale.

A l'égard de la plus courte ombre, qui sera quelquefois acourcie par la réfraction, il y aura quelque correction à faire dont nous parlerons à la fin.

LEMME.

Mesurer sur un plan un angle donné, ou bien en faire un de telle grandeur qu'on voudra.

DE la pointe de l'angle, comme centre, & de l'intervale de 1000 parties, décrivez un arc & prenez-en la corde; la moitié de cette corde cherchée dans les Tables des sinus, sera le sinus de la moitié de l'angle requis; comme si la corde est 518, dont la moitié est

259., l'angle sera de 30 d, 2 m. Car ayant cherché dans les Tables le nombre 259 dans la colomne des sinus, on trouve l'angle qui lui répond de 15 d, 1 m, en supposant toûjours le rayon de 1000 parties.

Suivant cette pratique on fera facilement un angle droit en prenant une corde de 1414 parties ; ce qui sera commode pour les perpendiculaires.

REMARQUE.

Monsieur Picard suppose que l'on a toûjours une régle divisée en parties égale, desquelles on se sert dans toutes les opérations qu'il faut faire pour déterminer quelque longueur ; & que 1000 *de ces parties valent le rayon.*

TROISIE'ME PROBLEME.

Deux points d'ombre étant donnez par observation, trouver la hauteur du pole sur le plan & la ligne soustylaire, supposé la déclinaison du soleil.

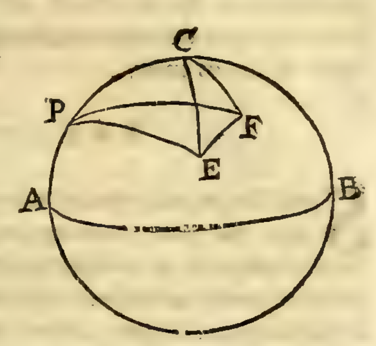
IL faut premierement mesurer les distances entre chaque point d'ombre observé, & le pied du style, dont je suppose la hauteur connuë ; & par ce moyen trouver la distance entre le soleil & le zenith du plan pour chaque point d'ombre.

Il faut ensuite mesurer l'angle enfermé entre les deux lignes que l'on doit avoir menées du pied du style aux deux points d'ombre.

Cela supposé, la solution de ce probleme est la même que quand on cherche la hauteur du pole du lieu, & la ligne méridienne par le moyen de deux hauteurs de soleil & de l'angle compris entre les deux azimuths qui passoient par le soleil au temps de l'observation des

points d'ombre. Voici l'explication de l'opération qu'il faut faire.

AB est sur la sphere un horison parallele au plan du cadran. C est son zenith. P le pole élevé sur le plan; & par conséquent APCD sera le cercle meridien de ce même horison. CE, CF sont les distances du zenith jusqu'aux lieux du soleil en E & F dans les observations des points d'ombre; & l'angle ECF est celui qui est compris par les deux lignes d'ombre, qui représentent les azimuths du plan CE, CF.



Au triangle spherique ECF, on connoît les deux côtez CE, CF & l'angle ECF qu'ils comprennent; c'est pourquoi on trouvera par les régles de Trigonometrie la valeur du côté EF, & l'angle EFC. Ensuite au triangle PEF, supposé la déclinaison du soleil, les côtez PE, PF seront connus, EF vient d'être trouvé dans le triangle CEF; on trouvera donc aussi l'angle EFP, qui étant ôté de EFC connu, il restera l'angle PFC. Mais les côtez PF, FC sont donnez; c'est pourquoi dans le triangle PFC, les deux côtez & l'angle compris étant connus, on trouvera le côté opposé qui est l'arc PC du méridien compris entre le zenith & le pole, qui est le complément de la hauteur du pole sur le plan. On trouvera aussi dans le même triangle, l'angle PCF ou son supplément à deux droits FCB, qui est l'angle que doit faire la soustylaire avec la ligne d'ombre, dont le point a été marqué lorsque le soleil étoit en F. On aura donc par ce moyen la position de la soustylaire sur le plan & la hauteur du pole.

Ce probleme comprend les deux premiers ; mais quand il ne seroit pas embarrassé de calculs, il ne s'en faut servir qu'au besoin : car c'est de même que si l'on vouloit trouver la hauteur de pole d'un lieu autrement que par les hauteurs méridiennes ; & la ligne méridienne autrement que par des observations correspondantes faites devant & après midy.

REMARQUES.

SUR le premier article de ce probleme, on doit remarquer que pour trouver la distance en degrez entre le zenith du plan & le lieu du soleil au temps où l'on a marqué les points d'ombre, il faut résoudre un triangle rectangle & rectiligne, dont l'un des côtez autour de l'angle droit est la hauteur du style, & l'autre est la longueur de l'ombre ; car l'angle qu'on trouvera opposé à ce dernier côté sera l'arc de l'azimut, comme CE ou CF compris entre le zenith C & le lieu du soleil E ou F au temps où l'on a marqué les points d'ombre.

Sur le second article, pour mesurer l'angle compris entre les deux lignes d'ombre, il le faut faire par le moyen d'un Rapporteur sur le plan, ou bien par la Trigonometrie rectiligne, ayant mesuré exactement la longueur des deux lignes d'ombre & la distance entre les deux points d'ombre : car par le moyen des trois côtez connus dans le triangle rectiligne on trouvera l'angle opposé au côté entre les deux points d'ombre, qui est celui de la sphere marqué ECF.

Sur le dernier article, il faut remarquer que sur un très-grand nombre de plans, on ne sçauroit trouver la soustylaire par observation ni la plus courte ombre ; c'est pourquoi on est très-souvent obligé de se servir de ce probleme.

QUATRIE'ME

QUATRIE'ME PROBLEME.

La ligne soustylaire & un point d'ombre étant donnez ; trouver la hauteur du pole sur le plan, supposé qu'on sçache la déclinaison du soleil.

IL faut avoir mesuré l'angle que la ligne menée du pied du style au point d'ombre, fait avec la soustylaire ; comme aussi la distance entre le zenith du plan & le soleil, supposé, la hauteur du style & la longueur de l'ombre, comme au troisiéme probleme.

Cela supposé, soit dans la figure précedente du probleme troisiéme, le lieu du soleil au point F sur la sphére. Par les choses qu'on suppose connuës, on aura dans le triangle sphérique CPF les côtez CF, PF & l'angle azimuthal FCP ; c'est pourquoi on trouvera PC qui sera le complément de la hauteur du pole sur le plan.

REMARQUES.

LA déclinaison du soleil doit être connuë au temps où l'on a marqué le point d'ombre, comme dans toutes les opérations où l'on se sert de la déclinaison du soleil, à cause qu'elle change continuellement.

On remarquera aussi, comme on a fait dans le probleme précedent, que pour mesurer l'angle que fait la soustylaire avec la ligne de l'ombre menée du pied du style jusqu'au point d'ombre, il faut se servir du Rapporteur, ou bien de la Trigonometrie rectiligne, en prenant un point où l'on voudra sur la soustylaire duquel on menera une ligne jusqu'au point d'ombre ; car par la mesure on connoîtra les trois côtez de ce triangle, d'où l'on viendra à la connoissance de l'angle que l'on cherche.

Pour la distance entre le zenith du plan & le lieu du soleil au temps où l'on a marqué le point d'ombre, on se servira de ce que j'ai dit dans la remarque sur le premier article du troisiéme probleme.

CINQUIE'ME PROBLEME.

La hauteur du pole sur le plan, un point d'ombre, & la déclinaison du soleil étant donnez, trouver l'angle que fait la soustylaire avec la ligne de l'ombre.

CETTE proposition est la converse de la précedente. Car par l'hypothese les trois côtez du triangle CPF étant donnez, on trouvera l'angle PCF ou FCB que la soustylaire fait avec la ligne de l'ombre donnée.

REMARQUES.

PAr la hauteur du pole donnée on aura son complément, qui sera l'arc CP : la longueur de l'ombre depuis le pied du style jusqu'au point d'ombre servira à trouver l'arc azimuthal CF, comme j'ai dit dans la premiere remarque sur le troisiéme probleme; & la déclinaison du soleil étant ajoûtée ou ôtée à 90 degrez, donnera l'arc PF.

Il faut ôter la déclinaison boréale à 90 degrez, & ajoûter la méridionale, si P est le pole boréal; mais au contraire, il faudra ajoûter la boréale & ôter la méridionale si P est le pole austral.

Définitions.

I. LA déclinaison d'un plan est proprement l'angle que la section de ce plan & de l'horison du lieu fait avec la ligne du levant & du couchant équinoxial : mais c'est

aussi l'angle qui se fait au zenith du lieu entre son méridien & un vertical, qui joint le zenith du lieu avec le zenith du plan, & qui pour ce sujet sera appellé vertical commun, dont la section sur le plan, est la ligne verticale.

II. Plan oriental ou occidental, est celui qui décline vers l'orient ou vers l'occident, & dont le zenith est dans la partie orientale ou occidentale de la sphére, laquelle est partagée en deux hemisphéres par le méridien du lieu.

III. Plan méridional ou septentrional, est celui dont le zenith est dans la partie méridionale ou septentrionale de la sphére, laquelle est partagée en deux hemisphéres par l'équateur. Le pole méridional est élevé au-dessus des plans méridionaux, & le pole septentrional est élevé au-dessus des plans septentrionaux.

SIXIÉME PROBLEME.

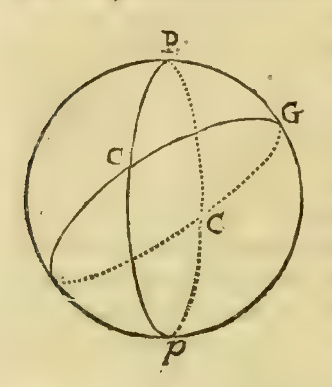
L'angle de la soustylaire avec la verticale, la hauteur du pole du lieu, & l'inclinaison du plan, s'il y en a, étant donnez; trouver la hauteur du pole sur le plan, la difference des meridiens & la declinaison du plan.

P est le pole septentrional, G le zenith du lieu; donc PGp le méridien du lieu, qui partage le globe en deux hemisphéres, l'un oriental qu'il faut imaginer en devant, & l'autre occidental en arriere dans la partie opposée. C est le zenith du plan : PC une partie du méridien du plan, & GC le vertical commun.

Au triangle PGC le côté PG est le complément de la hauteur du pole du lieu que je suppose septentrional. PC étant moindre que 90^{d} sera aussi le complément de la hauteur du pole du plan, lequel sera septentrional :

mais PC étant plus grand que 90 d, ſon ſupplément à deux droits ſera la hauteur du pole méridional du plan.

GC eſt la diſtance entre le zenith du lieu & celui du plan, laquelle eſt de 90 d ſi le plan eſt vertical ou à plomb : mais elle ſera moindre que 90 d ſi le plan eſt en talus ; & enfin elle ſera plus grande que 90 d s'il eſt panché en devant ou ſurplombé ; enſorte que le défaut ou l'excès à l'égard de 90 d, eſt égal à l'inclinaiſon du plan. Cela ſe comprendra facilement en conſiderant que le zenith d'un plan, qui eſt en talus, eſt élevé ſur l'horiſon du lieu ; mais ſi le plan eſt ſurplombé, ſon zenith eſt abaiſſé au-deſſous de l'horiſon.



Au triangle GPC, les côtez GP, GC c'eſt à ſçavoir le complément de la hauteur du pole du lieu, & le complément de l'inclinaiſon du plan, ſont donnez par l'hypothéſe, auſſi que bien l'angle GCP, qui eſt égal à celui que la ſouſtylaire fait avec la verticale : on connoîtra donc toutes les autres parties de ce même triangle ; c'eſt à ſçavoir CP complément de la hauteur du pole ſur le plan, GPC la difference des méridiens, & CGP la déclinaiſon du plan ou ſon ſuplément. Surquoi il faut remarquer que pour trouver la difference des méridiens, l'angle PCG de la ſouſtylaire avec la verticale étant donné, il ne faut qu'une ſimple proportion. Car comme le ſinus de complément de la hauteur de pole du lieu, eſt au ſinus de complément de l'inclinaiſon du plan, s'il y en a, ou au rayon, ſi le plan eſt à plomb ou vertical ; ainſi le ſinus de l'angle que fait la ſouſtylaire avec la verticale, au ſinus de la difference des méridiens.

REMARQUE.

J'Ai trouvé à propos d'ajoûter à ce probleme & aux suivans, quelques exemples pour les rendre plus faciles. Soit donc l'angle de la soustylaire avec la verticale de 30 d, 25 m, *lequel angle est compris sur la sphere par les arcs de cercle CP, CG. La hauteur du pole du lieu soit comme à Paris,* 48 d, 50 m; *& par consequent l'arc PG, qui est compris entre le pole & le zenith, sera le complement de cette hauteur* 41 d, 10 m. *Supposons aussi que le plan du cadran ou le mur sur lequel on doit faire le cadran soit incliné en talus, c'est-à dire panché en arriere par le haut, & que cette inclinaison soit de* 5 d, *dont le complement* 85 d, *est marqué sur la sphere par l'arc de cercle CG. Ces trois choses étant données, on trouvera par la Trigonometrie sperique le trois autres parties de ce même triangle; à sçavoir l'arc CP de* 54 d, 52 m, 35 f, *qui sera le complement de la hauteur du pole sur le plan du cadran; & par consequent la hauteur du pole sur ce plan sera de* 35 d, 7 m 25 f. *On aura par ce moyen le centre du cadran, qui est l'endroit où l'axe rencontre la soustylaire, ce qui se peut trouver par la resolution d'un triangle rectiligne & rectangle dont l'un des côtez autour de l'angle droit, est la hauteur du style, & l'angle complement de la hauteur du pole qu'on a trouvé est opposé à la distance, depuis le pied du style jusqu'au centre du cadran, qui est l'autre côté de ce triangle autour de l'angle droit & lequel on cherche. L'angle CPG qui est la difference entre les meridiens, se trouvera de* 50 d, 0 m, 50 f, *ce qui peut servir à determiner la rencontre de la meridienne du lieu avec l'équateur. Enfin l'angle PGC sera de* 38 d, 58 m, 55 f, *qui est la déclinaison du plan: cette déclinaison se prend sur l'horison depuis la verticale, qui rencontre toûjours la ligne horisontale du plan à angles droits.*

SEPTIE'ME PROBLEME.

La plus courte ombre ou la hauteur du pole sur le plan ; la hauteur du pole du lieu, & l'inclinaison du plan étant donnez ; trouver la soustylaire, la difference des meridiens, & la declinaison du plan.

LEs mêmes choses étant exposées que dans le probleme précedent, on aura les trois côtez donnez dans le triangle G C P ; c'est pourquoi on trouvera les angles, qui est ce que l'on cherche.

Il faut remarquer que la précedente détermination par la position de la soustylaire donnée, est préferable à celle-ci, lorsque le plan décline peu ; parce qu'alors pour beaucoup de changement à l'angle soustylaire, il en arrive peu à la hauteur du pole sur le plan : mais quand la déclinaison est grande, c'est tout le contraire.

Remarquez aussi que dans la pratique ce probleme & le précedent, sont toûjours préferables au quatriéme & au cinquiéme.

REMARQUES.

IL prend ici la plus courte ombre ou la hauteur de pole sur le plan comme une même chose ; cependant pour déterminer la hauteur du pole sur le plan du cadran par la plus courte ombre, il faut necessairement connoître la déclinaison du soleil, comme on l'a enseigné dans le second probleme de ce chapitre.

Dans le triangle CPG l'arc CP est le complement de la hauteur du pole sur le plan ; c'est pourquoi si la hauteur du pole sur le plan est donnée, il en faudra prendre le complement pour avoir l'arc CP de ce triangle. La hauteur du pole du lieu étant aussi donnée, on en doit prendre le com-

plement pour former l'arc PG ; & enfin l'inclinaison du plan étant donnée, on aura aussi l'arc du vertical commun compris entre les deux zeniths, C & G, lequel arc CG est le complement de cette inclinaison.

EXEMPLE.

SOit *comme ci-devant la hauteur du pole du lieu de* 48 d, 50 m, *pour Paris ; l'arc PG qui est son complement sera donc de* 41 d, 10 m. *Soit la hauteur du pole sur le plan de* 32 d, 10 m, *dont le complement qui est l'arc CP sera* 57 d, 50 m. *Enfin soit l'inclinaison du mur* 15 d, 20 m, *dont le complement est l'arc CG de* 74 d, 40 m, *on trouvera par la Trigonometrie, que l'angle PCG, qui est celui que la soustylaire fait avec la verticale, est de* 41 d, 26 m, 15 s; *l'angle CPG, qui est la difference entre les meridiens, est de* 75 d, 50 m, 30 s; *& l'angle PGC qui est la déclinaison du plan, est de* 58 d, 19 m, 45 s.

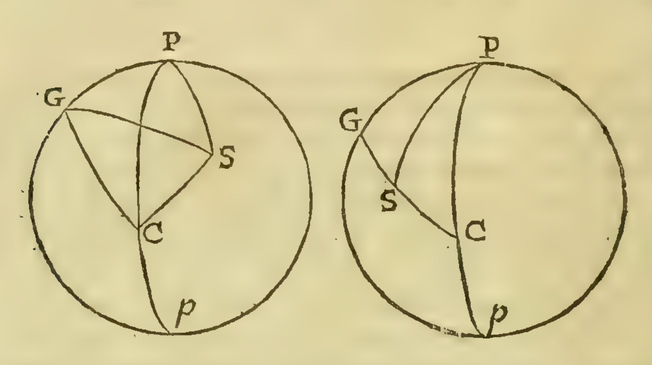
HUITIE'ME PROBLEME.

Un point d'ombre, la déclinaison du soleil, la hauteur du pole du lieu, & l'inclinaison du plan étant donnez, trouver la hauteur du pole sur le plan.

IL faut premierement par la longueur de l'ombre & par la hauteur du style trouver la distance, entre le centre du soleil & le zenith du plan, comme aussi l'angle que la ligne de l'ombre fait avec la verticale. Cela supposé.

Soit dans la figure du sixiéme probleme, les arcs SC, SG, les distances entre le soleil, S & les zeniths C & G; & soit aussi SP, la distance entre le soleil & le pole boréal.

Soit pour le premier cas l'arc CS séparé d'avec l'arc CG. Au triangle GCS les côtez CG, CS sont donnez aussi bien que l'angle GCS, qui est celui que la ligne d'ombre fait avec la verticale; on connoîtra donc SG & l'angle CSG. Mais au triangle GSP les trois côtez étant



connus on trouvera l'angle GSP. Mais CSG est connu; c'est pourquoi on aura l'angle CSP. Puis enfin au triangle CSP, les côtez CS, SP, & l'angle CSP étant connus, on trouvera CP, qui est la distance entre le pole boréal & le zenith du plan.

Pour le second cas, si S est sur l'arc CG, comme il arrivera, lorsque le point d'ombre observé sera dans la verticale; ayant ôté CS de CG, il restera SG. Puis au triangle SPG, les trois côtez étant connus, on trouvera l'angle GSP supplément de PSC. Enfin au triangle PSC, l'angle PSC & les côtez PS, CS étant connus, on trouvera CP.

REMARQUES.

ON demande dans ce probleme quatre choses, quoique dans un triangle, il suffise d'en avoir trois pour sa resolution : mais il faut remarquer que ces quatre choses, sont

sont employées dans la resolution de differens triangles.

On trouvera la distance entre le centre du soleil & le zenith du plan, suivant la remarque que j'ai faite, sur le premier article du troisiéme probleme.

Pour l'angle qui est compris par la ligne de l'ombre, c'est-à-dire par la ligne, qui va du pied du style au point d'ombre, & par la verticale, lequel par consequent a son sommet au pied du style puisque ces deux lignes passent par le pied du style, on en prendra la grandeur ou avec le Rapporteur, ou par le moyen d'un autre ligne tirée du point d'ombre à quelque point de la verticale, laquelle on mesurera, & dont on formera un triangle rectiligne, dans lequel on connoîtra les trois côtez; & l'angle opposé au côté pris à volonté, sera l'angle qu'on cherche.

Lorsqu'on dit ici, soit dans la figure du sixiéme probleme les arcs, *&c. c'est-à dire, que les arcs marquez ici GP, GC, CP soient les mêmes que ceux que l'on a marquez des mêmes lettres, dans la figure du sixiéme probleme. GP sera donc le complement de la hauteur du pole du lieu; CG sera le complement de l'inclinaison du plan, ou l'arc entre le zenith du lieu, & le zenith du plan; enfin CP sera le complement de la hauteur du pole sur le plan.*

De plus, comme le point S est le centre du soleil, au triangle GCS, puisque l'arc CG représente la verticale, l'arc CS représentera la ligne de l'ombre; & l'angle GCS sera égal à l'angle compris par la verticale & par la ligne de l'ombre, puisque le point C, qui est le zenith, est dans la ligne du style élevée perpendiculairement au-dessus du pied du style, & que les plans des cercles CS, CG s'entrecoupent dans cette même ligne: car sans cela l'angle sperique ne seroit pas égal au rectiligne.

EXEMPLE.

Soit dans le triangle GCS l'arc GC donné, comme ci-devant, de 74 d, 40 m, *& l'arc CS de* 35 d, 8 m, *qui est l'arc compris entre le zenith du plan, & le soleil S; & enfin l'angle GCS de* 59 d, 33 m. *Ces trois parties du triangle GCS étant données, on trouvera par la Trigonometrie, le côté GS de* 60 d, 9 m, 50 f; *& l'angle CSG sera de* 106 d, 34 m, 40 f.

Maintenant dans le triangle GSP les trois côtez sont connus, à sçavoir SG que l'on vient de trouver de 60 d, 9 m 50 f: *mais le côté SP étant la distance entre le soleil & le pole, on le connoîtra en ajoûtant ou en ôtant la déclinaison au quart de cercle, suivant la nature de la déclinaison, comme on l'a expliqué dans la remarque sur le second probleme de ce chapitre. Soit donc SP de* 80 d, 17 m, *& GP étant comme dans le probleme précedent, de* 41 d, 10 m, *on trouvera l'angle GSP de* 38 d, 32 m, 0 f.

Enfin au triangle CSP on a le côté CS, comme ci-dessus de 35 d, 8 m, *le côté SP de* 80 d, 17 m, *& l'angle CSP de* 145 d, 6 m, 40 f, *qui est la somme dans cet exemple des deux angles CSG, GSP. On trouvera le côté CP de* 109 d, 6 m, 4 f, *qui sera la distance entre le zenith du plan & le pole boreal, pourvû que l'on ait pris l'arc SP, par rapport au pole boreal.*

Pour le second cas, le calcul en est facile, après avoir entendu celui que je viens de faire; il est même un peu plus simple, puisqu'on n'y employe que la resolution de deux triangles, & qu'il y en a trois dans le précedent. Si l'on vouloit réduire cette operation à ce cas, il faudroit marquer par observation, sur la ligne verticale, le point d'ombre dont on se sert.

NEUVIE'ME PROBLEME.

Les mêmes choses que dans le huitiéme probleme, étant données; trouver la declinaison du plan.

DANS les figures précedentes, au triangle GCS on connoîtra GS, & l'angle CGS. Puis au triangle SGP, les trois côtez étant connus, on trouvera l'angle SGP. Mais CGS est connu; on aura donc CGP, ou son supplément CG*p*, qui est la déclinaison du plan.

REMARQUES.

Supposons les angles & les côtez donnez dans les triangles, dont il faut faire la resolution, de la même grandeur que dans l'exemple précedent.

On a déja résolu le triangle GCS, & l'on a trouvé le côté GS de 60 d, 9 m, 50 s, *l'on trouvera aussi dans ce même triangle, l'angle CGS de* 34 d, 53 m, 2 s. *Ensuite, au triangle, GSP, les trois côtez étant connus, comme ci-devant, on trouvera l'angle SGP de* 111 d, 5 m, 0 s, *qui étant joint à l'angle CGS de* 34 d, 53 m, 2 s, *fera l'angle CGP de* 145 d, 58 m, 2 s; *ou son supplement* 34 d, 1 m, 58 s, *qui est l'angle de la declinaison du plan, c'est-à-dire, l'angle que le vertical du plan fait avec le meridien du lieu.*

Dans tous ces calculs des triangles, il faut toûjours bien prendre garde à prendre les supplemens des arcs & des angles qu'on trouve, quand ce qui est donné le demande; car par le calcul on n'a seulement que les angles aigus, comme dans l'exemple ci-dessus, où l'angle CSG se trouve par le calcul de 73 d, 25 m, 20 s, *il faut prendre son supplement de* 106 d, 34 m, 40 s. *On a aussi trouvé le côté CP de* 70 d, 53 m, 56 s; *cependant il faut prendre son supplement* 109 d, 6 m, 4 s.

DIXIE'ME PROBLEME.

Par l'obſervation du ſoleil, qui eſt faite lorſqu'il raſe le plan, trouver la declinaiſon du plan, ſuppoſé que l'on ſçache la declinaiſon du ſoleil, la hauteur du pole du lieu, & l'inclinaiſon du plan.

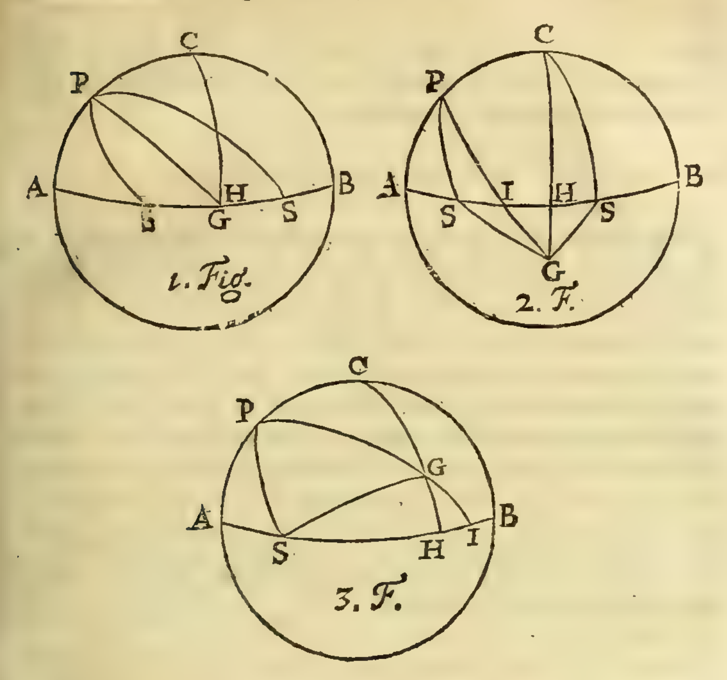
POUR connoître par obſervation, quand le ſoleil raſe le plan, c'eſt-à-dire, quand le ſoleil eſt dans le plan du cadran, il faut avoir une grande regle, ſur le plat de laquelle il y ait deux pinnules dreſſées aux deux bouts, dont l'une ſoit percée au centre, pour laiſſer paſſer les rayons du ſoleil, & l'autre ait un cercle décrit à l'entour du centre, pour recevoir l'image du ſoleil.

Cette regle ainſi préparée ſera appliquée de plat contre le plan, & pointée continuellement vers ſoleil, juſqu'à ce que l'image du ſoleil tombe juſtement dans le cercle de la pinnule; ce qui étant arrivé, & la regle demeurant ferme dans ſa poſition, on tracera une ligne qui repréſentera le rayon du ſoleil pour le moment auquel il aura raſé le plan, ſuppoſé que le côté de la regle ſoit bien parallele à la ligne des centres des pinnules.

Enſuite de cette obſervation on meſurera l'angle que la ligne tracée ſur le plan fera avec la verticale. Cela ſuppoſé, ſoit ſur la ſphére AB un horizon parallele au plan du cadran, & C ſon zenith; P le pole élevé ſur le plan; G le zenith du lieu, qui ſera ou dans l'horizon AB, ou au-deſſus, ou au-deſſous; S le centre du ſoleil ſur l'horizon A B; H l'interſection du même horizon A B avec le vertical commun C G prolongé ou retranché.

SH étant la meſure de l'angle obſervé, ſi d'ailleurs SG & SH conviennent, comme dans la premiere figu-

re, les trois côtez du triangle SPG étant connus, on connoîtra l'angle SGP, dont le complement PGC sera la déclinaison du plan, laquelle on doit trouver.



Mais si le zenith G est au-dessous ou au-dessus de l'horison AB, comme dans les deux autres figures; au triangle rectangle SGH, l'inclinaison GH, & l'autre côté SH étant donnez, on connoîtra l'hypotenuse SG, & l'angle oblique SGH. Puis au triangle SGP dont les trois côtez seront connus, on trouvera l'angle SGP. Mais SGH est connu; on aura donc PGC qui est celui que l'on cherche.

Remarquez que sans avoir tracé aucune ligne sur le

plan, si l'on a sçû par quelque moyen que ce soit, l'heure & le moment auquel le soleil a rasé le plan; cela dis-je supposé, au triangle SPG les côtez SP, PG, & l'angle horaire SPG étant connus, on connoîtra SG & l'angle SGP. Puis au triangle rectangle SGH, connoissant l'hypotenuse SG & le côté GH, on connoîtra SGH, & le reste, comme au premier cas.

REMARQUES.

ON dit que SH est la mesure de l'angle observé, c'est-à-dire, de l'angle fait par la verticale, dont le cercle est le vertical CGH, & par la ligne du rayon du soleil, lorsqu'il rase le plan. Cet angle doit être consideré comme ayant son sommet au pied du style, par lequel point passe la verticale, & par lequel aussi on peut supposer que passe le rayon du soleil, puisqu'il n'a point de lieu determiné sur le plan. Alors ces deux lignes sur le plan du cadran, représenteront les sections du plan horizontal du cadran, & des deux cercles verticaux, dont l'un passe par le zenith du lieu, & l'autre par le centre du soleil, lorsqu'il est dans le plan du cadran.

EXEMPLES.

POur le premier cas où le plan du cadran n'a point d'inclinaison; ou ce qui est la même chose, lorsque le zenith du lieu est dans le plan du cadran; soit la distance SG entre le zenith du lieu & le lieu du soleil, qui est l'angle observé de 46 d, 7 m, 10 s; *& par la declinaison du soleil on connoîtra l'arc SP, qui est la distance entre le pole P & le lieu du soleil S, au temps de l'observation de* 77 d, 3 m, 20 s. *Enfin par le complement de la hauteur du pole du lieu, on a l'arc PG d'un meridien entre le pole, &*

le zenith du lieu, lequel soit de 41 d, 10 m. *Ces trois côtez étant connus dans le triangle SPG, on trouvera l'angle SGP de* 128 d, 52 m, 40 s.

Pour le second cas où le zenith est au-dessus ou au-dessous de l'horizon, c'est-à-dire, lorsque le mur est incliné; dans le triangle rectangle SGH, dont l'arc SH de l'horizon soit donné comme ci-devant de 46 d, 7 m, 10 s, *l'arc SH étant compris entre le lieu du soleil S, au temps où il rase le plan, & le vertical commun CG, qui est toûjours perpendiculaire sur l'horizon. Mais l'arc GH est mesuré par l'inclinaison du plan, laquelle soit de* 3 d, 10 m, 30 s; *on trouvera donc l'hypotenuse SG de* 46 d, 12 m, 14 s, *qui est la distance entre le zenith du lieu, & le centre du soleil, au temps de l'observation du soleil dans le plan. On trouvera aussi l'angle SGH de* 86 d, 57 m, 5 s.

Ensuite au triangle SGP dont on connoît les trois côtez, à sçavoir SG de 46 d, 12 m, 14 s, *PG comme ci-devant, de* 41 d, 10 m, *& PS aussi de* 77 d, 3 m, 20 s, *on trouvera l'angle SGP de* 128 d, 41 m, 20 s. *Mais si dans la seconde figure on ôte de cet angle SGP l'angle SGH, il restera l'angle PGC de* 41 d, 44 m, 15 s; *& dans le troisiéme figure, si l'on ajoûte ces deux angles ensemble, on aura l'angle total HGP de* 215 d, 38 m, 25 s, *dont le supplement à quatre droits PGC sera de* 144 d, 21 m, 35 s. *Cet angle PGC est celui qui est fait par la verticale commune représentée par CG, & par la meridienne du lieu, qui est le meridien PG : cet angle doit être fait sur l'horizon du lieu, sur lequel se mesure la declinaison du plan.*

Pour ce qui est de la remarque, dont il est parlé à la fin de ce probleme, je n'en donnerai point d'exemple; car comme il est très-difficile de sçavoir l'heure qu'il est au temps de l'observation, cette regle devient presqu'inutile.

ONZIE'ME PROBLEME.

La declinaison du plan étant donnée, trouver la hauteur du pole sur le plan, la ligne soustylaire, la difference des meridiens, supposé la hauteur du pole du lieu, & l'inclinaison du plan.

Voyez la Figure de la page 500.

SOIT dans la figure du sixiéme probleme le triangle CGP dont les côtez GC, GP, & l'angle qu'ils renferment sont donnez, on connoîtra le troisiéme côté & les angles requis.

EXEMPLE.

S*oit PG le complement de la hauteur de pole du lieu de* 41 d, 10 m; *GC qui est la distance entre les zeniths, & par consequent le complement de l'inclination du plan, soit de* 81 d, 19 m, 30 s; *& soit l'angle CGP la declinaison du plan de* 35 d, 15 m, 10 s, *on trouvera le côté CP qui est le complement de la hauteur du pole sur le plan de* 49 d, 50 m, 23 s; *l'angle PCG sera celui que doit faire la soustylaire representée par l'arc CP & par la verticale commune representée par l'arc CG : ces deux lignes s'entrecoupant au pied du style, feront un angle de* 29 d, 48 m, 40 s. *Enfin l'angle CPG, qui est la difference des meridiens, sera de* 48 d, 17 m, 45 s. *Cet angle CPG n'est point marqué sur le plan du cadran par des lignes; mais c'est celui qui est fait à la pointe du style, sur le plan de l'équateur par deux rayons, dont l'un va à la soustylaire, & l'autre à la meridienne.*

DOUZIE'ME

DOUZIE'ME PROBLEME.

La declinaison du plan, & son inclinaison étant données; trouver l'obliquité de ligne meridienne.

DANS les deux dernieres figures du dixiéme probleme, soit I la rencontre de l'horizon AB, avec PG retranché ou prolongé. Au triangle rectangle GHI, le côté GH est l'inclinaison du plan, & l'angle IGH sa déclinaison, lesquelles sont données. On connoîtra donc le côté HI, qui est la mesure de l'obliquité de la meridienne requise. Car comme le rayon est au sinus de l'inclinaison du plan, ainsi la tangente de la déclinaison du plan, est à la tangente de l'obliquité requise.

Ce probleme ne sera point necessaire dans la suite: mais il pourra servir à ceux qui voudroient tracer une ligne meridienne par un point observé.

REMARQUES.

ON ne propose ici que deux choses connuës; car le triangle qu'il faut résoudre est rectangle; & l'obliquité de la ligne meridienne que l'on cherche, est l'angle que fait la ligne meridienne avec la verticale.

Pour ce qui est de la position de la ligne meridienne par le moyen d'un point d'ombre observé, il faut auparavant connoître la declinaison du plan par le neuviéme probleme: car pour l'inclinaison elle est employée dans la solution de ce même probleme; c'est pourquoi elle sera aussi connuë.

TREIZIE'ME PROBLEME.

La difference des meridiens étant donnée, trouver l'heure de la souſtylaire.

LA difference des meridiens eſt la diſtance horaire entre le midy du lieu & l'heure de la souſtylaire, qui eſt le midy du plan. De ſorte que ſi le plan eſt occidental, la difference des meridiens convertie en temps donne l'heure de la ſouſtylaire, à compter depuis midy; mais ſi le plan eſt oriental, il faut ôter de 12 heures la difference des meridiens, & prendre le reſte qui ſe comptera depuis minuit.

EXEMPLES.

SI la difference des meridiens, eſt de 30 degrez ou de deux heures, & que ce ſoit vers l'occident; la ſouſtylaire ſera à deux heures du ſoir: mais ſi la même difference eſt orientale, la ſouſtylaire ſera à 10 heures du matin. Ou bien ſi la difference des meridiens eſt de 150 degrez, ou de 10 heures, & que ce ſoit vers l'occident, la ſouſtylaire ſera à 10 heures du ſoir; mais ſi la même difference eſt orientale, la ſouſtylaire tombera ſur deux heures du matin.

QUATORZIE'ME PROBLEME.

La hauteur du pole étant donnée, trouver la moitié du plus grand jour.

IL faut faire comme le rayon eſt à la tangente de 23^{d}, 29^{m}, qui eſt l'obliquité de l'écliptique; ainſi la tangente de la hauteur de pole eſt au ſinus de l'excès

de la moitié du plus grand jour pardessus six heures.

EXEMPLE.

LA plus grande obliquité de l'écliptique ayant été trouvée de 23 d, 29 m, si l'on donne la hauteur du pole du lieu de 48 d, 50 m, on trouvera par la regle, que le sinus de l'excès du plus grand jour pardessus six heures est de 29 d, 47 m, 37 s, ce qui se reduit à 1 heure, 59 m, 47 s; donc la moitié du plus grand jour sera de 7 heures, 59 m, 47 s.

QUINZIE'ME PROBLEME.

Déterminer les heures qui doivent être marquées, sur un plan donné.

ON sçait qu'à l'égard d'un plan horizontal, le plus grand jour du lieu détermine le nombre des heures qui doivent être marquées sur ce plan; & il en seroit de même de tout autre plan consideré comme horizontal, si l'horizon du lieu n'y faisoit point d'empêchement.

PRATIQUE.

Pour les plans septentrionaux dans un lieu septentrional, & pour les plans meridionaux dans un lieu meridional.

IL faut sçavoir l'heure de la soustylaire, & la moitié du plus grand jour, tant du lieu que de l'horizon du plan consideré sans empêchement.

Si de l'heure de la soustylaite on ôte la moitié du plus grand jour du plan, on aura l'heure du lever du soleil à l'égard de l'horison du plan. Si au contraire l'on ajoûte la moitié du plus grand jour du plan à l'heure de la

soustylaire, on aura l'heure du coucher du soleil à l'égard du même horizon du plan consideré sans empêchement : mais ensuite il faudra voir si aux heures trouvées le soleil sera sur l'horison du lieu ; ce qui sera facile, supposé que l'on sçache l'heure du lever & du coucher du soleil au plus grand jour du lieu.

EXEMPLE.

SOIT à Paris un plan septentrional dont la moitié du plus grand jour soit de sept heures, & dont la soustylaire soit à dix heures du soir. Ayant ôté 7 de 10, je trouve qu'aux plus grands jours le soleil doit commencer le soir à éclairer le plan à trois heures ; & parce qu'à Paris le soleil est alors sur l'horison, je dis que la premiere heure du soir, qui devra être marquée sur ce plan, sera celle de 3 heures.

Puis ajoûtant 7 heures à 10 heures du soir, je trouve encore que le soleil finira d'éclairer le plan à 5 heures du matin ; & parce qu'à Paris au plus grand jour, le soleil est sous l'horison depuis 8 heures du soir jusqu'à 4 heures du matin, il faudra que toutes les heures d'entre deux soient retranchées du cadran, sur lequel par consequent on pourra marquer les heures depuis les 4 heures du matin jusqu'à 5 heures, & depuis trois heures du soir jusqu'à 8 heures.

Suivant cette pratique il y aura des cadrans, qui n'auront point d'heures le matin, & d'autres qui n'en auront point le soir, ce que le calcul fera voir.

L'exemple que nous venons de donner est pour un cadran septentrional dont la soustylaire tombe à une des heures de nuit, parce que c'est le cas le plus ordinaire ; ce qui n'empêche pas qu'il ne puisse y avoir un plan, dont la soustylaire tombe par exemple à 10 heures du

matin, mais qui ſera tellement incliné vers le nord, que ſa hauteur du pole ſera ſeptentrional, & qui par conſéquent ſera ſeptentrional. Un tel plan, ſuppoſé que la moitié de ſon plus grand jour fût de 7 heures, devroit être éclairé en Eſté depuis 3 heures du matin juſqu'à 5 du ſoir : mais parce qu'à Paris le ſoleil ne ſe leve qu'à 4 heures, il faudroit retrancher la premiere heure du matin.

PRATIQUE.

Pour les plans meridionaux dans un lieu ſeptentrional, ou au contraire.

IL faut trouver l'heure à laquelle le ſoleil ſe leve ou ſe couche à l'égard du plan propoſé, ce qui ſuppoſe la hauteur du pole du lieu, & la déclinaiſon du plan. On fera donc, comme le rayon eſt au ſinus de la hauteur du pole du lieu : ainſi la tangente de la déclinaiſon du plan eſt à la tangente d'un arc qu'il faudra ôter de 90 degrez ou de ſix heures, ſi le plan eſt oriental ; ou bien qu'il faudra ajoûter à ſix heures, ſi le plan eſt occidental. L'heure ainſi trouvée ſera la premiere, ou la derniere qu'il faudra marquer ſur le plan.

La raiſon de cette pratique eſt que par ce moyen on détermine l'heure à laquelle le ſoleil commence plûtôt, ou finit plus tard à éclairer le plan, ce qui arrive lorſqu'il ſe leve ou qu'il ſe couche dans l'interſection des deux horizons ; car quand les jours ſont plus longs à l'égard de l'horizon du plan, c'eſt alors qu'ils ſont davantage accourcis par l'horizon du lieu, & quand les jours du plan ſont le plus dégagez de l'horizon du lieu, c'eſt alors qu'ils ſont plus courts à l'égard du plan. De ſorte que le milieu ſe trouve dans l'interſection des deux, & que ces ſortes de cadrans n'ont jamais plus de douze heures.

On peut auſſi ſe ſervir d'un cadran horizontal, en

obſervant les lignes horaires qui rencontreront la ligne du plan. Mais cette maniere n'eſt pas univerſelle, & ne peut valoir pour les plans ſeptentrionaux, lorſqu'ils ont des heures du matin & du ſoir, & que l'heure de la ſouſtylaire eſt de nuit. J'entens les ſeptentrionaux dans un lieu ſeptentrional; & il en ſeroit de même des méridionaux dans un lieu méridional: car le cadran horizontal déterminera bien la premiere heure du matin, & la derniere du ſoir; mais il n'en ſera pas de même à l'égard de la derniere du matin, & de la premiere du ſoir qui dépendront du plus grand jour du plan.

CHAPITRE IV.

Du calcul des heures aſtronomiques.

TROUVEZ premierement l'heure de la ſouſtylaire par le treiziéme probleme, puis faites une liſte de toutes les heures que vous voulez avoir, la partageant à l'endroit où vous ſçavez que doit être la ſouſtylaire, que nous avons marquée S, avec un zéro au-deſſous.

Premier cas.

SI l'heure de la ſouſtylaire convient juſtement avec une des diviſions horaires, ſoit heure entiere ou demi-heure, ſoit même un quart d'heure, ſuppoſé qu'on les voulût, avoir; il n'y aura autre choſe à faire, qu'à écrire ſous chaque diviſion horaire ſa diſtance équinoxiale à l'égard de la ſouſtylaire, de même que vous feriez à l'égard de 12 heures dans un cadran qui ne déclineroit point.

PREMIER EXEMPLE.

Pour un cadran meridional & oriental, dont la difference est de 22 d, 30 m, & duquel par consequent, la soustylaire est à 10 heures & demie du matin.

								Midy.		
	½	IX.	½	X.	½	XI.	½	XII.	½	I.
Angles.	30 0	22 30	15 0	7 30	S	7 30	15 0	22 30	30 0	37 30
Tangentes.	577	414	268	132	0	132	268	414	577	767

SECOND EXEMPLE.

Pour un cadran meridional occidental, dont la soustylaire est à une heure & demie après midy.

	XI.	½	XII.	½	I.	½	II.	½	III.
Angles.	37 30	30 0	22 30	15 0	7 30	S	7 30	15 0	22 30
Tangentes.	767	577	414	268	132	0	132	268	414

ON voit que les distances horaires étant les mêmes de part & d'autre de la soustylaire, il suffiroit de les avoir écrites d'un côté seulement.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Pour un cadran septentrional oriental, dont la difference des meridiens est de 157 d, 30 m, & duquel par consequent, la soustylaire tombe sur une heure & demie du matin.

	Soir.		Septentrional Oriental.					Matin.
	VII.	1/2	VIII.	I. 1/2	IV.	1/2	V.	1/2
Angles.	97 30	90 0	82 30	S	37 30	45 0	52 30	60 0
Tangentes.	7596	Infin.	7596	0	767	1000	1303	1732

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Pour un cadran septentrional occidental, dont la soustylaire tombe à dix heures & demie du soir.

						Septentrional Occidental.			
	VI.	1/2	VII.	1/2	VIII.	X. 1/2	IV.	1/2	V.
Angles.	67 30	60 0	52 30	45 0	37 30	S	82 30	90 0	97 30
Tangentes.	2414	1732	1303	1000	767	0	7596	Infin.	7596

CEs sortes de cadrans septentrionaux sont renversez, ayant les heures du soir à gauche, & celles du matin à droit. Ils ont d'ailleurs plusieurs heures supprimées, lesquelles il faut supposer dans le calcul : comme par exemple, pour 8 heures du soir, si la soustylaire est

à 1 heure $\frac{1}{2}$ après minuit, l'intervale est de 5 heures $\frac{1}{2}$, qui étant réduit en degrez, est de 82^{d}, 30^{m}. Et pour 4 heures du matin, parce que l'intervale est de 2 heures $\frac{1}{2}$, j'écris 37^{d}, 30^{m}, c'est le contraire pour le cadran occidental, à cause que la soustylaire est devant minuit.

Il ne peut pas y avoir de difficulté à l'égard des autres heures; car on voit qu'elles se suivent avec un continuel accroissement de 7^{d}, 30^{m}, que l'on suppose ici de demi-heures en demi-heures.

REMARQUES.

Monsieur Picard passe au calcul des heures astronomiques, après avoir enseigné plusieurs élemens pour les cadrans. Mais il faudroit qu'il eût expliqué la maniere de tracer la ligne équinoxiale, avant que d'enseigner la pratique de ce calcul, puisqu'on ne le peut faire sans sa position; ce qu'il ne fait qu'à la fin de ce chapitre.

On peut trouver par le même calcul dont on s'est servi dans les problemes précedens, le point où la soustylaire doit être coupée par la ligne équinoxiale qui fait toûjours avec elle des angles droits.

La hauteur du pole sur le plan du cadran étant trouvée, on fera comme le sinus de cette hauteur de pole est à la hauteur du style, ainsi le sinus du complement de la même hauteur de pole, est à la distance entre le pied du style, & le point de la ligne équinoxiale sur la soustylaire. Ce point étant déterminé, on menera la ligne équinoxiale, qui coupera la soustylaire à angles droits dans ce même point.

Tout le calcul que M. Picard propose ici pour les distances horaires sur la ligne équinoxiale depuis sa rencontre avec la soustylaire, est fondé sur la distance qu'il y a entre la pointe du style, & cette même rencontre; laquelle distance est le rayon, & les distances horaires sont des tangentes par rapport

à ce rayon. Il faudra donc avoir divisé une ligne droite égale à cette distance en 1000 *parties, desquelles on se servira pour prendre les distances horaires sur la ligne équinoxiale depuis la rencontre de la soustylaire. Mais si l'on veut seulement connoître toutes ces distances horaires sur la ligne équinoxiale depuis la soustylaire, en mêmes parties que celles de la hauteur du style que l'on a supposée dès le commencement divisée en* 1000 *parties ; il faudra premierement trouver la distance entre la pointe du style & la rencontre de la ligne équinoxiale avec la soustylaire, en mêmes parties que celles de la hauteur du style, ce que l'on fera par cette analogie.*

Comme le sinus de complement de la hauteur du pole sur le plan du cadran est à 1000 *parties, qui est la hauteur du style ; ainsi le rayon est au nombre des mêmes parties de la hauteur du style, qui est la distance que l'on cherche, que l'on peut appeller* Rayon équinoxial.

Mais si l'on se sert de la longueur de ce rayon équinoxial, il faudra trouver les distances horaires sur la ligne équinoxiale par des analogies séparées, en faisant comme le rayon des Tables est au rayon équinoxial que l'on a trouvé, ainsi la tangente de l'angle de la distance entre l'heure de la soustylaire & l'heure que l'on cherche, à la distance équinoxiale de cette même heure depuis la soustylaire ; c'est-à-dire depuis la rencontre de la soustylaire sur l'équinoxiale jusqu'au point où cette même heure coupe l'équinoxiale. Et par consequent il faudra faire autant de calculs separez, qu'il y aura d'heures à poser sur l'équinoxiale ; mais aussi on aura l'avantage de se servir toûjours des mêmes parties, dont on s'est servi pour tout le calcul du cadran.

Les tangentes qui sont dans les exemples que l'on a donnez ici, sont celles des Tables, supposant le rayon équinoxial de 1000 *parties seulement.*

Lorsque l'angle depuis la soustylaire jusqu'à l'heure que l'on veut marquer sur l'équinoxiale est de 90^{d}, *la tangente*

est infinie ; & en ce cas la ligne horaire est parallele à la ligne équinoxiale. Mais lorsqu'on veut marquer des heures au delà de 90 d, comme dans le troisiéme & quatriéme exemple ci-dessus 97 d, 30 m, alors on doit se servir des tangentes de supplement de ces angles, & porter les grandeurs trouvées sur la ligne équinoxiale de l'autre côté de la soustylaire ; mais l'heure que l'on tracera par ce point & par le centre du cadran, sera prolongée au-delà du centre du cadran vers le lieu où elle doit suivre les autres.

Second cas.

MAIS si l'heure de la soustylaire ne convient justement avec aucune division horaire, il faut chercher premierement les distances horaires entre la soustylaire & les deux plus proches heures, puis faire les autres par une addition continuelle, de même qu'aux exemples ci-dessus.

Soit la difference des meridiens de 19 d, 35 m, & par consequent, la soustylaire entre 10 heures ½ & 11 heures du matin.

Premierement, la distance entre 10 heures ½ & midy, est 22 d, 30 m ; ayant donc ôté 19 d, 35 m, je trouve 2 d, 55 m pour 10 heures ½.

Secondement, entre 11 heures & midy il y a 15 d que j'ôte de 19 d, 35 m, & il reste 4 d, 35 m pour 11 heures.

Cela supposé, si à 2 d, 55 m j'ajoûte 7 d, 30 m, la somme sera 10 d, 25 m pour 10 heures ; & ainsi de suite de ce côté-là. Pareillement, si à 4 d 35 m j'ajoûte 7 d, 30 m la somme sera 12 d, 5 m pour 11 heures ½ & ainsi de suite en ajoûtant toûjours 7 d, 30 m pour chaque demi-heure.

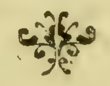
Sur quoi vous remarquerez, que si vous avez bien fait, la difference des meridiens se trouvera pour midy, ce qui pourroit donner lieu à une nouvelle maniere de calcul, que le Lecteur trouvera facilement.

Cadran Méridional Oriental.

							Midy.	
	$\frac{1}{2}$	X.	$\frac{1}{2}$	19 35	XI.	$\frac{1}{2}$	XII.	$\frac{1}{2}$
			22 30	S	19 35			
			19 35		15 0			
Angles.	17 55	10 25	2 55	0	4 35	12 5	19 35	27 5
Tangentes.	323	184	51	0	80	214	356	511

Cadran Méridional Occidental.

			Midy.						
	XI.	$\frac{1}{2}$	XII.	$\frac{1}{2}$	I.	19 35	$\frac{1}{2}$	II.	$\frac{1}{2}$
					19 35	S	22 30		
					15 0		19 35		
Angles.	34 35	27 5	19 35	12 5	4 35	0	2 55	10 25	17 55
Tangentes.	689	511	356	214	80	0	51	184	323



Cadran Septentrional Oriental.

	Soir.					Matin.		
	VII.	1/2	VIII.	1 h, 18 m, 20 ſ.	IV.	1/2	V.	1/2
			60 0	19 35	60 0			
			19 35	S	19 35			
Angles.	94 35	87 5	79 35	0	40 25	47 55	55 25	62 5
Tangentes.	12474	19627	5440	0	852	1107	1450	1956

Cadran Septentrional Occidental.

	1/2	VII.	1/2	VIII.	10 h, 41 m, 40 ſ.	IV.	1/2	V.
				60 0	19 35	60 0		
				19 35	S	19 35		
Angles.	62 55	55 25	47 55	40 25	0	79 35	87 5	94 35
Tangentes.	1956	1450	1107	852	0	5440	19627	12474

AUx deux derniers exemples la difference des méridiens eſt effectivement de 160 ^{d}, 25 ^{m}; mais pour la facilité du calcul (ce qui ſe devra toûjours pratiquer lorſqu'il y aura plus de 90 ^{d}) nous avons ôté les 160 ^{d}, 25 ^{m}, de 180 ^{d}, & nous avons pris le reſte, ſçavoir, 19 ^{d}, 35 ^{m}, pour la difference entre le midy du plan & le minuit du lieu. Le reſte s'entendra aſſez après ce que nous avons dit ci-deſſus aux premiers exemples.

Nous avons ſeulement expoſé les cas auſquels les cadrans méridionaux ont la difference des méridiens moindre que 90 ^{d}, & les ſeptentrionaux plus grande que 90 ^{d}; parce que c'eſt ce qui arrive le plus ordinairement, comme nous avons déja remarqué au treiziéme probleme du chapitre précedent.

Or aprés avoir trouvé les diſtances équinoxiales pour toutes les heures à l'égard de la ſouſtylaire, il en faudra prendre les tangentes dans les Tables, comme vous voyez qu'on a fait dans les exemples précedens. Ces tangentes ſerviront enſuite à trouver les points horaires dans la ligne équinoxiale ; & ſi quelque diſtance horaire eſt préciſement de 90 ^{d}, la ligne de cette heure-là ſera parallele à l'équinoxiale : mais s'il s'en trouve quelqu'une plus grande que 90 ^{d}, la ligne de l'heure s'éloignera de l'équinoxiale ; & parce qu'elle ne peut s'éloigner d'un côté qu'elle ne s'approche de l'autre, vous trouverez ſon point de rencontre, en prenant la tangente du ſupplément de l'angle à 180 ^{d}; ce qu'il ſuffit d'avoir indiqué.

Voyez la Figure ſuivante.

Soit maintenant A le pied du ſtyle, AB ſa hauteur que je ſuppoſe connuë ; DC la ſouſtylaire trouvée par les problemes ci-deſſus, & menée par le point A. On cherche C le point de la ligne équinoxiale, & D le centre du cadran.

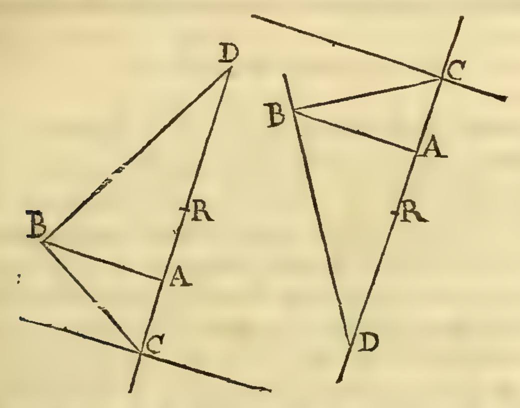
Pour cet effet, comme le ſinus du complément de la hauteur du pole ſur le plan eſt au rayon, ainſi AB connuë eſt à la longueur du rayon équinoxial BC, laquelle étant connuë ſera diviſée en 1000 parties pour ſervir d'échelle à tout le reſte du cadran.

Cela ſuppoſé, AC ſera le ſinus de la hauteur du pole ſur le plan, & CD la ſecante de ſon complément. Une ligne menée par le point C à angles droits à la ſouſtylaire ſera l'équinoxiale, dans laquelle on marquera les points horaires par le moyen des tangentes ci-deſſus trouvées.

REMARQUES.

J'Ai expliqué aſsez au long la pratique pour trouver la ligne équinoxiale à la fin du premier cas, ce qui pourra ſervir d'éclairciſſement à ce qui eſt dit ici un peu trop en abregé.

Pour la maniere de trouver le centre du cadran ſans ſe ſervir de la ſecante, on fera comme la tangente de la hauteur du pole ſur le plan eſt à la hauteur BA du ſtyle, ainſi le rayon



ſera à AD qui eſt la diſtance ſur la ſouſtylaire entre le pied du ſtyle A & le centre du cadran D, ce centre eſt le point où l'axe, qui paſſe par la pointe du ſtyle, doit rencontrer le plan.

On peut encore trouver la grandeur AD pour déterminer le centre du cadran D, en faiſant comme le rayon eſt à BA hauteur du ſtyle, que nous avons poſée de 1000 *parties; ainſi la tangente de complement de la hauteur du pole ſur le plan, à la grandeur de AD.*

La ſomme des grandeurs de AD, & AC ſera celle de CD *dont on ſe ſert dans la ſuite.*

Par le centre du cadran & par les points horaires trouvez sur la ligne équinoxiale on tirera les lignes des heures. On fera de même pour les demi-heures, & même pour les quarts-d'heures s'il y en a.

Mais si le centre du cadran est hors le plan, ou si l'on manque de quelques points horaires, il faudra prendre CR moitié de CD, dont on connoît la grandeur par le calcul, puis par le point R tirer une ligne parallele à la ligne équinoxiale, dans laquelle on trouvera de nouveaux points horaires en prenant la moitié de chaque intervale donné dans l'équinoxiale à commencer à la soustylaire.

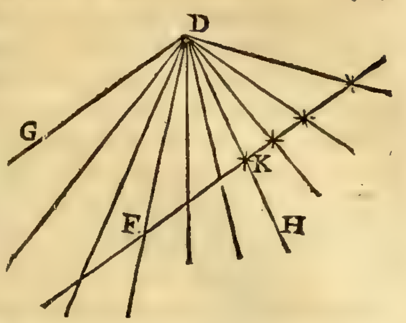
REMARQUES.

LE centre du cadran pourroit être si éloigné de la ligne équinoxiale, que pour avoir un point comme R sur la soustylaire, il faudroit prendre CR, comme la cinquiéme ou sixiéme ou huitiéme, ou même quelqu'autre partie beaucoup plus petite de la ligne CD mais alors pour marquer les heures sur cette seconde ligne équinoxiale, il faudroit ôter une même partie aux grandeurs des heures de la ligne équinoxiale pour les transporter sur cette seconde; comme si l'on prenoit CR de la dixiéme partie de CD, il faudroit seulement ôter à chaque intervale d'heure sur la ligne équinoxiale depuis la soustylaire une dixiéme partie, & transporter le reste sur la seconde ligne équinoxiale.

Mais enfin si la ligne CD se trouvoit infinie, on pourroit tracer cette seconde ligne équinoxiale par quel point on voudroit de la soustylaire & y transporter les mêmes grandeurs des heures de l'équinoxiale. Ensuite on joindra les points correspondans de ces deux équinoxiales, pour avoir les lignes des heures.

Il suffira même d'avoir six heures de suite pour trouver toutes les autres; car ayant pris dans la ligne du milieu

DF le point F à discretion, si par ce point on tire FK qui soit parallele à l'une des extrêmes DG, & qui coupe l'autre extrême DH en K; ayant mis une des pointes du compas au point K, on transportera sur FK prolongée au-delà de K les divisions qui sont au-deçà, & l'on aura la suite des heures requises de ce côte-là.



CHAPITRE V.

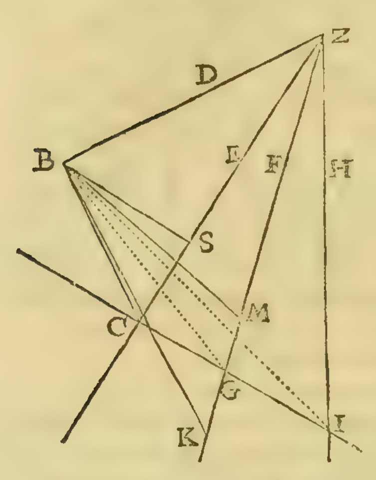
Du calcul des arcs des Signes.

ON cherche par ce calcul les points de rencontre des arcs des signes sur chaque ligne horaire, & sur les lignes des demi-heures pour une plus grande justesse; on tracera ensuite par tous les points trouvez les lignes des arcs des signes.

Soit l'axe BD, & EC la soustylaire, avec le rayon équinoxial BC & CGI la ligne équinoxiale. Soient aussi les lignes des heures FG, HI, &c.

B est la pointe du style, & le rayon équinoxial BC étant perpendiculaire sur la ligne équinoxiale CI, si l'on mene les lignes BG, BI, les triangles BCG, BCI, &c. seront rectangles; & dans chacun de ces triangles; on connoît par les calculs des chapitres précedens les côtez CG, CI, &c. & le côté BC qui est commun à tous. On sçait de plus, pour chaque ligne CG, CI, &c. quel est l'angle CBG, CBI, &c. c'est pourquoi dans ces mêmes triangles on trouvera les hypotenuses BG, BI, &c.

Par exemple, ſuppoſons que l'on ait trouvé le rayon équinoxial de 1185 parties de celles dont la hauteur du ſtyle BS eſt de 1000, & que l'angle CBG ſoit de 9 d, 15 m, on aura donc trouvé CG de 193 parties; & dans le triangle CBI, ſi l'angle CBI eſt pour l'heure ſuivante, il ſera de 24 d, 15 m; c'eſt pourquoi l'on trouvera CI de 534 parties, & dans ces mêmes triangles on trouvera BG de 1201 parties, & BI de 1300 parties, &c.



Mais la hauteur du pole ſur le plan a été trouvée de 32 d, 27 m, c'eſt pourquoi on a dû trouver la longueur de l'axe depuis la pointe du ſtyle juſqu'à la rencontre du plan de 1864 parties. Et ſoit le point Z la rencontre du plan & de l'axe BD, qui eſt le centre du cadran: il n'importe pas que ce centre Z ſoit ſur le plan ou hors le plan, pourvû qu'il y en ait un.

Il faut maintenant dans tous les triangles ZBC, ZBG, ZBI, &c. qui ſont rectangles en B, trouver les angles C, G, I, &c. L'angle C qui eſt ſur la ſouſtylaire ſera le complement de la hauteur du pole ſur le plan, qui ſera ici de 57 d, 33 m. Dans tous les autres triangles on fera comme ZB à BG, à BI, &c. ainſi le rayon ſera à la tangente de l'angle complement à l'angle G, I, &c. comme par les logarithmes.

Somme de BG & du rayon	13. 07940
Mais ZB eſt	3. 27038
Tangente de l'angle	9. 80902

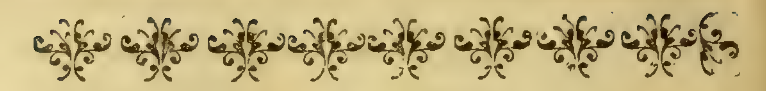
32^d, 47^m, complement de 57^d, 13^m, qui eſt l'angle cherché BGZ.

Somme de BI & du rayon	13. 11384
Mais ZB eſt	3. 27038
Tangente de l'angle	9. 84346

34^d, 53^m, complement de 55^d, 7^m, qui eſt l'angle cherché BIZ.

Ces angles étant connus on a auſſi leurs ſupplémens à deux droits, qui ſont les angles KGB, LIB, &c.

Maintenant pour trouver les points des ſignes, comme ſur la ligne horaire ZG pour les points M & K du premier ſigne au-deſſus & au-deſſous de la ligne équinoxiale ; on joindra la déclinaiſon de ce ſigne 11^d, 29^m, 34^f, avec l'angle ZGB & KGB, ce qui fera les deux ſommes 68^d, 42^m, 34^f, & 134^d, 16^m, 34^f, dont on prendra les ſupplémens à deux droits, qui ſeront 111^d, 17^m, 26^f, & 45^d, 43^m, 26^f. Enſuite on fera comme le ſinus de ces angles eſt au côté BG de 1201 parties; ainſi le ſinus de l'angle la déclinaiſon du ſigne 11^d, 29^m, 34^f, aux diſtances GM, GK depuis l'équinoxiale G juſqu'aux points des ſignes M & K. Ces diſtances ſeront 257 & 334 des mêmes parties de la hauteur du ſtyle qui ſervent dans tous ces calculs.



DE MENSURIS.

SUPPOSITO pede Parisino partium 720
Erit pes Rhinlandicus vel Leydensis, ex propria observatione, 696
Pertica Rhinlandica continet 12 pedes.
Londinensis ad me missus $675\frac{1}{2}$
Danus, ex propria observatione, $701\frac{8}{10}$
Ulna Danica continet duos pedes.
Dantiscanus, ex proportione cum Leydensi, lib. 1. Selenograph. Hevelii, 636
Lugdunensis Galliæ, ex observatione D. Auzout, $757\frac{2}{3}$
Bononiensis Italiæ, ex observatione ejusdem, 843
Bracchium Florentinum, ex eodem & Mersenno, 1290
Bracchium Florentinum dividitur in 20 solidos, solidus in 3 grossos.
Pes Suecus mihi traditus, $658\frac{1}{4}$
Pes Bruxellensis ad me missus $609\frac{3}{5}$
Amstelodamensis ex Leydensi juxta Snellium, 629
Palmus Romanus Architect. ex propria observatione & D. Auzout, $494\frac{1}{4}$
Canna Architect. continet Palmos 10.
Pes Romanus Capitolii ex propria observatione & D. Auzout, 653
vel $653\frac{1}{2}$
Melius ex Græco, 652

Numerus 652 pro pede Romano Capitolii exactè convenit cum pede Græco, qui ibidem prostat partium 679, juxta proportionem 24 ad 25. Sed quia ex Gravio pes

Anglus eſt ad Romanum ut 1000 ad 967, ſequitur Romanum eſſe 653 $\frac{1}{5}$ in eo ſtatu in quo eſt.

Pes Romanus Vilalpandi ex congio juxta Ricciolum, 665 $\frac{2}{15}$

Nam ex Ricciolo Romanus eſt ad Bononienſem ut 120 ad 152, vel 15 ad 19. Verum, ſi ex obſervatione D. Auzout, dictus congius Veſpaſiani, ſeu Farneſianus continet aquæ fontanæ Trevianæ uncias Pariſienſes 109, groſſos 3, grana 24; proindeque pes cubicus congii octuplus, ſit librarum 54, unciarum 11, groſſorum 2, & granorum 48, cum ex propria obſervatione pes cubicus Pariſienſis continet aquæ fontanæ libras 69, cum 9 unciis, 3 groſſis, 22 granis. Hinc ſuppoſitâ aquarum ſimilitudine, eſſet pes Romanus congialis ad Pariſienſem, ut 663 ad 720.

Si pes Romanus eſſet 664 $\frac{2}{3}$, erit ratio ut 13 ad 12, ſicut unciarum ratio.

Sed pes Romanus Statilii in Belvedere, 655 $\frac{1}{2}$

Pes Romanus qui in hortis Mattei, 657 $\frac{1}{2}$

Pes Romanus ex palmo, 658 $\frac{3}{4}$

Seu ferè & proximè, 659

Vide Plin. libro 7, capite 2, & Gheltaldum in Archim. promot. ubi palmus ſeu ſpithama per dodrantem indicatur.

Romæ in pavimento Panthei lapidum quadratorum latera Pariſienſes pedes 9 cum lineis 8 continent; quæ ſi Romanorum pedum 10 ſupponantur, erit pes Romanus, 653

Faſcia marmorea ejuſdem pavimenti lata ped. Pariſ. 2, cum lineis 8 $\frac{1}{2}$: quæ ſi fuerit 3 pedum Romanorum, erit pes Romanus, 650

Portæ ejuſdem Templi latitudo eſt pedum Pariſinorum 18, cum pollicibus 4 $\frac{3}{4}$; hinc ſi ſupponamus dictam Portam fuiſſe pedum Romanorum 20, erit pes Romanus 661 $\frac{1}{2}$

Nota ex Greaves Anglo, dictam portam esse pedum Londinensium 19 cum $\frac{602}{1000}$; unde sequeretur pedem Londinensem esse ad Parisinum, ut 674 $\frac{1}{3}$ ad 720, cum reverà sit ut 675 $\frac{1}{3}$ ad 720. Hinc arguitur, aut pedem Anglum mutatum fuisse, aut dictum Greaves usurpasse pedem Anglum justo minorem. Idem prorsus arguitur ex proportione Bracchii Florentini quam tradit.

Pyramidis Cestii basis latera pedes Parisinos habet 86 $\frac{1}{4}$. Sed si ea supponamus passuum Romanorum 19, aut pedum 95, erit pes Romanus 653 $\frac{1}{2}$.

In arcu Septimii Severi columnarum diameter prope basim est pedis Parisini 1, cum 4 poll. $\frac{1}{4}$; quod accedit ad latitudinem Fasciarum Porphyreticarum in pavimento Rotundæ seu Panthei; nempe 1 pedis cum pollicibus 4 $\frac{1}{3}$, pro sesquipede Romano.

Ex diametro Columnarum, erit pes Romanus. 650
Ex Fascia Porphyretica. 653 $\frac{1}{3}$

Longitudo penduli cujus vibrationes singulis temporis medii secundis absolvuntur, observata Parisiis, Uraniburgi, Lugduni, in monte Setio, & ad Pyrenæos montes inventa fuit 36 poll. 8. lin. $\frac{1}{2}$, seu pollicum 36 cum $\frac{71}{100}$ fere juxta pedem Parisiensem.

Longitudo penduli juxta varias mensuras.

Mensuræ variæ ad pedem Parisinum comparatæ.		*Pollices, seu unciæ.*	*Millesimæ partes pollicis.*
Pes Parisinus	720	36	cum 708
Rhinland.	696	37	974
Bononiensis	843	31	352
Palm.Rom.Arch.	994 $\frac{1}{4}$	53	472
Brach. Florent.	1290	20	480

Seu 1. brach. cum solidis 14. groff. 0 $\frac{44}{100}$.

Pes Rom. Capit.	653 ¼	40	459
	653 ½	40	443
	652	40	536
Ex Congio	665	39	744

Sit pollex Parisin. 40 ½, erit tunc pes Romanus partium earumdem 652 $\frac{6}{10}$.

Pes Anglus	675 ½	39	126

seu pollicum fere, & quam proxime 39 ⅛.

Hero Mechanicus in Isagoge.

Ο δὲ Ιταλικὸς πούς δακτύλους ἔχει τρεῖς ϗ δέκα ϗ τρίτον.

Hinc Salmasius in exercitationibus Plinianis, pag. 684, arguit pedem alium fuisse 16. digit. in urbe scilicet, alium in Italia digitorum 13 ⅓, sed malè; loquitur enim Hero de pede Romano expresso in digitis Alexandrinis. Constat enim ex eodem Herone Alexandrinum fuisse ad Romanum, ut 6 ad 5, seu ut 16 ad 13 ⅓.

Item Hyginus de limitibus constituendis: *In Germania*, inquit, *& in Tungris pes Drusianus habet monetalem & sescunciam.* Constat pedem Romanum in 12 uncias divisum hîc appellari monetalem. Unde si supponamus pedem Romanum 665, erit Drusianus 747, major scilicet Parisiensi, sed minor Lugdunensi. Sed si fuit pes Romanus 653, erit Drusianus 737 circiter.

Vide Greaves de pede Rom. pag. 6.

Ibidem loquens de Cyrene: *Pes eorum qui Ptolemaïcus appellatur, habet monetalem & semunciam*, seu ut 25 ad 34 quemadmodum Græcus ad Romanum, quod non convenit cum Herone, nisi dicamus pedem Cyrenensem minorem fuisse Alexandrino.

Item Hero Mechanicus in Isagoge.

MILLIARE, intellige Alexandrinum, ſtadia habet 7 ½. Pedes Philetereos, hoc eſt Alexandrinos ſeu Regios 4500, Italicos 5400. Hinc ſequitur ratio pedis Alexandrini ad Romanum ut 6 ad 5. Itemque ratio milliaris Alexandrini ad Italicum ut 5400 ad 5000. Nam Italicum fuit paſſuum 1000.

Nota Alhazenum dum tribuit terræ ambitui milliaria 24000, intelligendum de milliari Alexandrino.

Pro pede Arabico.

JUXTA Abulfedam 500 ſtadia, & quidem Alexandrina, ut ſuppono, æquivalent milliaribus 66 ⅔: ergo milliare Arabicum æquivalebit 7 ½ ſtadiis, ſicut & milliare Alexandrinum ex Herone ſupra citato: ergo milliare Arabicum æquale Alexandrino. Sed in milliari Alexandrino dantur pedes Alexandrini 4500, & in Arabico 6000 Arabici; eſt igitur ratio pedis Alexandrini ad Arabicum, ſeu pes Arabicus erit dodrantalis ſeu ſpithama, reſpectu Alexandrini, hoc eſt ut 4 ad 3.

In Ægypto ſingula latera majoris pyramidis ſunt pedum Anglicorum 693 ſeu Pariſienſium 650. Hinc Ægyptius ad Pariſienſem ut 13 ad 12.

Nota. Pariſiis anno 1668. facta eſt reformatio pedis latomorum, quorum ſexpeda veram excedebat lineis 5.

Ulna Pariſienſis, alia *des Merciers* continet pedes 3, pollices 7, lign. 10 ⅘; alia *des Drapiers* continet pedes 3 poll. 7 lin. 9 ⅗.

Prior æqualis eſt 4 pedibus Romanis quorum ſinguli 658 ½ partium, quarum pes Pariſinus 720.

Canna Monſpelienſis continet pedes Pariſin. 6. cum pollice

pollice 1 $\frac{1}{2}$, dividiturque in 8 palmos, vulgò *pans*, quorum ſinguli æquales ſunt palmo Romano mercatorum, quorum 8 in canna.

Pan Monſpelienſis continet 9 pollices, 2 lineas $\frac{1}{4}$, ſicut Romanus Mercatorum palmus.

Pedum comparatio & æquipollentia.

Alexandrini	144
Græci	125
Romani	120
Arabici	108
Pariſienſes	131

MESURES PRISES SUR LES originaux & comparées avec le pied du Châtelet de Paris par M. Auzout.

LE pied de Paris dont on s'eſt ſervi, eſt celui qui fut réduit l'an 1668. conformément à la Toiſe du Châtelet. Il eſt diviſé en 1440, c'eſt-à-dire, chaque ligne en 10 parties; & c'eſt ſur cette meſure que les ſuivantes ſont réduites.

Le palme de Rome pris au Capitole contient 988 $\frac{1}{2}$, ou 8 pouces, 2 lignes, 8 $\frac{1}{2}$ parties. Celui des paſſets eſt quelquefois un peu plus grand, & fait 8 pouces, 3 lignes. Le paſſet eſt une meſure de buis qui contient ordinairement 5 palmes, & qui eſt faite de pluſieurs pieces qui ſont jointes enſemble par des clous, pour pouvoir ſe plier, & ſe porter commodément.

Le palme eſt diviſé en 12 onces, & l'once en 5 minutes; ce qui fait ſoixante minutes au palme: on ne ſe ſert point

d'une plus petite division. 10 palmes font la canne que l'on nomme d'Architecte.

Le pied Romain que l'on nomme ancien, qui est celui de Lucas Pœtus pris au même lieu, contient 1306 ou 1307 parties. Il est un peu trop petit, puisque le palme devant être les trois quarts du pied, ou 12 doigts des 16 qui composent tout le pied, il devroit contenir suivant la premiere mesure 1318 parties.

Il reste à Rome deux pieds antiques sur deux sépulcres de Massons ou d'Architectes; l'un dans le Jardin de Belvedere, & l'autre dans la Vigne Mattei; & quoique les divisions en soient malfaites & inégales, on peut pourtant supposer que le total en est bon. Celui de Belvedere contient 1311 parties ou bien 10 po. 11. l. & 1 partie ou $\frac{1}{10}$; & celui de la Vigne Mattei en contient 1315; ou bien 10 po. 11 l. 5 parties ou $\frac{1}{2}$ ligne; & comme ils peuvent être un peu diminuez sur les bords, on peut les estimer égaux à 16 onces du palme moderne.

Par toutes ces mesures on peut prendre l'aulne de Paris pour 4 pieds Romains antiques.

Le pied Grec pris au Capitole a 1358 parties, ou bien 11 po. 3 l. 8 parties, étant au Romain comme 25 à 24, comme on déduit d'ordinaire de la difference de leurs stades dont l'une contenoit 600 pieds, & l'autre 625. Le pied Romain étant 1306 ou 1307, le pied Grec devroit être 1364 ou 1365; & si le Romain étoit 1318, le Grec devroit être 1373: si le Romain étoit 1311, le Grec seroit 1365 $\frac{5}{8}$: si le Romain étoit 1315, le Grec seroit 1369 $\frac{19}{24}$; toûjours plus grand que celui du Capitole marqué par Lucas Pœtus.

Nota. Le pied qui est à Belvedere sur le tombeau de de T. Statilius Mensor, est divisé en palmes & en doigts; la division en est malfaite & grossiere: l'autre qui est dans la Vigne Mattei sur un autre tombeau de Cossutius, n'est

point divisé en doigts. Il est à croire que Lucas Pœtus avoit marqué le pied Romain & le pied Grec de juste proportion ; mais qu'à force de prendre le pied Romain, on l'a augmenté. Si le Romain étoit 652, le Grec seroit 679 $\frac{1}{6}$.

Voyez Lucas Pœtus p. 5.

Le palme de Marchand dont 8 font la canne, dont on se sert pour mesurer toutes les étoffes, a 1102 $\frac{1}{2}$ parties, ou bien 9 pouces 2 $\frac{1}{4}$ de ligne. La canne faisant justement 6 pieds, 1 pouce, 6 lignes, elle revient à peu près à une aulne & deux tiers de celle de Paris.

Le palme & la canne de Rome pour les Marchands, est précisément le pan & la canne dont on se sert à Montpellier.

Le palme de Naples pris sur l'original, a 1161 ou 1162 parties, ou bien 9 pouces, 8 lignes, 1 ou 2 parties.

La brasse de Florence prise à la mesure publique contre la prison, a 2580 ou 2581 parties, c'est-à-dire 1 pied, 9 pouces & 6 lignes, ou 1 partie davantage ; mais le premier est plus juste.

Le pied de Bologne pris dans le Palais de la Vicairie, a 1686 parties, ou bien 1 pied, 2 pouces & 6 parties.

Le bras pris au même lieu a 2826 parties, ou bien 1 pied, 11 pouces, 6 lignes ; ce qui ne fait pas justement 5 pieds de 3 bras, comme le suppose le P. Riccioli.

Le bras de Modene a 2812 $\frac{1}{2}$ parties ; ou bien 1 pied, 11 pouces, 5 lignes $\frac{1}{4}$.

Le bras de Parme pris auprès du Dome a 2526 parties, ou bien un pied, 9 pouces, 6 parties.

Le bras de Lucques a 2615 parties ; ou bien 1 pied 9 pouces, 9 lig, 5 part.

Le bras de Sienne pris sur la canne publique qui est posée horizontalement sous la loge de l'Hôtel de Ville, & qui contient 4 bras, a 2667 parties ; ou bien 1 pied, 10 pouces, 2 lignes & 7 parties.

Le pied de Milan pris sur le Traboco de bois où on éprouve les mesures, a 1760 parties; ou bien 1 pied, 2 pouces, 8 lignes: & le bras dont le pied fait les deux tiers, a 2640 parties; ou bien 1 pied, 10 pouces.

Le pied de Pavie pris sur la canne de fer qui est à la porte du Dome, a 2080 parties; ou bien 1 pied, 5 pouces 4 lignes; & le bras dont il est les trois quarts, a 2780 parties, ou 1 pied, 1 pouce, 2 lignes.

Le pied Turin pris sur la mesure de cuivre qui est dans l'Hôtel de Ville, a 2274 parties; ou bien 1 pied, 6 pouces, 11 lignes, 4 parties.

Le pied de Lyon contient 1515 & $\frac{2}{5}$ de partie; ou bien 1 pied, 7 lignes, & $\frac{27}{50}$.

La toise contient 7 pieds $\frac{1}{2}$.

L'aulne de Lyon contient 3 pieds, 7 pouces, 8 lignes & 3 parties.

Fin des mesures données par M. Auzout.

DE MENSURA LIQUIDORUM ET ARIDORUM.

DOLIUM Parisiense, vulgò *muid*, æquale habetur communiter 8 pedibus cubicis, ita ut dolia 27 impleant sexpedam cubicam.

Ex antiquis Statutis, *Ordonnances*, dolium deberet continere pintas 300; sed nunc 288; ita ut pintæ 36 implere debeant pedem cubicum.

Dividitur etiam communiter dolium in sextarios, *sextiers*, 36; sextarius verò in pintas 8; inde 288 pintæ in dolio.

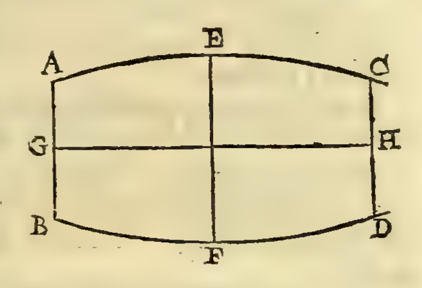
Pinta quæ in domo publica Parisiensi asservatur, con-

tinet pollices cubicos $47\frac{2}{7}$; cùm ex dolio deberet esse pollicum cubicorum 48.

Sextarius, *chopine*, qui ibidem asservatur, major est dimidio pintæ, estque circiter pollicum cubicorum 24.

Demisextiers quater sumptus excedit pintam pollicibus cubicis $2\frac{1}{2}$.

Dolium cujus longitudo GH est pollicum 32, diameter AB vel CD 22 pollicum, sed diameter EF 25 per medium foramen, *le bondon*; continet pintas $289\frac{1}{4}$. Sed si diameter EF sit pollicum $25\frac{1}{2}$, erit capacitas pintarum 296 ferè.



Nota contractionem unius pollicis in longitudine 8 pintas proximè demere.

Si longitudo GH sit $30\frac{1}{2}$ poll. diameter AB 23, & diameter EF 25, continet pintas $287\frac{1}{4}$.

Item, si longitudo GH sit 32, diameter AB 23, & diameter EF 24, continet pintas $289\frac{1}{4}$.

Modius Parisiensis pro granis, vulgò *le boisseau*, æqualis est cubo cujus latus 8 pollicum, 7 linearum $\frac{13}{20}$; seu continet pollices cubicos $644\frac{68}{100}$.

De ponderibus.

PARISIIS in libra sunt unciæ 16, seu grossi 128, seu grana 9216.

In uncia sunt grossi 8, seu grana 576.

In grosso seu drachma sunt 3 scrupuli, seu 72 grana.

In scrupulo seu denario grana 24.

Facto experimento Parisiis in Curia *des Monnoyes*,

constitit cubum cujus capacitas 171 pol. $\frac{1}{2}$, continere aquæ puræ fontanæ *d'Arcueil* libras 6 cum unciis 14, grossis 4, & granis 2; seu omnino grana 63650. Unde sequitur cubum pedalem Parisiensem continere ejusdem aquæ libras 69 cum unciis 9, grossis 3, & granis 22, seu summatim grana 641326. Hinc pollex cubicus ejusdem aquæ grana 371 $\frac{1}{10}$.

Pollices cubici 171 $\frac{1}{2}$ sunt pintæ 3 $\frac{1}{2}$ cum pollicibus 3 $\frac{1}{2}$, supposito quod pinta sit pollicum 48, uti in dolio. Fuisset congii Farnesiani pondus granorum 63162, posito latere cubi 665 partium.

Hinc si pinta supponatur pollicum cubicorum 48, continebit libras 2, minus 1 uncia, cum 41 granis, seu continebit grana 17814 $\frac{1}{2}$ dictæ aquæ, seu 1 libram cum unciis 14 & grossis 7 $\frac{1}{2}$ circiter; at vini libram unam cum unciis 14 & grossis 2 $\frac{1}{2}$; est autem differentia $\frac{1}{50}$ totius ponderis.

Latus dicti cubi continentis pollices cubicos 171 $\frac{1}{2}$ est partium decimarum lineæ 666 $\frac{7}{10}$, cùm debuisset esse 665, ut æquaretur dictus cubus congio Farnesiano seu octanti pedis Romani cubici; excedebat ergo granis 488, seu grossis 6 & granis 56.

Ex D. Auzout libra Romana hodierna, quæ est unciarum Romanarum 12 continet uncias Parisienses 10 cum grossis 7 & granis 12; seu summatim 6276 grana.

Hinc patet unciam Romanam hodiernam aurificam, leviorem esse Parisiensi granis Parisiensibus 43.

Mersennus dicit unciam Romanam leviorem esse Parisiensi granis 45, *tom. 3. Observat. Physicomathem.* Erit igitur ex D. Auzout ratio unciæ Rom. ad Paris. ut 11 ad 11 $\frac{473}{533}$. Sed si ponamus unciam Romanam minorem non 43, sed 44 gran. erit ratio ut 12 ad 13.

Ex eodem D. Auzout congius Farnesianus qui debuit continere libras antiquas 10, seu uncias 120 vini, depre-

henſus eſt continere aquæ fontanæ *di Trevi* uncias Pariſienſes 109 minus granis 24, ſeu libras 6 cum unciis 12, groſſ. 7, & granis 48: fuiſſet autem pondus vini levius.

Congius qui aſſervatur Pariſiis in Bibliotheca PP. S. Genovefæ, continet aquæ Sequanæ libras 7 cum uncia 1, groſſis 2, & granis 36.

Vas cujus capacitas $171\frac{1}{2}$ pollicum cubicorum, ſeu cujus latus $666\frac{7}{10}$ partium, qualium Pariſienſis pes, continet 1440: deficiebat à dicto congio unciis 2 & groſſis 6; proindeque dictus congius excedit dictum congium Veſpaſiani unciis 3, groſſis 4, & granis 65. Dicunt illum eſſe quem dimenſus eſt Gaſſendus.

Pondus aquæ excedit pondus vini communiter parte octogeſima.

Pondus aquæ ad pondus aëris, ut 960 ad 1.

Pondus aquæ marinæ ad aquam Sequanæ, ut 46 ad 45.

Menſuræ liquidorum antiquæ.

Amphora, ſeu pes cubicus continet pondus vini librarum Romanarum 80.

Urna dimidium amphoræ, ſeu libras 40.

Congius libras 10, ſeu ſemipes cubicus; ac proinde pars octava amphoræ.

Sextarius eſt ſexta pars congii.

Hemina, ſeu cotyla eſt ſemiſextarius cujus pondus unciarum Pariſienſium $9\frac{1}{12}$. Si congius ſit unciarum Pariſienſium 109.

Ciatus eſt ſexta pars heminæ.

Deprehendit Gaſſendus, ut ipſe narrat in vita Peireskii, aquam quæ Romano pondere debuit eſſe decem librarum ſeu unciarum 120, antiquarum ſcilicet, eſſe pondere Pariſienſi librarum 7 minus unciæ quadrante, ſeu unciarum 111, & quadrantum unciæ trium.

Hinc uncia Romana antiqua continet grana 536, qualium in Parisiensi sunt 576; unde & illis in drachmas collectis obvenere cuilibet drachmæ grana 67; idque proinde existimavit pondus denarii Cæsaris, qui fuit drachmalis.

Sextarius antiquus continet sextam partem congii. Semisextarius partem duodecimam congii, aliàs hemina seu cotyla dicta. Ubi notandum semisextarium antiquum proximè accedere ad semisextarium Parisiensem.

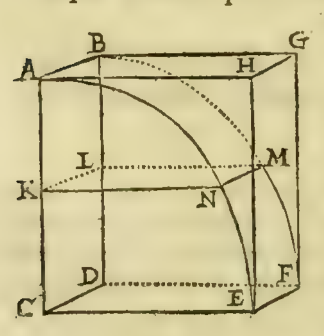
De proportione aquarum effluentium.

Experimentum.

Experimento constitit corpus A in aqua stagnante natans, tractum à pondere B velocitate æquabili, seu tempore ut unum; deinde trahi velocitate ut duo, seu dimidio tempore à pondere quadruplo ipsius B; ita ut velocitates sint ut ponderum radices quadratæ.



Aqua effluens per foramen horizontale rectangulum CF est ad aquam effluentem per idem foramen verticale AD ut 3 ad 2, suppositâ constanti aquæ altitudine AC. ACE, BDF sunt parabolæ quarum vertices A & B; suntque CH, DG rectangula.



Aquæ effluentis per CF celeritas est ubique æqualis; aquæ verò effluentis per AC celeritates

cæleritates reſpondent applicatis ad parabolas. Eſt ergo aqua effluens per CF ad aquam effluentem per AD, ut ſolidum rectangulum CG ad ſolidum parabolicum mixtum ABMNFC. Sunt autem iſta ſolida ut rectangulum DG ad ſpatium parabolicum DBMF, hoc eſt ut 3 ad 2; patet igitur propoſitum.

Aqua effluens per AD eſt ad aquam effluentem per AL in ratione ſeſquialtera altitudinum foraminum AC, AK; ſeu ut producta altitudinum AC, AK per ſuas radices quadratas multiplicatum.

Eſt enim aqua effluens per AD ad aquam effluentem per AL, ut parabola ACE ad parabolam AKN, quarum vertex communis A. Sed parabolæ ſunt inter ſe ut cubi baſium; ipſæ verò baſes ſunt ut radices quadratæ altitudinum. Ergo parabolæ ſunt inter ſe ut cubi radicum quadratarum altitudinum; & ſic ſunt aquæ effluentes; quod erat demonſtrandum.

Experimenta.

Per foramen verticaliter ſitum ac rotundum cujus diameter unius pollicis, in lamina cujus craſſities $\frac{1}{3}$ lineæ, ac nudum, hoc eſt ſine canali, exiſtente aquæ ſuperficie planè tranquillâ ac ſine vorticibus, alta unâ lineâ ſuprà foramen, intra horas 24 dolia 65 $\frac{3}{4}$ effluunt, vel 66 $\frac{2}{3}$; & ſic intra tres dies dolia 200. Sed ſi ſuperficies aquæ ſit paulò depreſſior, ita ut labrum illud quod aquæ ſuperficiem terminare ſolet, ad dictam altitudinem unius lineæ terminetur, pulviſculi tamen ſuperficiei aquæ aſperſi non effluant; in dicto caſu effluent intra horas 24 dolia 63 $\frac{1}{2}$. Itemque ſi dicto foramini apponatur tubulus cujus diameter ſit linearum 15, longitudo vero 3 pollicum cum dimidio, qui excipiat aquam è foramine euntem; non effluent niſi dolia 59 aut 60, ut plurimùm intra horas 24.

Experimentum

Circa necessariam declivitatem aquæ effluentis.

IN tubo AB cujus diameter pollicum 6, & longitudo sexped. 1000, notatæ sunt extremitates A B benè æquilibratæ, ope scilicet aquæ in tubo quiescentis. Tunc accedente per B, continuo affluxu, 6 pollicum aquæ



quantitate, ut tota exiret per alteram extremitatem distantem mille sexpedis, necessarium fuit tubum aperire in C quinque pollicibus inferiùs quam A.

Propositio.

Vas aquâ indesinenter plenum, cujus altitudo sit pedum 15, cum pollicibus 5, & lineis fere 7, per foramen rotundum pollicis unius, quantitatem aquæ cubicam pedalem emittet intra tempus 6 secund. quod sic demonstro.

SUPPONO corpus grave (guttam aquæ verbi gratia) motu naturaliter accelerato cadere ex altitudine pedum 15 cum pollice 1 & 2 lineis intra unicum minutum secundum temporis. Hoc supposito, quoniam aqua ex fundo vasis eo velocitatis gradu erumpit, quem acquisivisset si ex summa superficie ad fundum descendisset; supponiturque vasis altitudo pedum 15 cum pollice 1 & lineis 2, seu lineis 2174; quæ quidem altitudo conficeretur intra unum minutum secundum temporis motu

naturaliter accelerato, ut demonstravit Hugenius ex penduli minuta secunda exhibentis longitudine, erit aquæ velocitas talis, ut per eam continuò æquabilem conficeretur spatium pedum 30 cum pollicibus 2 & lineis 4 intra unicum minutum secundum temporis. Moles igitur aquæ, quæ dicto motu æquabili intra 1 secund. è vase indesinenter pleno per foramen rotundum unius pollicis æqualis est cylindro cujus diameter sit pollicis unius, altitudo vero pedum 30 cum pollicibus 2 & lineis 4; proindeque si dictæ quantitatis assumatur sextuplum, provenient 2174 pollices cylindrici pro spatio temporis 6 secund. At juxta basium rationem, quæ est quadrati circumscripti ad circulum, cùm 14 pollices cylindrici dent 11 pollices cubicos; 2174 cylindrici dabunt cubicos 1708 $\frac{1}{7}$, seu cubum pedalem fere, qui scilicet continet pollices cubicos 1728. Jam ut quadratum numeri 1708 $\frac{1}{7}$ ad quadratum numeri 1728, ita 15 pedes cum pollice 1 & lineis 2, ad 15 pedes cum pollic. 5, & lineis 4 $\frac{3}{7}$ pro altitudine vasis è quo intra 6 secund. effluerent 1728 pollices cubici, seu quantitas aquæ cubica pedalis; quod erat propositum.

Corollarium primum.

HINC patet quâ ratione determinari possit tempus intra quod effluet aqua è dato vase prismatico aut cylindrico per foramen datum in fundo factum. Nam ut altitudo pedum 15 cum pollice 1 & lin. 2 ad altitudinem vasis datam, ita quadratum temporis unius minuti secundi, ad quadratum temporis intra quod grave aliquod decideret ex altitudine vasis. Deinde ut est foramen ad basim totam, ita tempus inventum ad tempus intra quod tota aqua effluet è vase dato semel pleno. Concipiamus enim vas divisum in cylindros ejusdem cum ipso altitudinis, sed quorum bases æquales sint fo-

ramini, maneatque vas plenum dum effluet quantitas aquæ iſtis omnibus cylindris æqualis: conſtat ex dictis futurum ejuſmodi effluxum cylindrorum dimidio tempore ejus quo omnes cylindri ſucceſſivè effluerent non motu uniformi, ſed retardato, qualis eſt motus projectorum aſcendentium, qui accelerato æqualis ſit; quamobrem patet Corollarium.

Corollarium ſecundum.

Constat item quâ ratione ex tempore effluxûs aquæ in vaſe priſmatico aut cylindrico, cognoſcatur tempus quo grave decideret ex altitudine vaſis. Nam ut baſis eſt ad foramen, ita tempus totalis effluxûs aquæ ex vaſi ſemel pleno, eſt ad tempus quo grave decideret ex altitudine vaſis. Demonſtratio quidem eſt pro gutta aquæ decidente ex altitudine vaſis: ſed experiri poteris an hydrargyrus, ſeu argentum vivum, celeriùs effluat. Verum in praxi, quia effluxus ſub finem non eſt adeo regularis, ut meliùs obſervari ſeu determinari poſſit tempus quo vas datum evacuari debeat, utere methodo ſequenti.

A
C
B

Datâ totali aquæ altitudine in vaſe cylindrico aut priſmatico, & dato inſuper tempore quo pars aquæ per fundum effluit, unà cum reliqua altitudine aquæ; tempus quo tota aqua efflueret, poterit hoc modo determinari.

Sit totalis altitudo quæ AB; CB reliqua. Altitudinum AB, CB extrahantur radices quadratæ, ac deinde minor radix ſubtrahatur à majore, ut habeatur differentia; ut enim erit differentia radicum ad majorem, ita tempus obſervatum ad totale quæſitum; ſunt enim omnes altitudines à communi termino B in duplicata ratione temporum.

De mensura aquarum effluentium.

SUPPOSITA constanti aquæ altitudine pollicum 75 $\frac{8}{10}$, seu linearuum 909 $\frac{6}{10}$ per foramen horizontale rotundum unius pollicis (sicut & per quadratum æquivalens , cujus nempe latus erit linearum 10 $\frac{634}{1000}$) intervallo temporis 93 secund. effluxerunt pollices cubici aquæ 11412 $\frac{9}{10}$: ergo tempore 10 min. seu 600 secund. effluxissent pollices cubici aquæ 73631 $\frac{1}{3}$.

Jam ut 10 lin. $\frac{634}{1000}$ ad pollices 75 $\frac{8}{10}$, seu ad lineas 909 $\frac{6}{10}$; ita 73631 $\frac{1}{3}$ ad numerum cujus logarithmus 6. 7991887, quot scilicet pollices cubici aquæ effluerent intra 10 min. per foramen horizontale latum 10 lineis $\frac{634}{1000}$, & longum pollicibus 75 $\frac{8}{10}$ quanta est aquæ altitudo. Hinc per ea quæ supra demonstravimus de proportione aquarum effluentium per foramina horizontalia & verticalia, si ex logarithmo 6. 7991887 tollatur differentia inter logarithmos numeri 3, nempe 0. 4771212 & numeri 2 , nempe 0. 3010300 , quæ erit 0. 1760912 ; quod idem est ac si factâ additione logarithmi numeri 2 cum logarithmo 6. 7991887 , tolleretur à summa logarithmus numeri 3 , restabit logarithmus 6. 6230975 numeri experimentis pollices cubicos aquæ qui intra 10 min. effluxerunt per foramen verticale altum 75 poll. $\frac{8}{10}$ & latum 10 lineis $\frac{634}{1000}$. Sed si à logarithmo 6. 6230975 auferatur logarithmus 3. 2375437 numeri 1728 pollicum scilicet cubicorum unius pedis cubici , restabit numerus 3. 3855538, qui erit logarithmus numeri 2429 & $\frac{2}{3}$ circiter pedum cubicorum aquæ.

Juxta calculum præcedentis propositionis debuissent effluere pollices cubici aquæ 17125 $\frac{3}{4}$ per foramen rotundum unius pollicis intra tempus 93 secund. supposita aquæ altitudine 909 $\frac{6}{10}$ lin. cum effluxerint tantum 11412 $\frac{9}{10}$, cujus ratio est proximè ut 3 ad 2.

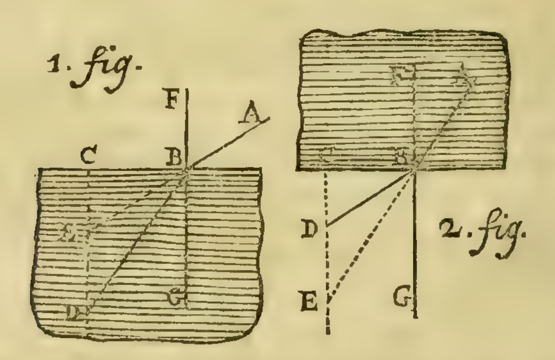


FRAGMENS DE DIOPTRIQUE.

PREMIERE PROPOSITION.

Si un rayon oblique AB tombe sur une surface plate BC, & passe dans un autre diaphane, le rayon rompu BD, & le prolongé BE tous deux bornez d'une même perpendiculaire DC, seront entr'eux dans la raison du milieu d'où vient le rayon à celui où il est entré.

COMME parce qu'en fait de réfractions l'air est au verre comme 3 à 2; & au contraire, le verre à l'air comme 2 à 3, le rayon BD passé de l'air dans le verre,



sera à BE comme 3 à 2 dans la premiere figure, & au contraire dans la seconde figure.

Démonstration.

L'angle BEC est égal à l'angle d'incidence FBA, & l'angle BDC égal à l'angle rompu GBD; donc BD est à BE comme le sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle rompu, c'est-à-dire, comme la mesure du diaphane d'où vient le rayon, à celui où il est entré.

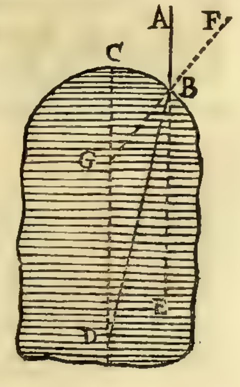
Toutes les propositions suivantes sont generales comme celle-ci; mais pour plus grande facilité nous ne parlerons que du verre à l'égard de l'air.

Corollaire.

Il s'ensuit que pour les rayons de petite incidence, DC est aussi à EC comme 3 à 2, à cause de l'insensible difference.

SECONDE PROPOSITION.

Si un rayon AB tombe obliquement sur la surface spherique d'un verre dont le centre soit G, par lequel soit fait passer l'axe GC parallele à AB: le rayon rompu BD sera à la portion de l'axe DG comme 3 à 2.



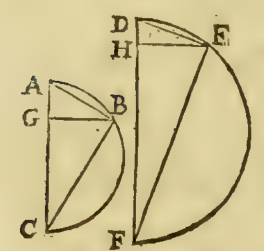
Démonstration.

L'ANGLE CGB est égale à l'angle d'incidence ABF, & l'angle GBD est l'angle rompu; donc BD est à DG, comme le sinus de CGB au sinus de GBD, c'est-à-dire, comme 3 à 2.

Corollaire.

Il s'ensuit que pour les rayons de très-petite incidence, lorsque BD ne differe point de CD alors DG est égale au diamétre ; & partant DC vaut trois demi-diamétres, & alors D est ce qu'on appelle le foyer absolu que nous marquerons dans la suite de la lettre H.

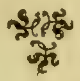
LEMME.



Aux cercles inégaux ABC, DEF ; si les cordes AB, DE sont égales, les sinus verses AG, DH seront en raison réciproques des diamétres.

Démonstration.

LA corde AB est moyenne proportionnelle entre le sinus verse AG & le diamétre AC ; donc le rectangle AG, AC est égal au quarré de AB. Par la même raison le quarré de DE ou AB est égal au rectangle DH, DF ; donc les rectangles AG, AC, & DH, DF sont égaux ; ils ont donc les côtez réciproques ; ce qu'il falloit prouver.

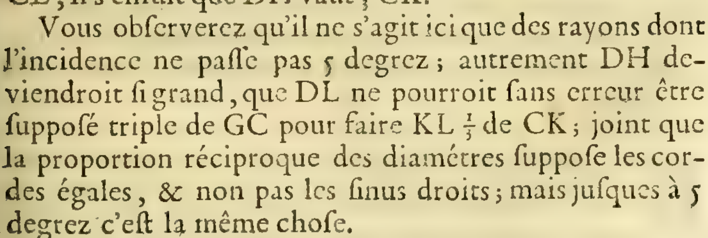


TROISIE'ME PROPOSITION.

L'incidence sur le verre convexe étant donnée avec le demi-diametre, trouver la distance entre le foyer absolu & le concours du rayon rompu.

DANS la figure de la proposition précedente soit marqué le foyer absolu H à la distance de trois demi-diamétres; on demande à connoître DH. Soit pris CK sinus verse de l'incidence. Je dis que DH est égale à $\frac{4}{3}$ CK.

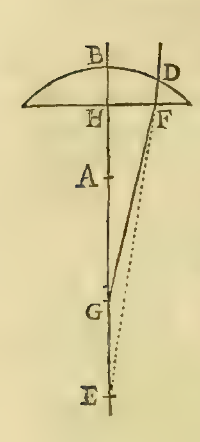
Démonstration.



Ayant sur le centre D de l'intervalle DB décrit l'arc BL; alors DL sera à DG, & pareillement HC à HG comme 3 à 2; donc GL est le tiers de DL, aussi bien que GC de HC. D'où il est clair que CH surpasse DL de 3 CL; & ayant ajoûté CL à DL, CH surpassera CD du double de CL. Mais parce que les demi-diamétres DL, GC peuvent sans erreur sensible être pris comme 3 à 1, KL est $\frac{1}{3}$ de CK, & par conséquent CL en vaut $\frac{2}{3}$: & puisque DH est égal à 2 CL, il s'ensuit que DH vaut $\frac{4}{3}$ CK.

Vous observerez qu'il ne s'agit ici que des rayons dont l'incidence ne passe pas 5 degrez; autrement DH deviendroit si grand, que DL ne pourroit sans erreur être supposé triple de GC pour faire KL $\frac{1}{3}$ de CK; joint que la proportion réciproque des diamétres suppose les cordes égales, & non pas les sinus droits; mais jusques à 5 degrez c'est la même chose.

PREMIERE PROPOSITION.



Si la convexité d'un verre plano-convexe reçoit les rayons paralleles à l'axe, le foyer abſolu ſera à un diamétre plus $\frac{1}{3}$ de l'épaiſſeur loin du ſommet de la convexité du verre.

A eſt le centre; B le ſommet; BH l'épaiſſeur; E le foyer abſolu de la convexité ſi elle étoit ſeule; FG rayon rompu par la ſurface plate, & partant G foyer abſolu. Je dis que GB vaut un diamétre plus $\frac{1}{3}$ BH.

Démonſtration.

Comme 3 eſt à 2, ainſi EF eſt à GF, ou EH à GH. Mais EH eſt égal à 3 demi-diamétres moins BH; donc GH eſt égal à un diamétre moins $\frac{2}{3}$ BH, & finalement GB vaut un diamétre plus $\frac{1}{3}$ BH.

SECONDE PROPOSITION.

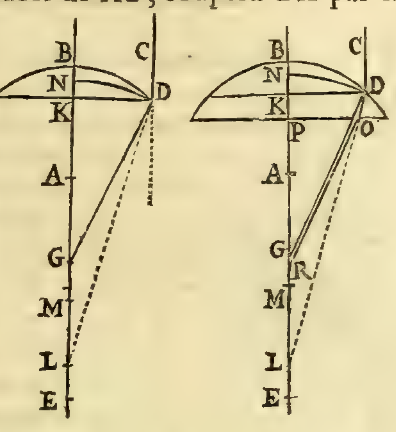
Aux plan-convexes, ſi un rayon parallele à l'axe entre par la convexité, ſon éloignement du foyer abſolu ſera égal à $\frac{7}{6}$ du ſinus verſe de la premiere incidence, ſoit que ce ſinus verſe ſoit égal à l'épaiſſeur du verre, ſoit qu'il ſoit plus petite.

1. Cas. BK eſt l'épaiſſeur égale au ſinus verſe de l'incidence BD; E foyer abſolu de la convexité; EL éloignement du foyer abſolu de la même convexité; M foyer ab-

ſolu du plan-convexe ; G concours du rayon : je dis que G eſt au-deſſus de M à $\frac{7}{6}$ de BK.

Demonſtration.

Soit ſur le centre G décrit l'arc DN, lequel à cauſe que GD eſt environ double de AB, coupera BK par la moitié en N. LD | LA || 3 | 2, & LD | DG || 3 | 2 : donc DG ou GN = AL ; mais AL vaut 1 diamétre — $\frac{8}{6}$ BK, donc GN = 1 diametre — $\frac{8}{6}$ B-K, ajoûtant BN qui eſt $\frac{3}{6}$, alors GB ſera = 1 diamétre — $\frac{5}{6}$ BK : d'ailleurs BM diſtance du foyer abſolu vaut 1 diamétre + $\frac{2}{6}$ BK, la diſtance GM ſera donc $\frac{7}{6}$ BK.

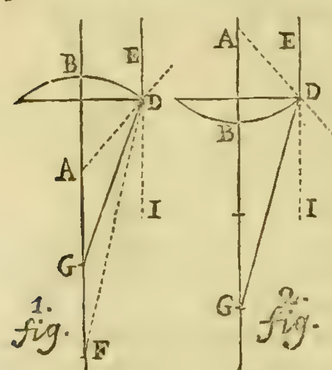


Suppoſons maintenant que l'épaiſſeur ſoit augmentée en PO ; alors le foyer abſolu M deſcendra d'un tiers de PK, mais auſſi G deſcendra d'un tiers de PK ou DO, qui ſont comme égales, la ſeconde réfraction ſe faiſant en O par une ligne parallele à DG, qui ſera OR ; puiſque LD eſt environ triple de LG auſſi bien que LO de LR, il s'enſuit que la difference OD ſera triple de RG. *II. Cas.*

SECONDE PROPOSITION.

Tout verre plan-convexe ramasse les rayons paralleles à l'axe, à la distance du diametre de la convexité, de quelque côté qu'on la tourne.

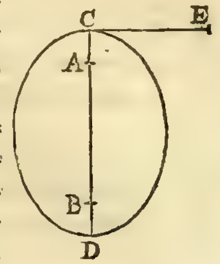
I. Cas. SOIT la convexité faite antérieure, comme en la premiere figure; le centre A; le rayon ED incident parallele à l'axe BA & prolongé en I; la premiere réfraction IDF ou DFA $= \frac{1}{3}$ DAB ou IDA: donc FDA étant égal à 2, alors DFA sera égal à 1; donc FA est double de AD, c'est-à-dire, par la premiere refraction, le rayon en F est à une distance de trois demi-diamétres: ce qu'il faut bien retenir pour la suite. Mais par la seconde réfraction faite par la surface plate, le concours F est approché du tiers de FB: donc BG distance du foyer G vaut un diamétre, & l'angle IDG ou DGB $= \frac{1}{2}$ DAB.



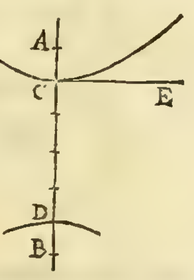
II. Cas. Soit la surface plate antérieure comme en la seconde figure, alors il n'y aura qu'une réfraction faite par la seconde surface: mais qui vaudra tout d'un coup la moitié de DAB: donc AD sera à DG ou BG comme 1 à 2.

Or avant que de passer outre, il sera bon de considerer que dans le premier cas il arrive au cercle la même chose qu'à l'ellipse. Car si la seconde surface avoit été concave d'une circonférence décrite sur le point F, les rayons seroient venus en F sans autre réfraction: ce

qui eſt proprement ce qui arrive à l'ellipſe. Et pour plus grand éclairciſſement, ſoit une ellipſe dont les foyers A, B : le grand axe CD, & le parametre CE : & ſuivant la meſure des réfractions, ſoit AB = 6, & CD = 9, alors le rectangle DAC ſera = 11 $\frac{1}{4}$: donc le rectangle de la figure DCE = 45 : lequel étant diviſé par CD, donnera 5 pour le parametre. Donc, puiſque CB diſtance du foyer contient 1 $\frac{1}{2}$ parametre CE, ſi ſur ce même parametre on décrit un cercle, ſa convexité ſans autre réfraction portant auſſi ſon foyer au ſeſquidiametre, il s'enſuit que le cercle & l'ellipſe en ce cas font le même effet.



Le ſecond cas répond auſſi à ce qui arrive à l'hyperbole : car poſé la diſtance des foyers AB = 6, & que l'axe tranſverſe CD ſoit = 4 : alors le rectangle BCA ſera 5 : donc le rectangle de la figure DCE ſera 20, lequel diviſé par 4 donnera 5 pour le parametre CE qui ſera égal à CB diſtance du verre au foyer. Si donc on décrit un cercle ſur CE, lequel ſoit préſenté à l'objet de même que l'hyperbole, il fera le même effet pour la diſtance du foyer : & d'ailleurs il eſt démontré que de tous les cercles qui toucheront une ſection conique par dedans au *vertex*, le plus grand eſt celui qui eſt décrit ſur le parametre.



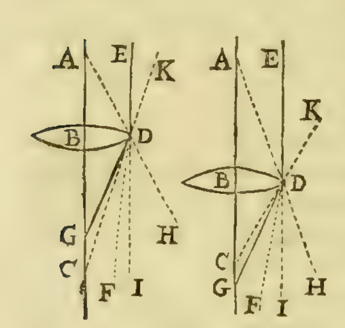
TROISIÉME PROPOSITION.

Etant donné un verre convexe des deux côtez, égal ou inégal: comme la somme des diamétres est à un des deux, ainsi l'autre diamétre est à la distance du foyer.

SOIT AC les centres des convexitez ; ED rayon incident parallele à l'axe, & prolongé en I ; ADH, CDK perpendiculaires.

Démonstration.

Par la premiere réfraction IDF est égal à $\frac{1}{3}$ DCA. Par la seconde réfraction FDG est égal à $\frac{1}{2}$ IDF $+$ $\frac{1}{2}$ HDI ou DAC : donc FDG est égal à $\frac{1}{6}$ DAC $+$ $\frac{1}{2}$ DAC ; & IDG ou DGA sera égal à $\frac{1}{2}$ DCA $+$ $\frac{1}{2}$ DAC ; donc 2 DGA est égal à DAC $+$ DCA ; par conséquent A$+$C est à C, comme 2 G est à C ; c'est-à-dire, AC est à AD, comme 2 CD est à DG : & A$+$C est à A, comme 2 G est à A : c'est-à-dire, AC est à CD, comme 2 AD est à DG.



Premier Corollaire.

Il s'ensuit que le foyer G est toûjours plus proche que le grand demi-diamétre, & plus loin que le petit, & qu'il ne peut tomber au point C, que quand les convexitez son égales.

Second Corollaire.

Il s'ensuit aussi que quand les convexitez sont égales, le foyer est au centre de part & d'autre.

Troisiéme Corollaire.

Il s'ensuit aussi, que nonobstant l'inégalité des convexitez, le foyer est de part & d'autre à égale distance: c'est-à-dire, qu'il n'importe de quel côté le verre soit tourné.

Quatriéme Corollaire.

Il s'ensuit encore que la totale réfraction IDG ou DGA est toûjours la moitié de l'angle ADK, lequel comprend DAC + DCA.

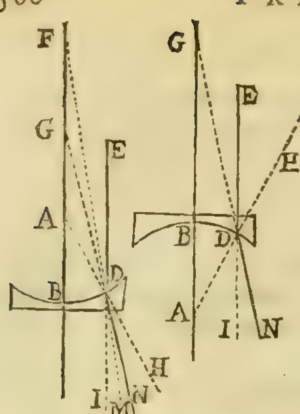
QUATRIE'ME PROPOSITION.

Les verres plan-concaves détournent les rayons paralleles à l'axe comme s'ils venoient de l'extrémité du diamétre prise au devant du verre.

Démonstration.

LA premiere réfraction IDM ou IDF ou DFA est égale à $\frac{1}{3}$ EDA ou $\frac{1}{2}$ ADF; donc AF est double de AB: c'est-à-dire, que par la premiere réfraction s'il n'en arrivoit point d'autre, le rayon seroit détourné en M comme venant de F à la distance de trois demidiamétres: mais à cause de la surface plate, la seconde réfraction approche le concours F en G du $\frac{1}{3}$ de BF: donc par la totale réfraction IDN, le rayon DN vient comme de G à la distance du diamétre. *1. Cas.*

5. Cas.



Il n'y a ici qu'une réfraction non plus qu'au second cas de la deuxiéme proposition : mais cette réfraction est tout d'un coup une moitié de l'incidence, comme étant faite du verre à l'air : donc IDN ou DGA est égal à $\frac{1}{2}$ DAG : donc DG ou GB est égal à 2 AD ou 2 AB.

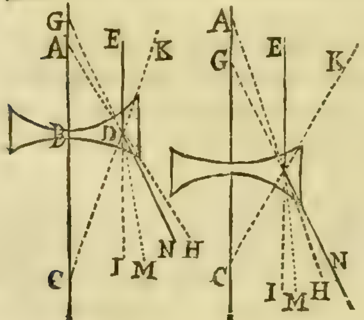
Notez que G est ici une espece de foyer, mais de divergence.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Etant donné un verre concave des deux côtez égal ou inégal : comme la somme des diamétres est à l'un des deux, ainsi l'autre est à la distance du foyer de divergençe.

Démonstration.

LA premiere réfraction I D M est égale à $\frac{1}{3}$ DAB. La seconde réfraction M D N est égale à $\frac{1}{6}$ DAB + $\frac{1}{2}$ D C A. Donc la totale I D N est égale à $\frac{1}{2}$ D A B + $\frac{1}{2}$ D C A : donc ayant prolongé N D en G, l'angle D G C sera égal à $\frac{1}{2}$ DAB + $\frac{1}{2}$ DCA : & le reste comme en la troisiéme proposition.



Premier

Premier Corollaire.

Il s'enſuit qu'un verre également concave fait diverger les rayons comme s'ils venoient du centre.

Deuxiéme Corollaire.

Il s'enſuit auſſi qu'il n'importe de quel côté on tourne un verre inégalement convexe.

Troiſiéme Corollaire.

Il s'enſuit encore que la totale réfraction eſt $\frac{1}{2}$ ADK.

SIXIE'ME PROPOSITION.

Tout verre qu'on appelle Meniſque, c'eſt à-dire, qui a un côté convexe & l'autre concave, a ſon foyer de convergence ou de divergence dans la proportion ſuivante.

COMME la différence des diamétres eſt à un des diamétres, ainſi l'autre diamétre eſt à un quatriéme terme, qui ſera le foyer de convergence à la façon des convexes, ſi la convexité prévaut : mais il ſera le foyer de divergence à la façon des concaves, ſi la concavité prévaut : car ſi la concavité étoit ſuppoſée égale à la convexité, il n'y a point de difficulté que la deuxiéme réfraction détruiſant la premiere, le rayon demeureroit parallele.

Il y a donc deux cas à démontrer : & notez que dans toutes les figures ſuivantes, A eſt centre de la convexité, & C celui de la concavité.

Quand les meniſques appartiennent aux convexes, *I. Cas.*

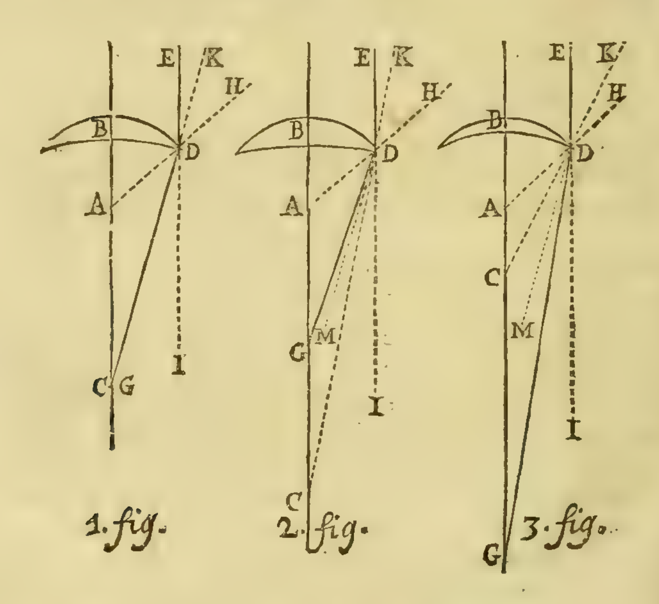
c'est-à-dire, que le diamétre de la convexité est plus petit que celui de la concavité.

Démonstration.

Soit premierement la convexité tournée vers l'objet, alors pour la démonstration il faut considérer la proportion des diamétres entr'eux.

Premiere figure. Soit BC demi-diamétre de la concavité triple de AB : alors par la premiere réfraction le rayon sera porté en C : & comme il sera devenu perpendiculaire à la concavité, il ne sortira point de C. Donc C & G concouront : donc DGA qui est $\frac{1}{3}$ DAB, sera $\frac{1}{2}$ ADC.

Deuxiéme figure. Soit BC plus grande que le triple de AB : alors le tiers



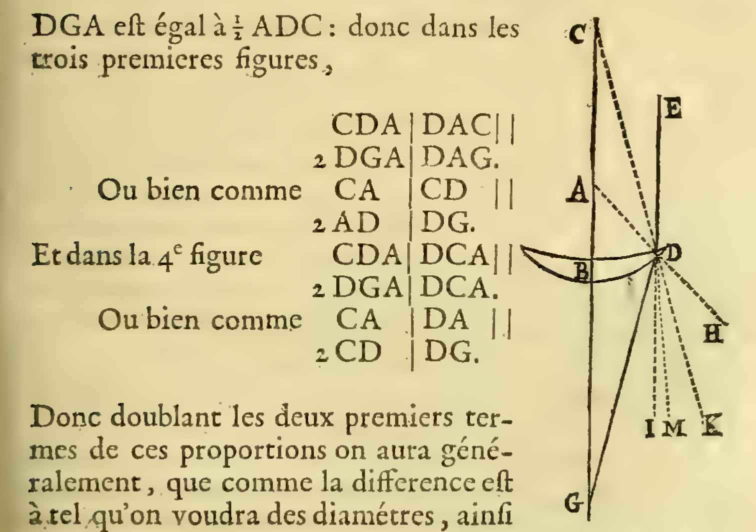
de DAB sera plus grand que IDC. Donc par la premiere réfraction IDM étant $\frac{1}{3}$ DAB, le rayon rompu DM

paſſera DC. Or MDA eſt égal à $\frac{2}{3}$ BAD : donc MDC eſt égal à ADC — $\frac{2}{3}$ DAB. Mais MDG eſt égal à $\frac{1}{2}$ MDC : donc MDG eſt égal à $\frac{1}{2}$ ADC — $\frac{1}{3}$ DBA : ajoûtant donc IDM, on aura IDG ou DGA égal à $\frac{1}{2}$ ADC.

Soit BC moindre que le triple de AB, alors par la premiere réfraction DM ne paſſera pas DC : donc comme MDA eſt toûjours $\frac{2}{3}$ DAB, MDC eſt égal à $\frac{2}{3}$ DAB — ADC. Mais MDG eſt égal à $\frac{1}{2}$ MDC : donc MDG eſt égal à $\frac{1}{3}$ DAB — $\frac{1}{2}$ ADC. Otant donc MDG de IDM reſtera $\frac{1}{2}$ ADC. *Troiſiéme figure.*

Soit enfin la concavité du côté de l'objet. IDM eſt égal à $\frac{1}{3}$ DCB ou IDK : donc MDK eſt égal à $\frac{2}{3}$ DCB, & MDH ſera égal à $\frac{2}{3}$ DCB + KDH ou ADC. Mais MDG eſt égal à $\frac{1}{2}$ MDH : donc MDG eſt égal à $\frac{1}{3}$ DCB + $\frac{1}{2}$ ADC. Otant donc IDM, reſte IDG ou DGA égal à $\frac{1}{2}$ ADC. *Voyez la Figure ſuivante.*

Concluſion pour toutes ces figures.



DGA eſt égal à $\frac{1}{2}$ ADC : donc dans les trois premieres figures,

	CDA	DAC ||
	2 DGA	DAG.
Ou bien comme	CA	CD ||
	2 AD	DG.
Et dans la 4e figure	CDA	DCA ||
	2 DGA	DCA.
Ou bien comme	CA	DA ||
	2 CD	DG.

Donc doublant les deux premiers termes de ces proportions on aura généralement, que comme la difference eſt à tel qu'on voudra des diamétres, ainſi

l'autre est au foyer : ce qui vient de ce que l'angle du foyer n'est ici que moitié de la difference des angles des centres, au lieu qu'à la troisiéme proportion il est moitié de la somme.

II. Cas. Quand les menisques appartiennent aux concaves, c'est-à-dire, quand le diamétre de la convexité est plus grand que celui de la concavité, laquelle prévaut.

Soit premierement la convexité vers l'objet. La premiere réfraction IDM est égale à $\frac{1}{3}$ DAB, donc MDA est égal à $\frac{2}{3}$ DAB, & MDC égal à $\frac{2}{3}$ DAB + ADC : mais la deuxiéme réfraction MDN est égale à $\frac{1}{2}$ MDC : donc MDN est égal à $\frac{1}{3}$ DAB + $\frac{1}{2}$ ADC : ôtant donc IDM, reste IDN ou DGC égal à $\frac{1}{2}$ ADC.

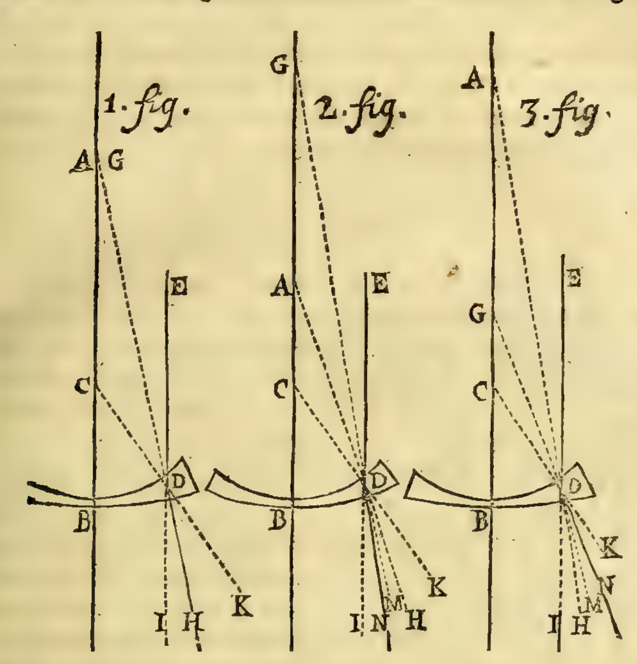
Soit secondement la concavité vers l'objet.

Dans la premiere figure des trois suivantes, AB étant triple de BC, la premiere réfraction portera le rayon sur DH, & il n'y aura point de seconde réfraction, & le centre A sera le foyer de divergence : or par la proportion donnée DAC ou DGC est égal à $\frac{1}{2}$ ADC.

Dans la deuxiéme figure AB est moindre que triple, si bien que le rayon par la premiere réfraction n'est pas porté jusqu'en DH. IDM est égal à $\frac{1}{3}$ BCD ou IDK, & MDK égal à $\frac{2}{3}$ BCD : donc MDH est égal à $\frac{2}{3}$ BCD — HDK ou ADC. Mais MDN est égal à $\frac{1}{2}$ MDH : donc MDN est égal à $\frac{1}{3}$ BCD — $\frac{1}{2}$ ADC. Si donc de IDM on ôte MDN, restera IDN, ou DGC égal à $\frac{1}{2}$ ADC.

Dans la troisiéme figure AB étant plus grand que le triple de BC, le rayon DM par la premiere réfraction passe DH. IDM est égal à $\frac{1}{3}$ BCD ou IDK, & MDK est

égal à $\frac{1}{3}$ BCD : donc MDH eſt égal à HDK — $\frac{1}{3}$ BCD. Mais MDN eſt égal à $\frac{1}{2}$ MDH ; donc MDN eſt égal à $\frac{1}{2}$



HDK ou ADC — $\frac{1}{3}$ BCD : ajoûtant donc IDM, on aura IDN ou DGC égal à $\frac{1}{2}$ ADC.

C'eſt donc ici la même concluſion que deſſus, avec cette ſeule difference, que le quatriéme terme trouvé donne ici le foyer de divergence au-devant du verre.

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Si un rayon tombant au point D sur un verre convexe, vient d'un point de l'axe F, sa totale réfraction MDO sera égale à la moitié de l'angle HDC ou ADK compris entre les lignes tirées des centres des convexitez.

Démonstration.

I. & II. Cas. SOIT le point F le même que le centre C, comme dans la premiere figure, ou bien au-delà, comme dans la deuxiéme figure. La premiere réfraction MDN est égale à $\frac{1}{3}$ HDF : la seconde NDO est égale à $\frac{1}{6}$ HDF + $\frac{1}{2}$ CDF : donc MDO est égal à $\frac{1}{2}$ HDF + $\frac{1}{2}$ CDF, c'est-à-dire, MDO est égal à $\frac{1}{2}$ HDC, ou ADK.

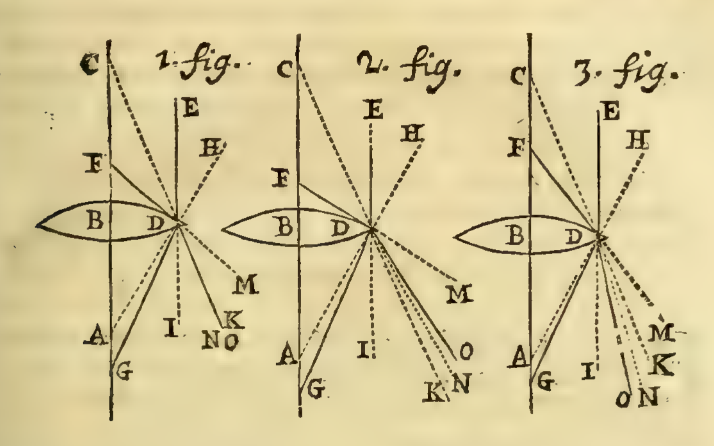
III. Cas. Soit le point F plus près que le centre C, alors la production DM tombera hors l'angle ADK : d'où il s'ensuit trois autres cas exprimez dans les figures suivantes.

1°. Soit l'angle CDF égal au tiers de FDH, alors par la premiere réfraction, le rayon DN tombera sur DK, & ne fera plus d'autre réfraction ; ainsi MDO tiers de FDH sera par la supposition $\frac{1}{2}$ CDH.

Notez qu'en ce cas, DF est la moitié du foyer des paralleles, comme on le verra dans la dixiéme proposition.

2°. Soit l'angle CDF plus grand que le tiers de FDH, alors DN ne viendra pas jusqu'en DK, & par conséquent

DO moins divergeant que FD, tombera entre MD & DN. Cela étant, la premiere réfraction MDN est égale à $\frac{1}{3}$ HDC + $\frac{1}{3}$ CDF : la seconde NDO est égale à $\frac{1}{2}$ NDK, c'est-à-dire, NDO est égal à $\frac{1}{2}$ CDF — $\frac{1}{2}$ MDN,



ou bien NDO égal à $\frac{1}{2}$ CDF — $\frac{1}{6}$ HDC — $\frac{1}{6}$ CDF. Mais MDO est égal à MDN — NOD : donc MDO est égal à $\frac{1}{3}$ HDC + $\frac{1}{3}$ CDF — $\frac{1}{2}$ CDF + $\frac{1}{6}$ HDC + $\frac{1}{6}$ CDF, c'est-à-dire, MDO est égal à $\frac{1}{2}$ HDC.

3°. Soit l'angle CDF moindre que le tiers de FDH, alors DN passera DK, & partant DO sera tout à la gauche. La premiere réfraction MDN est égale à $\frac{1}{3}$ HDC + $\frac{1}{3}$ CDF : & la seconde NDO égale à $\frac{1}{2}$ NDK, c'est-à-dire, NDO est égal à $\frac{1}{2}$ MDN — $\frac{1}{2}$ CDF, ou bien NDO est égal à $\frac{1}{6}$ HDC + $\frac{1}{6}$ CDF — $\frac{1}{2}$ CDF. Mais MDO est égal à MDN + NDO : donc MDO est égal à $\frac{1}{3}$ HDC + $\frac{1}{3}$ CDF + $\frac{1}{6}$ HDC + $\frac{1}{6}$ CDF — $\frac{1}{4}$ CDF, c'est-à-dire, MDO est égal à $\frac{1}{2}$ HDC.

Notez que dans tous les cas de cette proposition, quand les convexitez sont inégales, il peut arriver que DO soit ou convergente ou parallele ou encore diver-

gente, ſuivant que le point F ſera plus loin que le foyer, ou dans le foyer même ou au-deçà ; mais cela ne fait rien à la démonſtration.

HUITIE'ME PROPOSITION.

Figures de la propoſition précedente.

Deux rayons étant poſez, l'un parallele ED dont la totale réfraction ſoit IDG, l'autre oblique FD, dont auſſi la totale réfraction ſoit MDO ; la difference des réfractions ODG ſera toûjours égale à EDF difference des premieres incidences ſur le verre.

Démonſtration.

PAR la propoſition précedente & par le quatriéme corollaire de la troiſiéme propoſition les angles MDO, IDG ſont moitié d'un même angle HDC, ou ADK, & par conſéquent égaux entr'eux ; ayant donc ôté (dans les premieres figures) ou ajoûté (dans les dernieres) l'angle commun IDO, on aura ODG égal à IDM, c'eſt-à-dire, à EDF.

Premier Corollaire.

Il s'enſuit que l'angle DFB eſt toûjours égal à l'angle ODG.

Second Corollaire.

Les mêmes choſes ſe démontreront auſſi facilement à l'égard des verres concaves, comme il ſe peut voir par le troiſiéme corollaire de la cinquiéme propoſition, & de ce que, ſuppoſé un concave égal à un convexe, ſi les incidences ſont égales, les réfractions le ſeront auſſi ; l'une en écartant, l'autre en réuniſſant les rayons.

NEUVIE'ME

NEUVIÉME PROPOSITION.

Probleme pour les rayons divergens d'au-delà du foyer du verre convexe.

Le foyer d'un verre convexe & la distance d'un point de divergence plus éloigné que le foyer étant connus trouver à quelle distance du verre les rayons seront ramassez.

Régle.

COMME la distance du point de divergence moins le foyer est au foyer, ainsi le même foyer est à un quatriéme terme, auquel le foyer étant ajoûté vous aurez le requis.

Ou bien, comme la distance du point de divergence moins le foyer est à la distance toute entiere, ainsi le foyer est au requis.

F g C B D G A O

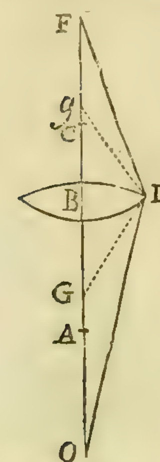
Démonstration.

Soient les foyers G, *g*, & la distance du point de divergence FB; on demande BO. Par le premier corollaire de la huitiéme proposition l'angle ODG est égal à DF*g*; mais à cause que les distances des foyers GD, *g* D sont égales par le troisiéme corollaire de la troisiéme proposition, les angles OGD, D*g*F sont aussi égaux : donc les triangles F*g*D, DGO, sont semblables; & partant comme FB — *g*B est à *g*B ou *g*D (lesquelles sont sensiblement égales à cause des petites incidences) ainsi GB ou son égale GD est à GO, à laquelle ajoûtant le foyer GB on aura BO que l'on demande.

Ou bien, comme FB — g B est à FB ou FD son égale, ainsi GB ou GD est à OB ou OD que l'on cherche.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que les rayons venant du double du foyer, sont ramassez à la même distance.



Deuxiéme Corollaire.

Il s'ensuit comment on peut trouver le juste foyer d'un verre par le moyen de la peinture d'un objet proche dont la distance soit connuë. Car puisque l'angle ODG est égal à F, si on fait DOG commun, les triangles DOG, FOD seront semblables: donc comme FO distance entre l'objet & la peinture, est à FD ou FB distance entre l'objet & le verre; ainsi DO ou BO distance entre le même verre & la peinture, est à GD ou GB foyer requis.

Notez que le meilleur moyen de trouver le foyer d'un verre par la peinture, est de recevoir celle du soleil sur un papier gris, lorsqu'il passe quelques nuages entrecoupez, si c'est un grand verre; car aux petits on le trouve facilement par la peinture des objets un peu éloignez & éclairez, mais il ne faut pas que le verre soit fort découvert.

Un autre moyen pour les grands verres est avec un oculaire un peu fort, en regardant la lune, lorsqu'elle n'est pas pleine ou quelque moindre planette, ou même les étoiles fixes.

Troisiéme Corollaire.

Il s'ensuit de plus comment connoissant le foyer d'un verre, & sçachant la distance du verre à la peinture, on trouvera la distance de l'objet au verre. Car en renversant la premiere regle, le foyer qui est connu se trouve moyen proportionnel entre deux termes dont le premier est donné : donc comme la distance de la peinture au verre est au foyer, ainsi le foyer est à un quatriéme terme, lequel augmenté du foyer, donnera la distance entre le verre & l'objet.

On peut juger par cette regle que la distance de l'objet ne doit pas être excessive à comparaison du foyer; car quelle partie le foyer est de la distance F*g*, telle partie le prolongement GO est du même foyer, & partant devient insensible quand la distance de l'objet est trop grande à comparaison du foyer; d'où vient que pour trouver le foyer d'un petit verre, il n'est pas necessaire de choisir un objet fort éloigné, d'autant que la difference devient bien-tôt insensible.

DIXIE'ME PROPOSITION.

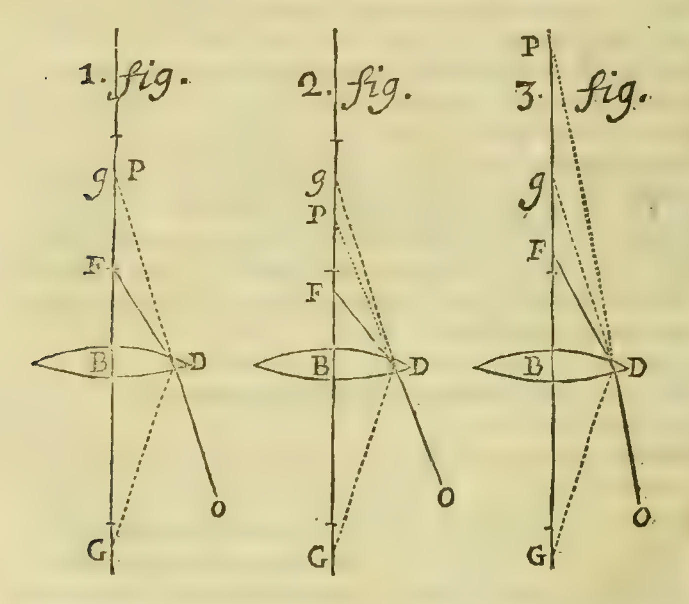
Probleme pour les rayons divergens d'au-deçà du foyer d'un verre convexe.

Le foyer d'un convexe, & la distance d'un point de divergence plus proche que le foyer étant connus, trouver à quelle distance le rayon devenu moins divergent iroit concourir avec l'axe s'il étoit prolongé.

IL est clair de ce dessus, que le verre convexe ramasse les rayons qui viennent d'un point au-delà du foyer, & qu'il rend paralleles ceux qui viennent du foyer même;

mais qu'il laiſſe encore divergens ceux qui viennent de plus près, diminuant ſeulement leur divergence, & les diſpoſant comme s'ils venoient d'un point plus éloigné ; & c'eſt ce point que l'on cherche, & que j'appellerai derniere divergence, au lieu que la premiere divergence eſt la diſtance entre le point premierement donné & le verre.

Les figures repréſentent trois cas. Au premier le point F de premiere divergence eſt au milieu de B*g* diſtance du verre au foyer, & alors le point P de derniere diver-



gence tombe en *g*. Au ſecond & troiſiéme F eſt au-deſſous du milieu & au-deſſus, ſuivant quoi P eſt auſſi au-deſſous ou au-deſſus de *g* : mais la pratique & la démonſtration ſont toutes ſemblables.

Régle.

Comme le foyer moins la premiere divergence eſt au foyer, ainſi le foyer eſt à un quatriéme terme, duquel le foyer étant ôté reſte la ſeconde divergence.

Ou bien, comme le foyer moins la premiere divergence eſt au foyer; ainſi la premiere divergence eſt à la ſeconde.

Démonſtration.

Soit FD le rayon incident venant du point F, dont la diſtance FB ou FD ſoit connuë, auſſi bien que la diſtance des foyers B*g* ou BG, & ſoit DO le rayon rompu prolongé en P. L'angle ODG, qui eſt égal à DFB par le premier corollaire de la huitiéme propoſition, eſt auſſi égal aux deux angles DGP, DPG pris enſemble; mais l'angle DFB eſt égal à l'angle D*g*F ou DGP + FD*g*; donc les angles DPG & FD*g* ſont égaux, & ainſi les triangles DPG, FD*g* ſont ſemblables; donc *g*F | *g*D | | GD | GP, c'eſt-à-dire, *g*F | *g*B | | GB | GP, qui eſt la premiere régle.

Pour la ſeconde régle, il faut conſiderer les triangles PFD, DF*g*, qui ſont ſemblables, puiſque l'angle obtus F eſt commun & que les angles FD*g*, FPD ſont égaux, comme on l'a démontré ci-devant, donc *g*F | *g*D | | FD | PD, c'eſt-à-dire, *g*F | *g*B | | FB | PB. Ce qu'il falloit démontrer.



ONZIE'ME PROPOSITION.

Probleme pour les rayons convergens ſur un verre convexe. Sçachant les foyers d'un verre convexe & la premiere convergence d'un rayon incident, trouver ſa derniere convergence, ou ſon concours avec l'axe.

Voyez la Figure précedente.

CETTE propoſition n'eſt autre que la précedente renverſée: car poſé OD pour rayon incident avec une convergence qui iroit en P, le cours ſe fera ſuivant la régle qui ſuit.

Régle.

Comme la premiere convergence augmentée du foyer eſt au foyer; ainſi la premiere convergence eſt à la ſeconde.

Démonſtration.

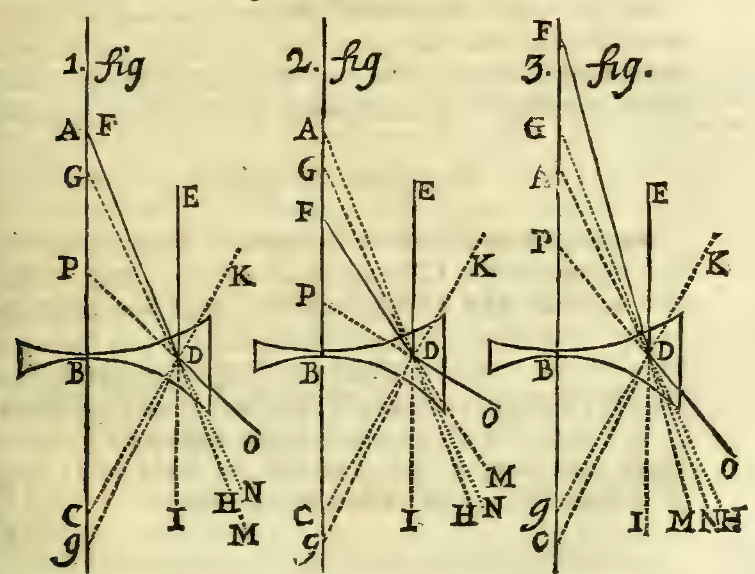
Il s'enſuit des démonſtrations de la propoſition précedente que les triangles GDP, DFP ſont ſemblables, l'un & l'autre étant ſemblable au triangle DFg; donc PD | DG || PF | FD & en compoſant PD + DG | DG || PF + FD | FD, c'eſt-à-dire, PG | DG ou GB || PB | FD ou FB; ce qu'il falloit prouver.

DOUZIE'ME PROPOSITION.

Si un rayon venant d'un point de l'axe F tombe sur un verre concave dont les centres soient A, C, sa totale réfraction MDO sera toûjours égale à ½ ADK.

Démonstration.

SOIT le point de divergence F même que le centre. Le rayon droit ADM tombant par l'hypothese sur la perpendiculaire ADH, il n'y aura point de réfraction à l'entrée du verre, mais seulement à la sortie, laquelle réfraction sera MDO égale à ½ HDC ou ADK. *I. Cas.*



Soit F plus proche du verre que le centre A. La premiere réfraction MDN est égale à ⅓ ADF, donc NDH *II. Cas.*

est égal à $\frac{1}{3}$ ADF : mais la derniere réfraction NDO est égale $\frac{1}{2}$ NDH + $\frac{1}{2}$ HDC ou ADK, ou bien NDO est égal à $\frac{1}{3}$ ADF + $\frac{1}{2}$ ADK ; ôtant donc MDN égal à $\frac{1}{3}$ ADF, il restera MDO égal à $\frac{1}{2}$ ADK.

III. Cas. Soit F plus loin du verre que le centre A. La premiere réfraction MDN est égale à $\frac{1}{3}$ ADF, mais la derniere réfraction NDO est égale à $\frac{1}{2}$ NDM + $\frac{1}{2}$ MDC ; ou bien NDO est égal à $\frac{1}{6}$ ADF + $\frac{1}{2}$ MDC ou FDK : ajoûtant donc MDN égal à $\frac{1}{3}$ ADF, on aura MDO égal à $\frac{1}{2}$ ADF + $\frac{1}{2}$ FDK, c'est-à-dire, MDO égal à $\frac{1}{2}$ ADK.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que posé deux rayons l'un ED parallele à l'axe, & l'autre oblique FD venant d'un point de l'axe, la totale réfraction IDN de la parallele ED sera toûjours égale à MDO totale réfraction de FD ; car l'une & l'autre est toûjours égale à $\frac{1}{2}$ ADK dans les précedentes figures.

Deuxiéme oCrollaire.

Ayant prolongé ND en G qui est le foyer, & OD en P. Puisque l'angle IDN est égal à MDO, l'angle DGB sera toûjours égal à l'angle FDP. Donc ayant pris B*g* égale à la distance du foyer BG & tiré *g*D, les triangles FD*g*, FPD, ayant les angles D*g*F, PDF égaux & l'angle DF*g* commun, seront semblables ; mais aussi à cause de l'angle DPG commun, & des angles PDF, DGP égaux, les triangles PDF, PGD seront semblables ; donc les triangles FD*g*, PDG seront semblables.

TREIZIE'ME

TREIZIE'ME PROPOSITION.

Probleme pour les rayons divergens qui tombent sur un verre concave.

Régle.

COMME la diſtance entre le verre & le point de divergence augmentée du foyer eſt au foyer, ainſi le foyer eſt à un quatriéme terme, lequel étant ôté du foyer, il reſtera la diſtance entre le verre & le point de plus grande divergence.

Démonſtration.

Par le deuxiéme corollaire de la propoſition précedente, poſé FD rayon divergent, les triangles FD*g*, PDG ſont ſemblables; donc comme F*g* eſt à *g*D, ainſi GD eſt à GP, ou bien comme F*g* eſt à *g*B, ainſi GB eſt à GP; donc ayant ôté GP du foyer GB, on aura PB diſtance du point, auquel OD prolongé iroit concourir avec l'axe. *Voyez la Figure précedente.*

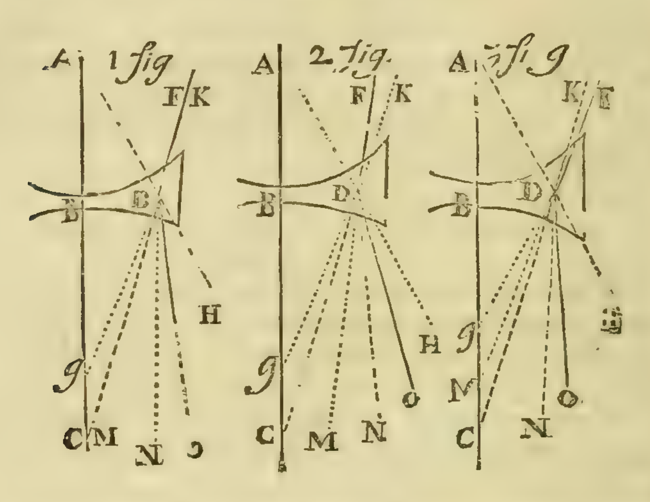
QUATORZIE'ME PROPOSITION.

Si un rayon convergent tombe ſur un verre concave, ſa totale réfraction ſera toûjours égale à l'angle du foyer de même que pour les divergens.

SI le rayon convergent tend au foyer, il eſt clair qu'il deviendra parallele à l'axe. *I. Cas.*

S'il tend à un point plus proche que le foyer, il deviendra moins convergent, & alors pour prouver ce qui eſt requis, il ne faut que renverſer les deux dernieres figu- *II. Cas. Voyez la Figure précedente.*

res de la douziéme propoſition, & prendre ODP pour la premiere convergence & MDF pour la derniere; car il eſt manifeſte que l'angle PDF ſera toûjours égal à l'angle DGB, ſoit que DF tombe au-deſſous de G, ce qui arrivera lorſque P ſera plus proche que la moitié du foyer, comme dans la deuxiéme figure, ſoit qu'il tombe au-deſſus comme dans la troiſiéme figure.



III. Cas. Mais enfin, ſi le rayon tend à un point plus éloigné que le foyer, il deviendra divergent. Soient dans ces trois figures ſuivantes les centres AC, l'incidence D, la premiere réfraction MDN, & la ſeconde NDO, & le foyer *g*.

Démonſtration.

Soit dans la deuxiéme figure FD au-deſſus de DK. La premiere réfraction MDN eſt égale à $\frac{1}{3}$ ADF, la ſeconde NDO eſt égale à $\frac{1}{2}$ CDN, ou bien à un $\frac{1}{6}$ ADF + $\frac{1}{2}$ FDK: donc MDO eſt égal à $\frac{1}{2}$ ADK.

Soit dans la troisiéme figure FD au-dessous de DK. La premiere réfraction MDN est égale à $\frac{1}{3}$ ADF, la seconde NDO est égale à $\frac{1}{2}$ MDN — $\frac{1}{2}$ FDK, ou bien à $\frac{1}{6}$ ADF — $\frac{1}{2}$ FDK, c'est-à-dire, MDO est égal à $\frac{1}{2}$ ADK.

Dans la premiere figure FD étant la même que KD, l'angle FDK est nul; ainsi il est clair que MDO est égal à $\frac{1}{2}$ ADK. Or toûjours l'angle du foyer D*g* B, qui est égal à la totale réfraction de la parallele à l'axe, est aussi égal à $\frac{1}{2}$ ADK, par la cinquiéme proposition: donc MDO est égal à D*g* B, ce qui étoit à prouver.

QUINZIE'ME PROPOSITION.

Probleme pour les rayons convergens qui tombent sur un verre concave.

SI le rayon tend à un point de l'axe plus proche du verre que le foyer, on trouvera ainsi sa moindre convergence. *I. Cas.*

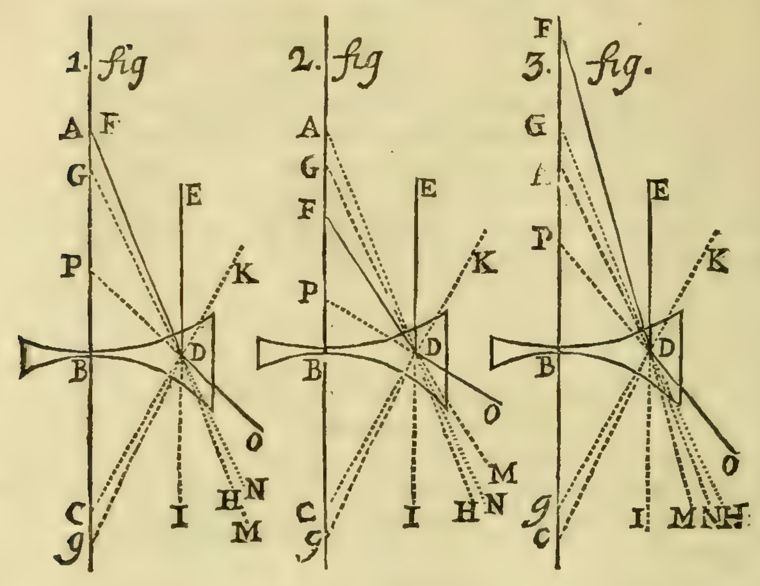
Régle.

Comme la distance entre le point de la premiere convergence & le foyer plus proche, est au foyer; ainsi le foyer est à un quatriéme terme, duquel le foyer étant ôté, il restera la distance entre le verre & le point de moindre convergence.

Démonstration.

Ayant renversé ces figures & posé OD rayon incident avec convergence en P, il sera détourné en F par le deuxiéme cas de la proposition précedente: mais par le deuxiéme corollaire de la douziéme proposition les triangles

PDG, FDg ſont ſemblables, donc PG | GD || Dg | gF, dont ayant ôté g B, on aura BF que l'on demandoit.



II. Cas. Si le rayon incident tend à un point de l'axe plus éloigné que le foyer, on trouvera de cette maniere le point oppoſé à ſa divergence.

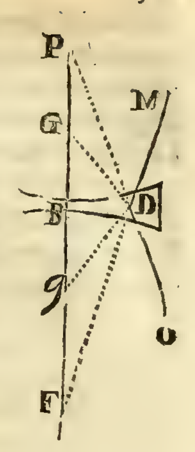
Régle.

Comme la diſtance entre le point de premiere convergence & le foyer, eſt au foyer; ainſi le foyer eſt à un quatriéme terme, auquel le foyer étant ajoûté on aura la diſtance entre le verre & le point de divergence oppoſée.

Demonſtration.

Soit MD rayon incident & tendant en F, lequel par réfraction ſoit détourné en O & devenu divergent, &

que OD prolongé tombe en P. L'angle ODF est égal à DFg + DPG, mais ODF est égal à DGB par la quatorziéme proposition, donc DGB est égal à DFg + DPG; mais DGB est égal à GDP + DPG & ainsi DFg est égal à GDP; mais d'ailleurs les angles DgF, PGD sont égaux; donc les triangles DgF, PGD sont semblables & partant Fg | gD || DG | GP, auquel ajoûtant GB on aura PB que l'on demandoit.



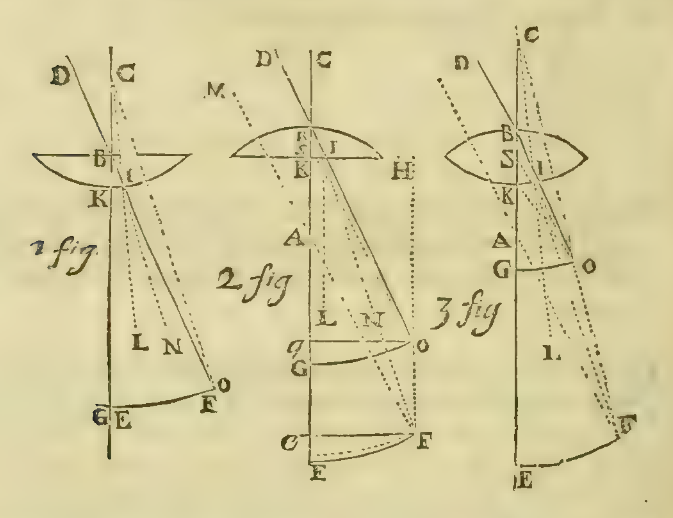
SEIZIE'ME PROPOSITION.

Les rayons paralleles entr'eux, mais obliques à l'axe ont aussi leurs foyers obliques en même distance du verre que le foyer principal, pourvû toutefois que l'obliquité soit petite.

SOIT en premier lieu un verre plan-convexe duquel la surface plate soit antérieure, & soit un rayon oblique incident DB, qui entrant dans le verre diminuera son inclinaison du tiers de l'incidence DBC suivant la ligne BIN, & ainsi feront tous les autres rayons qui lui seront paralleles; si donc on tire par le centre C un axe oblique CO qui leur soit parallele dans le verre, c'est à-dire, à BI & qu'on prenne le point O à distance du diamétre hors le verre, il est clair que ce sera leur foyer en même distance que le foyer principal G, & tous les autres foyers obliques seront dans la courbure d'une concavité GO décrite sur le centre C. *1. Cas.*

Soit en second lieu le verre plan-convexe, duquel la

II. Cas. convexité reçoive le rayon DB incliné à l'axe, ſi par le centre A on tire MA parallele à DB, conſiderant MA comme axe : il eſt clair que s'il n'arrivoit point d'autre réfraction le rayon DB & tout autre qui lui eſt parallele concourreroit avec MA prolongé en F ſuivant la ligne BIN, que je ſuppoſe ſeſqui-diamétre : mais à cauſe de la ſeconde réfraction faite en I par la ſurface plate, le concours F ſera approché en O du tiers de la perpendiculaire FH, qui n'eſt plus courte que EK, ſinon du ſinus verſe de



FAE que nous avons ſuppoſé petit ; donc KG n'eſt pas plus grande que HO, ſinon des deux tiers du ſinus verſe de l'angle d'inclinaiſon du rayon oblique, ce qui ne peut pas être ſenſible : ou ſi vous voulez tous les points E, F & tous autres ſemblables déterminez par la premiere réfraction étant dans un arc décrit ſur le centre A, auſſi les foyers G, O & tous autres ſont dans une ſurface qui eſt en effet courbe, mais moins que EF, comme ſi toutes les

perpendiculaires à la base d'un segment avoient toutes été retranchées d'un tiers.

Soit en troisiéme lieu un verre convexe des deux côtez BK, duquel soient les centres A, C, le foyer principal G, & DB rayon oblique, auquel par le centre A soit tiré MA parallele. Alors s'il n'arrivoit point d'autre réfraction, le rayon DB & tout autre qui lui est parallele concourreroit avec l'axe oblique MA prolongé en F, à la distance du sesqui-diamétre : mais à cause de la seconde réfraction ce concours F est approché, & pour le trouver il faut tirer au centre C la ligne CF, qui sera comme un nouvel axe perpendiculaire à la seconde surface, & dans laquelle sera pris le point O en même distance que G, lequel point sera le foyer oblique de tous les rayons.

On suppose que l'obliquité soit petite, autrement la réfraction devenant trop grande le concours s'approcheroit, & MA qui à l'égard de la premiere réfraction tient lieu d'axe se trouvant trop éloignée des rayons obliques, le même arriveroit que si aux rayons droits on donnoit une trop grande ouverture.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que les foyers qui sont peu éloignez du principal, sont tous avec lui sensiblement dans un même plan perpendiculaire à l'axe : car si d'une courbure on prend une très-petite partie, elle est sensiblement plate.

Second Corollaire.

De ce qui a été dit, on peut facilement expliquer comment par le moyen d'un verre convexe se peut faire la peinture des objets dans un lieu où il n'entre point d'autre lumiere que par le verre ; & pourquoi le point brûlant

des verres convexes eſt le lieu où ſe fait la peinture diſtincte du ſoleil, qui eſt plus ou moins grande à meſure que le verre eſt moins ou plus convexe.

Troiſiéme Corollaire.

Si l'épaiſſeur du verre étoit inſenſible, l'angle d'incidence ſur le verre ſeroit toûjours égal à l'angle d'émerſion. J'appelle ici angle d'incidence celui qui eſt compris des deux lignes qui viennent des extrémitez de l'objet au milieu du verre, & angle d'émerſion celui qui eſt compris des deux lignes qui ſont tirées du milieu du verre aux extrémitez de la peinture. Soit l'axe AC, l'objet DAF, le verre B, & la peinture GCE : le rayon oblique DB entrant dans le verre ſe plie vers BC, mais il eſt incontinent redreſſé en ſortant, ſi bien que les angles oppoſez demeurent égaux : donc comme la grandeur de l'objet eſt à la diſtance entre l'objet & le verre, ainſi la grandeur de la peinture eſt à ſa diſtance juſqu'au verre.

D A F B G C E

Quatriéme Corollaire.

Il s'enſuit que les peintures ou foyers ont égale lumiere quand les ouvertures des verres ſont comme les foyers, ſi ce n'eſt que la confuſion qui ſe trouvera plus grande aux petits en élargira un peu le foyer ; mais cela negligé les lumieres ſe trouvent renfermées dans des eſpaces qui leur ſont proportionnels & également multipliez.

DIX-SEPTIE'ME

DIX-SEPTIE'ME PROPOSITION.

L'épaisseur d'un verre convexe ou plan convexe dont la convexité est vers l'objet, rend toûjours l'angle d'émersion plus grand que celui d'incidence. Il n'arrive rien au plan convexe pour l'épaisseur quand le plat est vers l'objet.

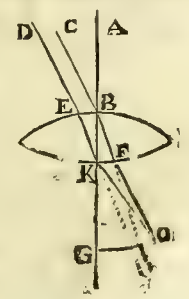
SOIT l'épaisseur du verre BK, le demi-angle d'incidence ABC, le foyer principal G, l'oblique O, & l'angle d'émersion GKO.

Préparation.

Le rayon rompu KO vient necessairement de quelqu'un des paralleles à CB, posons que ce soit DE, qui par la réfraction tombe en K, de même que CB est détourné en F pour enfin concourir en O.

Démonstration.

CB, DE sont paralleles, donc BF, EK sont convergens vers F, K, & l'angle EKB est plus grand que FBK; considérant donc FB comme rayon incident en B, l'incidence FBK étant moindre que BKE, le rayon BC sera moins éloigné de la perpendiculaire que KO, donc GKO est plus grand que ABC; donc comme AC est à AB, ainsi GO est à quelque chose de plus que GK, ce que nous déterminerons dans la suite.



DIX-HUITIE'ME PROPOSITION.

Probleme. Etant connu le diametre & l'épaiſſeur d'un verre plan-convexe, trouver la diſtance du foyer hors le verre.

DANS la premiere propoſition auſſi bien que dans les régles ſuivantes on a negligé l'effet de l'épaiſſeur qui peut néanmoins être ſenſible, principalement aux petits verres.

Or il eſt évident, que ſi la ſurface plate eſt faite antérieure, c'eſt-à-dire, tournée vers l'objet, l'épaiſſeur n'apporte aucun changement, & que le foyer eſt juſtement à la diſtance d'un diamétre hors le verre : mais ſoit la convexité faite antérieure.

Régle.

Otez du diamétre de la convexité les $\frac{2}{3}$ de l'épaiſſeur, & il reſtera la diſtance du foyer hors le verre du côté de la ſurface plate.

A eſt le centre de la convexité, BK eſt l'épaiſſeur du verre, EE eſt un rayon parallele à l'axe & prolongé en I, IED eſt la premiere réfraction, enſorte que ED prolongé en F fait F $\frac{1}{3}$ de BAE premiere incidence; DH eſt perpendiculaire à la ſeconde ſurface au point de la ſeconde incidence D : HDF eſt la ſeconde incidence, & partant FDG eſt la ſeconde réfraction égal à $\frac{1}{2}$ HDE ou à un demi angle F.

Démonstration.

FDG | F || 1 | 2 : donc FG | GD, ou bien FG | GK || 1 | 2 ; & en composant FG + GK | GK || 3 | 2 ; c'est-à-dire 3 demi-diamétres —— BK sont à KG foyer requis, comme 3 à 2. Donc ôtant $\frac{1}{3}$ du premier & troisiéme terme deux demi-diamétres —— $\frac{2}{3}$ BK | KG || 2 | 2. Et à compter depuis B, le foyer G surpassera le diamétre de $\frac{1}{3}$ de BK.

DIX-NEUVIE'ME PROPOSITION.

Les diametres des convexitez & l'épaisseur du verre étant donnez, trouver la distance du foyer hors le verre convexe des deux côtez.

Régle.

COMME la somme des deux sesqui-diamétre, moins l'épaisseur du verre, est au sesqui-diamétre de la premiere convexité aussi moins l'épaisseur ; ainsi le diamétre de la seconde convexité est à la distance du foyer hors le verre.

Soit A le centre de la premiere convexité, C centre de la seconde, BK l'épaisseur du verre, EE rayon incident parallele à l'axe & prolongé en I, IEF ou F premiere réfraction, FDG seconde réfraction.

Démonstration.

F —— $\frac{1}{3}$ BAE, mais HDF —— F + C, donc FDG étant $\frac{1}{2}$ HDF, sera —— $\frac{1}{6}$ BAE + $\frac{1}{2}$ C ; ainsi

F + FDG = $\frac{1}{2}$ BAE + $\frac{1}{2}$ C. Mais F + FDG = DGC, donc DGC = $\frac{1}{2}$ BAE + $\frac{1}{2}$ C; donc 2 DGC = BAE + C. Mais BAE = 3 F, donc 2 DGC = 3 F + C : & comme 3 F + C | C | | 2 G | C, c'eſt-à-dire, comme 3 C D + D F | DF | | 2 C D | DG; ou comme trois demi-diamétres de la ſeconde convexité + trois demi-diamétres de la premiere — BK eſt à DF, qui eſt égal à BF — BK; ainſi 2 CD eſt à KG.

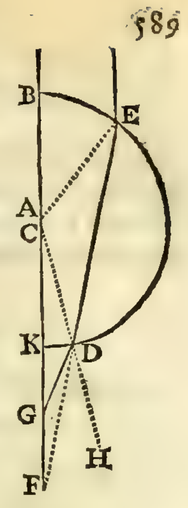
Premier Corollaire.

L'on verra par le calcul que les verres de convexité inégale ont le foyer plus loin du côté de la ſurface plus convexe; enſorte que lorſque l'inégalité eſt très-grande & approche du plan-convexe, alors la différence approche des $\frac{2}{3}$ de l'épaiſſeur : mais tant que le plus grand diamétre n'excede pas le moindre de plus $\frac{1}{12}$, la différence des foyers eſt inſenſible. Or ce qui fait la difference des foyers du verre inégalement convexe, eſt que l'accourciſſement du foyer vient principalement de l'épaiſſeur comparée avec la premiere convexité.

Second Corollaire.

Il s'enſuit auſſi du calcul, que pour les verres d'égale ou preſque égale convexité, ſi l'épaiſſeur BK eſt moindre que la moitié du foyer calculé ſans l'épaiſſeur, alors KG diſtance du foyer hors le verre, ſe trouve d'environ $\frac{1}{6}$ de l'épaiſſeur plus courte que ce que le calcul produiroit par la régle de la troiſiéme propoſition où l'épaiſſeur eſt negligée : pour donc abreger on peut ſe ſervir de la régle donnée à la deuxiéme propoſition, & ôter du produit $\frac{1}{6}$ de l'épaiſſeur.

Troisiéme Corollaire.



Il s'ensuit aussi qu'une sphere de verre porte son foyer hors de soi à la distance du quart du diamétre ; ce qui se peut aussi démontrer en particulier, car BF | FK | | BE | KD ; si donc BE est 3, KD & partant l'angle KCD sera 1 : mais aussi F est 1 ; donc HDF est 2, & partant GDF est aussi 1 ; donc DG, GF, ou KG, GF sont parties égales de KF demi-diamétre de la sphére.

VINGTIE'ME PROPOSITION.

Les diamétres des convexitez & l'épaisseur du verre étant donnez, trouver la juste longueur du foyer proportionnée aux effets du verre.

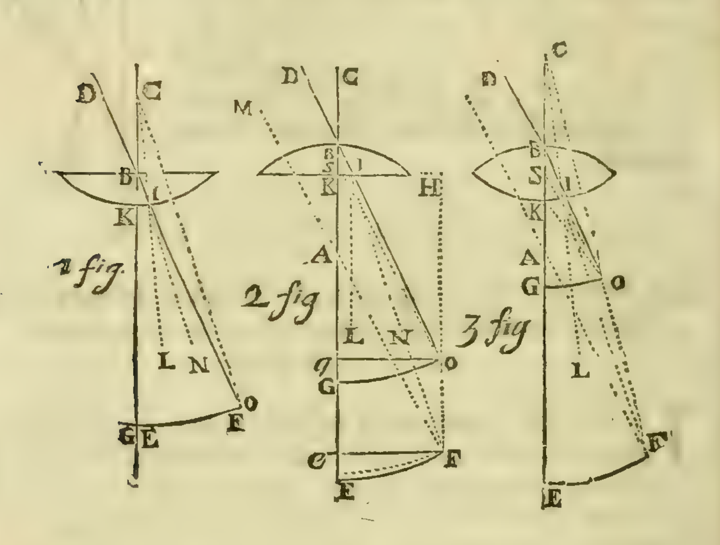
IL est clair parce qui a été démontré, qu'il n'arrive rien aux plano-convexes à cause de l'épaisseur, quand le plat est tourné vers l'objet, car les rayons demeurant paralleles dans le verre, l'angle d'émersion est égal à celui d'incidence & le foyer à la distance du diamétre.

Régle pour les plano-convexes, quand la convexité est tournée vers l'objet, ou est antérieure.

Ajoûtez au foyer hors le verre les $\frac{2}{3}$ de l'épaisseur ou prenez le diamétre de la convexité, & vous aurez la longueur du foyer d'un verre, qui sans épaisseur sensible fera le même effet que le donné avec son épaisseur.

Démonstration.

Dans la deuxiéme figure soit tirée OS parallele à FA ou DB. EK = 3 semi-diamétres — BK ; donc son tiers EG = 1 semi-diamétre — $\frac{1}{3}$ BK : mais EA = 2 semi-diamétres : donc GA = 1 semi-diamétre + $\frac{1}{3}$ BK. Mais



AS = FO, ou GE, ou 1 semi-diamétre — $\frac{1}{3}$ BK ; donc GS = 1 diamétre. Et d'ailleurs l'angle GSO pris pour émersion est égal à l'incidence de DB ; donc le verre dans cette situation, nonobstant cette épaisseur, fait la peinture GO de même grandeur qu'un verre sans épaisseur qui auroit même convexité ; c'est-à-dire, que quoique le foyer hors le verre soit accourci, la peinture demeure néanmoins de grandeur juste.

Régle pour les convexes des deux côtez.

Comme le sesqui-diamétre de la convexité antérieure, plus le demi-diamétre de la seconde, moins l'épaisseur du verre.

Au même demi-diamétre de la seconde convexité, plus la distance du foyer hors le verre.

Ainsi la somme des demi-diamétres des convexitez, moins l'épaisseur.

A un quatriéme terme, lequel ôté du second terme, donnera la juste longueur du foyer requise.

Démonstration.

Dans la troisiéme figure soit marquée l'épaisseur BK, tirée OS parallele à FA ou DB, & joints OK pour faire l'angle d'émersion GKO. Prenant OSG pour émersion qui est égal à CBD, si on faisoit un verre également convexe sur GS, qui n'eût aucune épaisseur sensible, il auroit sa peinture égale à GO, & feroit partant même effet à cet égard que le proposé avec son épaisseur BK. Or à cause de la parallele OS à la base FA dans le triangle FCA, comme FC | OC, ou comme EC | GC | | AC | SC, appliquant les termes de cette proportion à ceux de la régle, on trouvera qu'ils expriment la même chose. J'appellerai donc GS le foyer correct. *Voyez la Figure précédente.*

Premier Corollaire.

On verra par ce calcul que ce quatriéme terme qui donne le foyer d'équivalence juste, est toûjours plus grand que celui qui viendroit par la régle generale où l'on neglige l'épaisseur; & qu'ainsi l'épaisseur fait faire

aux verres l'effet d'un plus long qui ſeroit ſans épaiſſeur ſenſible, & cet excès aux verres d'égales convexité eſt toûjours d'autant pardeſſus le demi - diamétre, que le foyer hors le verre étoit diminué à cauſe de l'épaiſſeur : ainſi aux verres ordinaires où le foyer KG eſt moindre d'un ſixiéme de l'épaiſſeur, le juſte foyer excede le demi-diamétre d'un ſixiéme de l'épaiſſeur.

Deuxiéme Corollaire.

Et aux ſphéres de verre où le foyer hors le verre eſt moindre que le demi-diamétre d'un quart de l'épaiſſeur qui eſt le diamétre, auſſi le juſte foyer ou équivalence ſurpaſſe le demi-diamétre du même quart ; c'eſt-à-dire, que la boule fait le même effet qu'un verre ſans épaiſſeur ſenſible, lequel auroit ſon foyer à diſtance des trois quarts du diamétre de la boule.

Troiſiéme Corollaire.

Probleme. La largeur de la peinture & ſa diſtance du verre étant données, trouver l'angle d'incidence.

Il faut premierement dans les précedentes figures trouver le foyer correct GS, & dans le triangle rectangle GOS ſçachant les côtez GO, GS, on aura l'angle GSO égal à l'incidence ; & ceci eſt utile pour trouver la grandeur du ſoleil par ſa peinture, c'eſt-à-dire, trouver ſous quel angle il fait ſon incidence ſur le verre, & ainſi des autres objets. Et c'eſt dans ces ſortes d'operations où la correction du foyer eſt neceſſaire pour être juſte à la meſure des angles viſuels ; mais dans les propoſitions ſuivantes elle n'eſt pas ſi neceſſaire, ainſi on la négligera.

VINGT-UNIE'ME

VINGT-UNIE'ME PROPOSITION.

Etant joints deux verres convexes ou plano-convexes, ou menifques appartenans aux convexes dont les foyers particuliers foient connus, trouver le foyer commun qui réfulte de la jonction des deux verres.

Régle.

COMME la fomme des foyers eft à un des foyers, ainfi l'autre foyer eft au requis.

Démonftration.

Tout verre qui ramaffe les rayons paralleles en un point, de quelque figure qu'il foit fe réduit à un plan-convexe équivalent fi on fait le diamétre du plan-convexe égal au foyer du verre donné. Or de deux plan-convexes enfemble on peut faire un convexe des deux côtez, duquel il eft vrai de dire que comme la fomme des diamétres à un des diamétres, ainfi l'autre diamétre eft au foyer; les foyers étant donc changez en diamétres, il eft vrai de dire que comme la fomme des foyers, &c.

Corollaire.

La même régle eft pour les concaves, & il n'y a point de difference pour la démonftration, car ils ont leurs foyers à leur maniere.

VINGT-DEUXIE'ME PROPOSITION.

Deux verres de differente espece, c'est-à-dire, dont l'un appartienne aux convexes & l'autre aux concaves, étant joints, trouver ce qui résulte de cette jonction.

Régle.

COMME la difference des foyers est à un des foyers, ainsi l'autre foyer est à un quatriéme, lequel sera veritable foyer si le verre appartenant aux convexes a prévalu, c'est-à-dire, a été plus convexe que l'autre n'a été concave, ou bien si son foyer a été plus petit que celui de l'autre. Mais si au contraire le convexe étoit plus foible, le quatriéme terme trouvé donnera la distance du foyer de divergence.

Corollaire.

Il s'ensuit que si un verre est autant convexe que l'autre est concave, ils se détruiront entierement, & feront l'effet d'un verre plat. D'où il suit comment on peut trouver le foyer d'un concave en lui appliquant divers convexes, & cela se peut aussi par réflexion.

VINGT-TROISIE'ME PROPOSITION.

Probleme. Deux verres convexes ou appartenans aux convexes connus étant donnez & mis à distance connuë, qui ne soit pas si grande que le foyer du verre qu'on supposera antérieur ou premier, trouver le foyer commun.

CETTE proposition se peut résoudre par la dixiéme. Car il s'agit ici de rayons qui tombent convergens sur le second verre dont le foyer est connu, aussi bien

que la diſtance du point de la premiere convergence, qui n'eſt autre que le foyer du premier verre.

Premiere Régle.

Comme la diſtance entre le ſecond verre & le foyer du premier plus le foyer du ſecond, eſt au foyer du ſecond; ainſi le même foyer du ſecond eſt à un quatriéme terme, qui étant ôté de ce même foyer donnera la diſtance entre le foyer commun & le ſecond verre.

Cela eſt clair par la ſuſdite propoſition en faiſant application des termes. Mais il ne ſera pas inutile de donner la régle ſuivante, qui a quelque choſe de plus abregé.

Deuxiéme Régle.

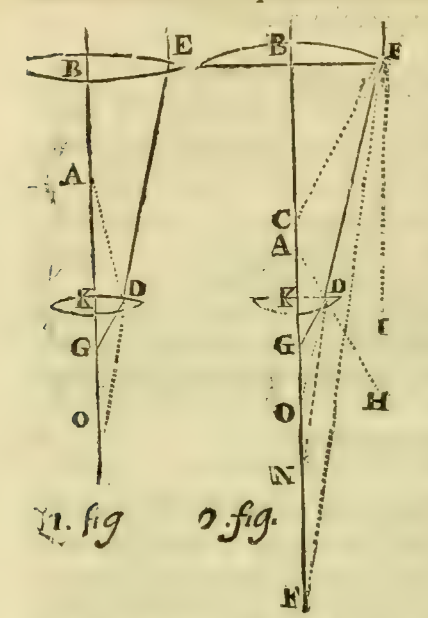
Comme la ſomme des foyers moins la diſtance des verres, eſt au foyer du verre antérieur ou objectif moins auſſi la même diſtance; ainſi le foyer du ſecond verre eſt à la diſtance qui eſt entre le ſecond verre & le foyer requis.

Démonſtration.

Soient donnez les verres convexes ou appartenans aux convexes, B, K, à diſtance BK moindre que BO longueur du foyer du verre antérieur B, & que le foyer de K ſoit auſſi connu plus petit ou plus grand que BO foyer du premier verre. Je dis que comme le foyer de K + KO, ou comme le foyer de K + le foyer de B — la diſtance BK eſt à KO, ainſi le foyer de K eſt à KG foyer requis.

Soient les verres B, K réduits à deux plano-convexes équivalens & placez comme en la deuxiéme figure à la diſtance donnée BK, alors le demi-diamétre CE ſera moitié de BO foyer du convexe antérieur, & AD auſſi

demi-diamétre du plano-convexe K, sera moitié du foyer du second verre K premierement donné. Puis donc qu'en la seconde figure il se fait en E deux réfractions, la premiere IEF $= \frac{1}{3}$ C, & la seconde FED $= \frac{1}{2}$ IEF, & partant $= \frac{1}{6}$ C. Il s'ensuit que ED prolongée tomberoit en O foyer de B; mais à cause que ED avant de passer le second verre, souffre deux réfractions en D, l'une par la surface plate de K, sçavoir ODN, qui rétablit DN au parallelisme de EF; il est clair qu'à cause de la troisiéme réfraction, le rayon ED, au lieu d'aller droit en O foyer de B, est détourné en N, ensorte que l'angle N $= \frac{1}{3}$ C, aussi bien que F. Et enfin ayant prolongée la perpendiculaire AD en H, la derniere réfraction NDG $= \frac{1}{2}$ HDN; mais



Les angles marquez par une seule lettre sont aigus.

HDN $=$ A $+$ N, donc
NDG $= \frac{1}{2}$ A $+ \frac{1}{2}$ N; mais
G $=$ NDG $+$ N, donc
G $= \frac{1}{2}$ A $+ \frac{1}{2}$ N $+$ N, ou bien
G $= \frac{1}{2}$ A $+ \frac{1}{2}$ C : mais à cause des réfractions IEO,
O $= \frac{1}{2}$ C : donc
G $=$ O $+ \frac{1}{2}$ A, ou 2 G $=$ 2 O $+$ A, ainsi comme 2 O $+$ A | A || 2 G | A, ou

comme 2 AD + DO | DO || 2 AD | DG. Or par la conſtruction 2 AD = AD foyer du ſecond verre donné : donc dans la premiere figure

AD + DO | DO || AD | DG, c'eſt-à-dire

AK + KO | KO || AK | KG, comme il eſt exprimé par la régle.

Premier Corollaire.

On verra par le calcul que le foyer commun ſera toûjours plus long du côté du verre plus convexe ; c'eſt-à-dire qu'ayant propoſé deux verres inégaux, ſi on prend le moins convexe pour premier & l'autre pour ſecond, le foyer ſera plus long que ſi on prenoit le plus convexe pour premier & qu'on gardât toûjours la même diſtance des verres entr'eux.

Notez qu'il n'importe où tombent les centres A, C, & qu'il ſe peut faire qu'ils ſoient tranſpoſez, & même que A ſoit au-deſſus de B, & C au-deſſous de K : car la démonſtration eſt toûjours la même.

Notez auſſi que la diſtance BK ordinairement comprend $\frac{1}{3}$ de l'épaiſſeur du verre antérieur & $\frac{2}{3}$ de celle du ſecond, outre l'intervale entre les verres.

VINGT-QUATRIÈME PROPOSITION.

Un verre concave étant mis entre un verre convexe & ſon foyer à diſtance connuë, enſorte qu'il reçoive les rayons paralleles, déterminer ce qui en arrivera.

JE ſuppoſe que le convexe ſoit antérieur, ce qui étant ainſi le probleme ſe réduit aux régles de la quinziéme propoſition, où un verre concave reçoit des rayons convergens.

Si le foyer du convexe diminué de la diſtance des ver- I. Cas.

res eſt égal au foyer du concave, c'eſt-à-dire, ſi le verre concave ſe trouve éloigné du foyer du convexe, d'autant juſtement que ſon propre foyer eſt long, ce qui eſt lorſque les foyers concourrent, alors les rayons convergens & tendans au foyer du verre convexe, tendront auſſi au foyer du concave, lequel par conſequent les rendra paralles par l'inverſe de la cinquiéme propoſition.

II. Cas. Si le foyer du convexe diminué de la diſtance des verres eſt moindre que le foyer du concave, alors parce que les rayons faits convergens par le convexe tendront à un point plus proche du concave que ſon propre foyer, le cas tombe dans la premiere régle de la quinziéme propoſition ſur laquelle eſt établie la ſuivante proportion, n'y ayant de difference que d'expreſſion.

Régle.

Comme la diſtance des foyers eſt au foyer du concave, ainſi le foyer du concave eſt à un quatriéme terme, duquel le foyer du concave étant ôté, on aura la diſtance entre le verre concave & le nouveau foyer requis.

II. Cas. Si le foyer du convexe diminué de la diſtance des verres eſt plus grand que le foyer du concave, ce qui arrive quand la diſtance entre le verre concave & le foyer du convexe eſt plus grande que le foyer du concave, & que les rayons qui tombent convergens ſur le concave, tendent à un point au-delà du foyer du concave, le cas tombe au ſecond de la quinziéme propoſition.

Régle.

Comme la diſtance des foyers eſt au foyer du concave, ainſi le foyer du concave eſt à un quatriéme terme, auquel le foyer du concave étant ajoûté, vous aurez la di-

ſtance entre le verre concave & le point où les rayons devenus moins divergens iroient concourrir avec l'axe du verre convexe.

La démonſtration de l'une & de l'autre régle eſt toute facile par l'application à celles de la quinziéme propoſition.

J'ai toûjours parlé du foyer du concave, & non pas du centre; pour comprendre en un mot toutes ſortes de verres appartenans aux concaves, & il en eſt de même des convexes.

VINGT-CINQUIE'ME PROPOSITION.

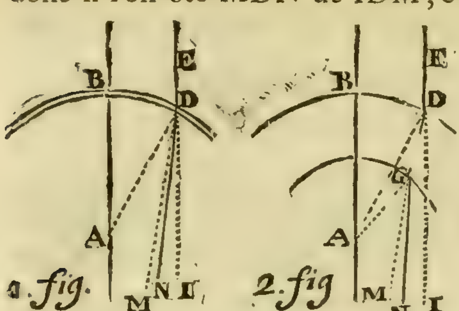
La réfraction qui ſe fait de l'air à l'eau au travers d'un verre mince quoique courbe, eſt tout de même que ſi elle ſe faiſoit immédiatement de l'air à l'eau.

IL s'agit ici de l'effet d'un verre convexe & concave ſur un même centre, mais avec fort peu d'épaiſſeur, enſorte que les deux ſurfaces ne ſont preſque qu'une, qui ſe conſidere d'un côté comme convexe & de l'autre comme concave, & où il n'y a qu'une même perpendiculaire pour l'incidence & pour l'émerſion.

On ſuppoſe que l'on ſçait par l'experience que la meſure de la réfraction de l'air à l'eau eſt comme 4 à 3, ou comme 3 à $2\frac{1}{4}$, mais celle de l'air au verre eſt comme 3 à 2; donc celle de l'eau au verre eſt comme $2\frac{1}{4}$ à 2 ou comme 9 à 8.

Soit donc dans la premiere figure BD une bouteille de verre pleine d'eau; A le centre de BD, ED rayon oblique incident prolongé en I; IDM premiere réfraction & MDN ſeconde réfraction. Paſſant de l'air au verre, la réfraction IDM $=\frac{1}{3}$ IDA; donc MDA $=\frac{2}{3}$ IDA: mais du verre à l'eau MDN $=\frac{1}{8}$ MDA ou $\frac{1}{4}$ IDM;

donc ſi l'on ôte MDN de IDM, c'eſt-à-dire, ſi du tiers IDA on ôte la moitié du même angle IDA, il reſtera $\frac{1}{4}$ pour IDM, comme ſi la réfraction avoit été faite immédiatement de l'air à l'eau.



Mais de peur qu'il ne reſte quelque ſcrupule au ſujet de l'épaiſſeur du verre, poſons dans la deuxiéme figure que la ſortie du verre ſe faſſe en G un peu diſtant de D & ſoit tirée la ſeconde perpendiculaire AG; alors la ſeconde incidence ſera MGA plus grande que n'auroit été MDA de la quantité de l'angle DAG, lequel dépend de l'épaiſſeur GD : donc la ſeconde réfraction MGN étant $\frac{1}{8}$ de MGA ſera $=$ $\frac{1}{8}$ MDA $+$ $\frac{1}{8}$ GAD, ou $\frac{1}{4}$ IDM $+$ $\frac{1}{8}$ GAD : vous voyez donc que l'excès n'eſt que de $\frac{1}{8}$ de DAG, par lequel la convergence de GN ſera un peu moindre que DN dans la premiere figure, mais inſenſiblement à moins que l'épaiſſeur ne ſoit fort grande.

Corollaire.

En appliquant les précedentes démonſtrations à ce qui ſe fait dans l'air des deux côtez, on verra qu'au premier cas les rayons demeureront paralleles comme ſi le verre avoit les deux côtez plats & paralleles : mais qu'au ſecond cas où l'épaiſſeur eſt ſenſible, la ſeconde réfraction étant $\frac{1}{2}$ MGA, MDN ſeroit $=$ $\frac{1}{2}$ MDA $+$ $\frac{1}{2}$ GAD, c'eſt-à-dire IDM $+$ $\frac{1}{2}$ GAD, & ainſi GN deviendroit divergent, ce qui n'arrive pas dans l'eau à cauſe du peu de réfraction du verre à l'eau.

VINGT-SIXIE'ME

VINGT-SIXIE'ME PROPOSITION.

Probleme. Les convexitez de l'eau étant connuës trouver le foyer.

Régle.

COMME la somme des diamétres est à un diamétre, ainsi l'autre susqui-diamétre est au foyer.

Démonstration.

Soit B de l'eau en forme de verre convexe des deux côtez, duquel on neglige l'épaisseur; & le reste comme à la troisiéme proposition.

$IDF = \frac{1}{4} C$

$FDG = \frac{1}{3} A + \frac{1}{3}$ IDF, ou $\frac{1}{3} A + \frac{1}{12} C$.

Donc IDG ou $DGA = \frac{1}{3} A + \frac{1}{3} C$.

Donc $3 DGA = A + C$.

Donc en appliquant la démonstration de la troisiéme proposition.

Comme la somme des diamétres est à un diamétre, ainsi le triple de l'autre demi-diamétre est à DG, &c. Il n'importe que l'eau soit enfermée dans du verre par la précedente proposition, mais on neglige ici l'épaisseur de l'eau.

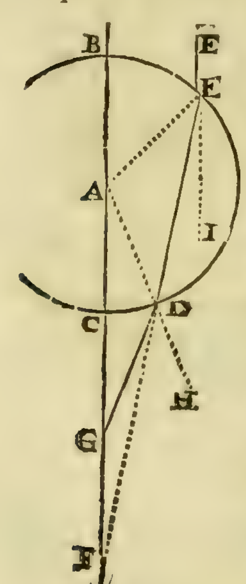
Premier Corollaire.

Il s'ensuit que si les convexitez sont égales, le foyer sera au $\frac{3}{4}$ du diamétre.

Second Corollaire.

De la démonstration de cette proposition aussi bien que de la troisiéme, il est facile de voir que pour toutes sortes de convexes plus denses à l'égard d'un plus rare ; la régle suivante est generale.

Comme la somme des diamétres est à un diamétre, ou comme la somme des demi-diamétres à un demi-diamétre, ainsi l'autre demi-diamétre multiplié par le dénominateur de la réfraction du dense au rare, est au foyer. Car les deux premiers termes demeurant toûjours les mêmes, on prend le double de l'autre demi-diamétre pour les verres convexes dans l'air ; à cause que la réfraction du verre à l'air est $\frac{1}{2}$, & pour l'eau dans l'air on prend le triple à cause que la réfraction de l'eau à l'air est $\frac{1}{3}$ & ainsi de reste.



VINGT-SEPTIE'ME PROPOSITION.

Le foyer d'une boule d'eau est à distance du demi-diamétre.

SOIT une boule d'eau BD dont le centre A, le rayon incident EE. Premiere réfraction IED. F point de l'axe où ED produit le rencontreroit. FDG derniere réfraction, & G le foyer.

IEF ou F $=\frac{1}{4}$ BAE, donc BF $=$ aux deux diamétres & BE est double de CD. Donc F $=\frac{1}{2}$ DAC, mais HDF $=$ DAC $+$ F & FDG $=\frac{1}{3}$ HDF, donc FDG $=\frac{1}{3}$F $+\frac{1}{3}$DAC, ou FDG $=\frac{1}{6}$ DAC $+\frac{1}{3}$DAC,

ou $\frac{1}{2}$ DAC. Donc F = FDG : & ainſi DG ou GC = GF. Comme donc CF eſt diamétre, CG ſera demi-diamétre.

Corollaire.

Il n'a point été parlé des plans convexes, mais il eſt facile à démontrer que leurs foyers ſeront à trois demi-diamétres, à cauſe que la réfraction de l'eau à l'air eſt $\frac{1}{3}$, &c. d'où il ſuit que les rayons divergens du ſeſqui-diamétre ſont paralleles dans la boule.

VINGT-HUITIE'ME PROPOSITION.

Tout verre plano-convexe ou convexe étant entierement dans l'eau, a ſon foyer quadruple de celui qu'il auroit dans l'air.

SOIT premierement un plano-convexe. Alors de même que la réfraction du verre à l'air qui eſt $\frac{1}{2}$ a produit deux demi-diamétres de diſtance pour le foyer dans l'air ; ainſi la réfraction du verre à l'eau qui eſt $\frac{1}{8}$ produira huit demi-diamétres pour le foyer dans l'eau, & la démonſtration eſt toute facile.

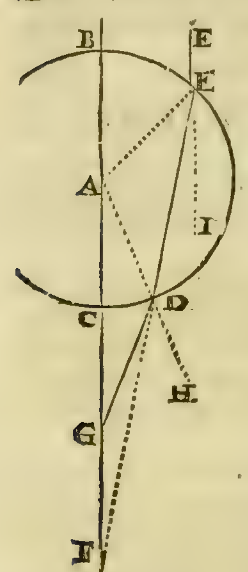
Soit ſecondement un verre convexe dans l'eau, alors par le corollaire de la penultiéme propoſition, comme la ſomme des demi-diamétres à un demi-diamétre, ainſi l'octuple de l'autre eſt au foyer : or la proportion du double à l'octuple eſt au quadruple, donc &c.



VINGT-NEUVIE'ME PROPOSITION.

Une boule de verre étant dans l'eau fait ſon foyer à un diamétre & $\frac{3}{4}$ hors la boule.

SOIENT repetées toutes les lettres de la vingt-ſeptiéme propoſition.



F $= {}_9$ BAE, donc BF $=$ neuf ſemi-diamétres : donc l'arc BE eſt à l'arc CD, ou l'angle BAE eſt à l'angle CAD comme neuf à ſept ; mais HDF $=$ DAC $+$ F, donc HDF $= \frac{8}{9}$ BAE, mais FDG $= \frac{1}{8}$ HDF, donc FDG $= \frac{1}{9}$ BAE, & ainſi FDG $=$ F, c'eſt pourquoi CF qui vaut ſept demi-diamétres, eſt diviſée en deux également en G, donc CG vaut un diamétre & $\frac{3}{4}$.

Premier Corollaire.

Pour trouver le foyer d'une boule de verre ou d'eau dans l'air, ou de verre dans l'eau, & generalement, il faut du nombre de ſemi-diamétres que dénote le dénominateur de la premiere réfraction, ôter deux, & diviſer le reſte par la moitié : car, par exemple, à cauſe que la premiere réfraction eſt $\frac{1}{9}$ il s'eſt trouvé que BF valoit neuf demi-diamétres, donc CF $=$ ſept, ce qui étant diviſé par la moitié donne CG ; & toûjours de même à proportion.

Second Corollaire.

Il s'enſuit comment on peut ſçavoir la réfraction d'une

liqueur enfermée dans une boule de verre de très-petite épaisseur ; car ayant doublé le foyer CG on trouve CF, auquel ayant ajoûté BC, la somme BF divisée par AD dénotera la proportion de la réfraction de l'air à ladite liqueur.

TRENTIE'ME PROPOSITION.

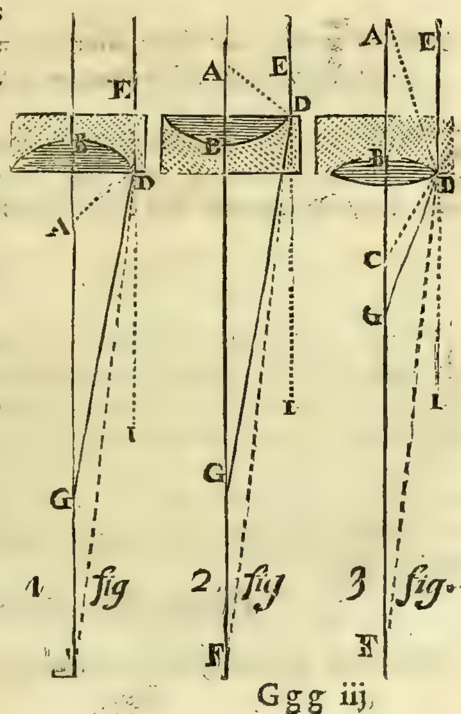
Si un verre plano-convexe a la convexité dans l'eau & le côté plat dans l'air, le foyer sera à trois diamétres de la convexité.

JE suppose que la surface de l'eau soit plate & parallele à celle du verre. *I. Cas.*

Que les paralleles tombent du côté de l'eau comme en la premiere figure, &c. F $= \frac{1}{9}$ BAD, mais FDG $= \frac{1}{2}$ F ou $\frac{1}{18}$ BAD, donc DGA $= \frac{1}{6}$ BAD, donc AD | DG || 1 | 5 ou GB $=$ 6 AD.

Que les paralleles tombent sur le verre. F $= \frac{1}{8}$ DAB de même FDG $\frac{1}{3}$ F ou $\frac{1}{24}$ DAB, donc G comme dessus est $= \frac{1}{6}$ DAB, &c.

Je suppose toûjours que l'épaisseur est negligée.



Corollaire.

De-là il s'ensuit un moyen très-facile de prolonger le foyer d'un plano-convexe donné en y appliquant quelque liqueur enfermée entre le plano-convexe & un autre verre tout plat, qu'on aura examiné avant que d'infuser la liqueur pour voir s'il ne varie point le foyer du plano-convexe donné & suivant que cette liqueur aura plus de réfraction que l'eau (comme l'eau forte, l'esprit de therebentine, &c.) aussi le prolongement sera-t-il plus grand.

TRENTE-UNIE'ME PROPOSITION.

Un verre convexe des deux côtez étant d'un côté dans l'air & de l'autre dans l'eau trouver le foyer dans l'eau.

SOIT le verre B dont les centres AC, comme en la troisiéme figure, & que l'air soit dessus & l'eau dessous, &c. on demande BG foyer dans l'eau.

Régle.

Comme la somme des demi-diamétres AB, BC, plus le double de AD duquel la convexité est dans l'eau, est à BC semi-diamétre de la convexité antérieure qui est dans l'air, ainsi l'octuple de AD est à BG.

$F = \frac{1}{3} C$ de même $FDG = \frac{1}{24} C + \frac{1}{8} A$. Donc $G = \frac{3}{8} C + \frac{1}{8} A$, donc $8 G = 3 C + A$, & comme $3 C + A \,|\, A \,||\, 8 G \,|\, A$, ou comme $3 AD - CD \,|\, CD \,||\, 8 AD \,|\, DG$.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que le verre de convexité égale auroit ici le

ſoyer dans l'eau à un diamétre de la convexité. Mais ſi on demande le foyer dans l'air, il ſera ſuivant cette proportion, Comme la ſomme des demi-diamétres augmentée du double de celui dont la convexité eſt dans l'eau, eſt au même, ainſi le ſextuple de l'autre eſt au foyer dans l'air. Car alors $F = \frac{1}{9}C$, de même $FDG = \frac{1}{18}C + \frac{1}{2}A$, donc $G = \frac{1}{6}C + \frac{1}{2}A$, donc $6G = C + 3A$, donc $AD + 3DC \mid DC \mid\mid 6AD \mid DG$.

Deuxiéme Corollaire.

De cette maniere le foyer d'un verre également convexe ſeroit dans l'air à $\frac{3}{4}$ du diamétre.

TRENTE-DEUXIE'ME PROPOSITION.

Trouver la refraction d'une liqueur Diaphane à l'égard de l'air.

Premier Moyen.

AYEZ un petit verre également convexe des deux côtez dont vous ſçachiez parfaitement le foyer dans l'air, puis prenez la longueur exacte de ſon foyer dans la liqueur donnée : doublez le foyer trouvé dans la liqueur, & diviſez le produit par le foyer dans l'air, le quotient donnera la réfraction du verre à ladite liqueur. Par exemple, ayant doublé le foyer d'un verre dans l'eau, je trouve que ce produit contient huit fois le foyer du verre dans l'air, d'où je conclus que la réfraction du verre à l'eau eſt $\frac{1}{8}$ de l'incidence & la meſure eſt comme 8 à 9; ce qui eſt fondé ſur la régle generale, que comme un demi-diamétre eſt à la ſomme des demi-diamétres, ainſi le foyer eſt à l'autre demi-diamétre multiplié par le

dénominateur de la réfraction du dense au rare, & pour faciliter j'ai supposé les demi-diamétres égaux.

Deuxiéme Moyen.

Le moyen précedent est fort simple, mais à moins d'avoir une liqueur en grande quantité on ne se peut servir que de petits verres, autrement le foyer iroit trop loin & ne seroit pas terminé dans la liqueur.

Voyez la Figure précedente.

Soit dans un plano-convexe disposé comme à la premiere figure de la trentiéme proposition & que la liqueur donnée soit mise entre deux verres, comme il a été dit au corollaire. Observez à quelle distance le verre portera son foyer G. Augmentez cette distance de la moitié, pour avoir BF que vous diviserez par le demi-diamétre, & vous aurez le terme de la réfraction de ladite liqueur au verre. Puis divisez BG par AD semi-diamétre de la convexité pour avoir la proportion de AB à BG qui s'exprimera par une fraction, laquelle fraction vous diviserez par trois, & le double du produit donnera l'angle F qui est la réfraction de ladite liqueur au verre. Exemple. J'ai trouvé qu'ayant mis de l'eau entre les verres, le foyer étoit sextuple du demi-diamétre : je prend donc le tiers d'un sixiéme, ce qui fait $\frac{1}{18}$ dont le double est $\frac{1}{9}$ pour la réfraction de l'eau au verre.

Si vous tourniez le verre comme en la seconde figure, il faudroit pour agir démonstrativement considerer la chose d'une autre maniere, & l'on trouveroit la réfraction du verre à la liqueur donnée. Mais la premiere pratique est plus facile, & d'ailleurs, puisque G est à distance égale de part & d'autre, il n'importe comme le verre soit tourné, & même l'épaisseur sera toûjours moins considerable dans la maniere de la premiere figure.

Ayant donc la réfraction ou plûtôt la mesure des réfra-

ctions

ctions de ladite liqueur au verre, ou au contraire, il sera facile de la trouver à l'égard de l'air suivant ce qui a été dit avant la premiere proposition.

Par cette même maniere on peut trouver la refraction du vuide à l'air ou plûtôt la proportion des réfractions de l'atmosphere, faisant que l'espace entre deux verres soit vuide, ce qui sera facile si cet espace étant bien fermé de tous côtez a communication seulement avec le haut d'un tuyau où se fera le vuide, & même il ne seroit pas difficile d'en tirer la hauteur de l'atmosphere, après avoir fait une table des réfractions à l'égard des incidences dans l'air ou dans le vuide.

TRENTE-TROISIE'ME PROPOSITION.

Etant donné le point de divergence d'un rayon qui tombe sur un verre dans l'eau, trouver la convergence ou divergence dans l'eau.

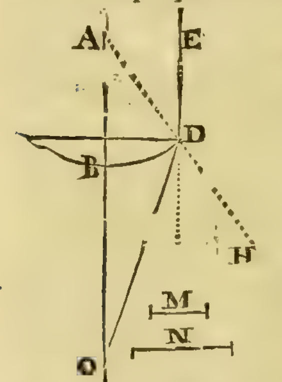
IL faut suivre les mêmes regles que le verre dans l'air, car le foyer du verre dans l'eau sera toûjours moyen porportionnel, & cela vient de ce que l'angle F est ici égal à l'angle GDO aussi bien que dans l'air, car de même qu'un tiers plus un demi-tiers font un demi pour les réfractions du verre dans l'air, ainsi $\frac{1}{9}$ plus $\frac{1}{8}$ d'un neuviéme ou $\frac{8}{72} + \frac{1}{72}$ font $\frac{1}{8}$. Pareillement pour l'eau dans l'air $\frac{1}{4}$ plus $\frac{1}{3}$ de quart ou $\frac{1}{12}$ font $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire, que les deux réfractions qui se font, par exemple, de l'air au verre convexe des deux côtez & du même verre en l'air, ne valent pas plus que si le rayon parallele sortoit imméditement du verre & de même des autres.

Je neglige de démontrer toutes ces choses en particulier d'autant que l'application aux précedentes démonstrations en est très-facile.

TRENTE-QUATRIE'ME PROPOSITION.

Si d'un plano-convexe plus dense dans un milieu plus rare, le côté plat est tourné vers l'objet, le rayon rompu est à la partie de l'axe depuis le centre de la convexité jusqu'au concours dudit rayon en raison donnée de la réfraction du dense au rare, c'est-à-dire, comme 2 à 3 pour le verre dans l'air, de 8 à 9 pour le verre dans l'eau, de 3 à 4 pour l'eau dans l'air, & ainsi generalement.

SOIT le plano-convexe BD tel que dessus & sur lequel le rayon ED tombant soit rompu en O en l'écartant de la perpendiculaire ADH, & soit la mesure de la réfraction du dense au rare exprimée par les lignes M, N. Je dis que comme M moindre terme est à N, ainsi DO est à AO.



Démonstration.

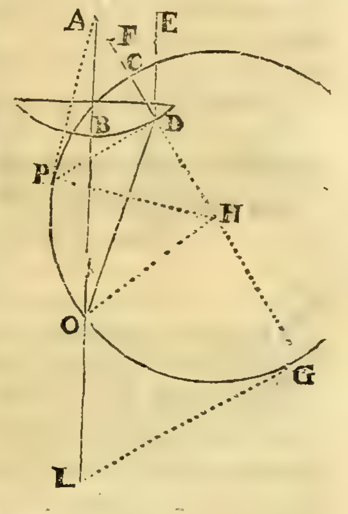
BAD = à l'incidence ADE, HDO est l'inclinaison du rayon rompu, donc par la nature des réfractions comme M est à N, ainsi le sinus de l'angle DAO est au sinus de l'angle HDO ou ADO, & partant comme M est à N, ainsi les côtez opposez DO | AO.

Corollaire.

Il s'ensuit que pour le verre dans l'air DO est à AO comme 2 à 3, & pour le verre dans l'eau comme 8 à 9, & pour l'eau dans l'air comme 3 à 4, & ainsi des autres.

Lemme. Des extrémitez d'une ligne AD, tirer deux lignes qui concourant en un point soient en raison d'inégalité donnée.

Soit AD divisée en C suivant la raison donnée M | N, ensorte que le plus grand côté soit AC duquel soit retranchée AF égale à la difference des parties AC, CD, c'est-à-dire, que CD=CF. Puis comme AF|FC|CD|| DH; & du centre H & de l'intervale HC soit décrit le cercle CG, je dis que tous les points de ce cercle, par exemple O, satisferont à la question, c'est-à-dire, que DO | AO || M moindre terme est à N plus grand, car soit tirée HO.



Démonstration.

AF | FC || CD | DH & en composant AC | FC ou CD || CH | DH & en permutant AC | CH || CD DH & en composant AH | CH ou HO || CH ou HO | DH : donc les triangles AHO, OHD ayant l'angle H commun & les côtez contenant cet angle proportionnels, les autres côtez AO, DO seront aussi proportionnels, donc OH ou CH | DH, ou bien AC | CD || AO | DO.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que AG est à DG en raison donnée & que

le point G eſt le plus éloigné terme excluſif de tous ceux qui ſatisfont à la queſtion, car AH | HG | | HG | DH, donc en compoſant & permutant AG | DG | | HG | DH ou AC | CD.

Second Corollaire.

Il s'enſuit auſſi qu'ayant tiré à AD au point D la perpendiculaire DP, qui coupe le cercle en P, la ligne PA touchera le cercle CPG ; car ayant tiré PH, les triangles APH, PDH ſeront ſemblables, & partant comme PDH eſt droit en D, APH ſera auſſi droit en P ; donc AP touchera le cercle en P.

TRENTE-CINQUIE'ME PROPOSITION.

Probleme. Etant donné un rayon incident parallele à l'axe trouver geometriquement le concours de ce rayon avec l'axe, ſuppoſé qu'il puiſſe paſſer.

SOIT ED rayon incident parallele à l'axe AB indéfiniment prolongé, & par le précedent lemme ſoit décrit le cercle CG qui coupe ou du moins touche en O au-deſſous de B l'axe AB prolongé, je dis que O eſt le concours ſuivant la meſure de la réfraction qui aura été donnée, ce qui eſt clair par le lemme précedent.

Premier Corollaire.

Il s'enſuit que plus AD ſera proche de AB, c'eſt-à-dire, plus l'incidence ſera petite & plus le concours O ſera proche de G, & partant plus éloigné de B. Et ſi on prend BL = DG, le point L ſera le terme excluſif de tous les foyers, ce qui eſt clair en faiſant tant approcher AD de AB que DG, BL concourrent.

Second Corollaire.

Il s'ensuit au contraire que le point O monte vers B à mesure que l'incidence croît jusques à ce que le demi-cercle CG touche l'axe; car alors on aura la plus grande réfraction correspondante à la plus grande incidence, suivant la mesure donnée.

Il faut remarquer que dans la figure précedente la ligne GL doit representer un arc de cercle décrit du centre A.

Troisiéme Corollaire.

Il s'ensuit aussi qu'il y a beaucoup de rayons qui concourrent fort proche du point L, à cause que le cercle CG & l'arc LG décrit sur le centre A se touchent en G; c'est pourquoi L est pris pour le foyer, quoiqu'en rigueur geometrique aucun rayon n'y vienne que de l'axe.

Quatriéme Corollaire.

Il s'ensuit que pour le foyer il faut prendre la difference des termes de la mesure de la réfraction, & dire comme la difference est au moindre des termes, ainsi le demi-diamétre AD est à DG ou BL, car par le corollaire premier du lemme précedent AG est à DG comme le plus grand terme au moindre : donc en divisant, comme la difference est au moindre terme, ainsi AD est à DG ou BL.

Ainsi le foyer d'un verre plano-convexe dans l'air est à deux demi-diamétres, à cause que la mesure est de 2 à 3, car la différence des termes est au moindre, comme 1 à 2. Or ce qui est démontré du plano-convexe se peut étendre au convexe des deux côtez, en réduisant une convexité en deux qui fassent le même effet : mais

la démonstration n'est pas si geometrique, quoiqu'en effet il n'y ait dans l'experience aucune difference.

TRENTE-SIXIE'ME PROPOSITION.

Pour la proportion des ouvertures des objectifs & de leurs oculaires.

LA proportion de l'objectif à l'oculaire donne la multiplication de la lunette ; car l'angle visuel se trouve autant de fois multiplié, que le foyer de l'oculaire est contenu dans celui de l'objectif. Ce qui se doit néanmoins entendre dans les petits angles. C'est-à-dire lorsque les angles sont entr'eux comme leurs tangentes : car pour déterminer la chose plus exactement, il faut dire que comme le foyer de l'oculaire est à celui de l'objectif, ainsi la tangente de la moitié de l'angle de premiere incidence est à la tangente de la moité de l'angle visuel multiplié par la lunette. Cela même aussi suppose que la pointe de l'angle visuel, ou le lieu de la prunelle, se rencontre justement au foyer de l'oculaire : ce qui n'est pas : Car comme le foyer de l'objectif est au foyer de l'oculaire, ainsi le même foyer de l'oculaire est à ce qu'il y a de plus que le foyer de l'oculaire. Mais c'est si peu qu'on le peut negliger sans erreur.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que la multiplication d'une lunette s'exprime par le quotient de la division de l'objectif par l'oculaire.

Second Corollaire.

Il s'ensuit aussi que deux lunettes sont entr'elles com-

me les susdits quotiens qui donnent la proportion des angles visuels à l'égard d'un même objet.

Premier Lemme.

Si deux quantitez D, E sont divisées par une même A, les quotiens B, C seront entr'eux comme les quantitez divisées D, E. Car puisque le rectangle sur le quotient & le diviseur est égal au divisé, le rectangle AB rect. | AC | | D | E, c'est-à-dire B | C | | D | E.

D	E
B	C
A	A

Second Lemme.

Si une même quantité A est divisée par deux differentes D, E, les quotiens B, C seront en raison réciproque des diviseurs. Car les rectangles DB, EC étant égaux, B sera à C comme E à D.

Troisiéme Lemme.

Si les diviseurs A, B, sont comme les divisez D, E, les quotiens C, D seront égaux. Car ils exprimeront une même proportion, & les deux rectangles AC, DB étant comme D, E, c'est-à-dire comme les bases A, B, il faut que les hauteurs C, D soient égales.

D	E
C	D
A	B

Quatriéme Lemme.

Si les diviseurs AB sont en raison sous-doublée des divisez DE, les quotiens CD seront entr'eux comme les diviseurs.

Soit F troisiéme proportionnelle aux diviseurs AB, & partant comme D à E, & soit G le quotient de E par F. Par le troisiéme lem-

D		E
C	D	G
A	B	F

me, les quotiens CG ſeront égaux, & par le ſecond lemme le quotient G eſt à D comme B à F. Donc C qui eſt égal à G ſera à D, comme B à F, c'eſt-à-dire comme A à B.

Cinquiéme Lemme.

Si les diviſeurs AB ſont en raiſon ſous-triplée des diviſez DE, les quotiens CD ſeront en raiſon doublée des diviſeurs AB.

Soit D | E | | A | F | c'eſt-à-dire, que B ſoit à F en raiſon doublée de A à B, & que le quotient de la diviſion de E par F ſoit G, comme deſſus : les quotiens CG ſeront égaux; & d'ailleurs G ſera à D, comme B à F : donc C, qui eſt égal à G, ſera à D, comme B à F, c'eſt-à-dire en raiſon doublée de A à B.

D		E
C	D	G
A	B *	F

Sixiéme Lemme.

Si les diviſeurs ſont en raiſon ſous-quadruplée, les quotiens ſeront en raiſon triplée des diviſeurs.

TRENTE-SEPTIE'ME PROPOSITION.

SI les oculaires ſont proportionnels aux objectifs, les multiplications ou approches ſeront égales. Cela ſuit du premier & du ſecond corollaire de la trente-ſixiéme Propoſition & du troiſiéme Lemme.

TRENTE-HUITIE'ME PROPOSITION.

SI deux objectifs inégaux ont des oculaires égaux, les multiplications ſeront en proportion des objectifs. Cela ſuit des Corollaires de la trente-ſixiéme Propoſition & du premier Lemme. J'entens que les angles viſuels,

&

& partant les diamétres des peintures dans l'œil seront comme les foyers des objectifs : mais les grandeurs superficielles des mêmes images en seront en raison doublée.

TRENTE-NEUVIE'ME PROPOSITION.

SI les oculaires étant proportionnels aux objectifs, les ouvertures des objectifs sont égales, les clartez seront égales. Car par la trente-septiéme Proposition les multiplications, c'est-à-dire les angles visuels, & partant les peintures dans l'œil, seront égales : & d'ailleurs, à cause de l'égalité des ouvertures, les images auront pareille quantité de lumiere ramassée en espaces égaux, &c.

QUARANTIE'ME PROPOSITION.

SI les oculaires étant égaux, les diamétres des ouvertures des objectifs sont proportionnels aux mêmes objectifs, les clartez seront égales. Car par la trente-huitiéme Proposition les angles visuels seront comme les objectifs. Si donc les ouvertures sont comme les mêmes objectifs, les images dans l'œil recevront des rayons à proportion de leur grandeur ; c'est-à-dire que les espaces éclairez seront proportionnels aux lumieres, & partant également éclairez.

QUARANTE-UNIE'ME PROPOSITION.

SI les oculaires & les ouvertures diamétrales des objectifs sont en proportion des objectifs, les clartez seront en raison doublée des mêmes objectifs. Car par la trente-septiéme Proposition, les peintures dans l'œil seront égales en grandeur, & par conséquent éclairées en proportion de la quantité de lumiere qu'ils contien-

dront, c'eſt-à-dire en proportion de la grandeur ſuperficielle des objectifs, laquelle eſt doublée de la diamétrale.

QUARANTE-DEUXIE'ME PROPOSITION.

SI des objectifs inégaux ayant des oculaires égaux, ont auſſi des ouvertures égales, les clartez ſeront réciproquement en raiſon doublée des objectifs. Car par la trente-huitiéme les images dans l'œil priſes comme ſurfaces, ſeront en raiſon doublée. Mais d'ailleurs elles ne recevront qu'une égale quantité de rayons qui ſe trouvera plus unie & plus forte dans le petit eſpace que dans le grand, & ce en raiſon réciproque des eſpaces.

QUARANTE-TROISIE'ME PROPOSITION.

SI les oculaires, & auſſi les diamétres des ouvertures des objectifs ſont en raiſon ſous-doublée des objectifs, les multiplications ou angles viſuels ſeront en raiſon auſſi ſous-doublée, & ces clartez ſeront égales. La premiere partie ſuit du quatriéme Lemme & des Corollaires de la trente-ſixiéme Propoſition. Or les angles viſuels étant en raiſon ſous-doublée des objectifs, & les ouvertures de même, les eſpaces ſeront éclairez à proportion de leur grandeur, &c.

Notez que ſuivant cette proportion, l'augmentation ſuperficielle des peintures dans l'œil ſera en raiſon des objectifs, de même auſſi que la grandeur ſuperficielle des ouvertures des objectifs.

QUARANTE-QUATRIE'ME PROPOSITION.

SI les oculaires ſont en raiſon ſous-triplée des objectifs, & les ouvertures diamétrales en raiſon doublée des oculaires, les angles viſuels ou approches ſeront

auſſi en raiſon doublée des oculaires, & les clartez ſeront égales. La premiere partie ſuit du cinquiéme Lemme : Car les oculaires ſont les diviſeurs & les quotiens répondent aux angles viſuels. Puis donc que les oculaires ſont en raiſon ſous triplée, les angles viſuels ſeront en raiſon doublée des oculaires. Et enfin, puiſque par l'hypotheſe les ouvertures ſont auſſi en raiſon doublée des oculaires, elles ſeront comme les angles viſuels. Partant les clartez égales : car les peintures dans l'œil étant en raiſon des ouvertures des objectifs, les quantitez de lumiere ſeront proportionnelles aux eſpaces où elles ſeront contenuës.

Des foyers qui ſe font par reflexion & par refraction tout enſemble.

UN verre expoſé au ſoleil ne laiſſe pas paſſer tous les rayons, mais il en refléchit une partie non ſeulement par ſa ſurface antérieure, mais encore par la poſtérieure, quoiqu'elle ne ſoit point terminée.

Les rayons ainſi refléchis s'uniſſent ou ſe ſéparent, ſuivant la qualité des ſurfaces.

La refléxion faite par la ſurface antérieure eſt ſimple; mais celle qui ſe fait par la poſtérieure eſt diverſement modifiée par les réfractions cauſées par la ſurface antérieure.

Il eſt facile de connoître ſi un foyer de refléxion vient de la ſurface antérieure ou de la poſtérieure : car aux verres qui ne ſont point meniſques, tout foyer de refléxion vient de la ſurface poſtérieure. Il en eſt de même aux meniſques, lorſque les convexitez ſont tournées vers le ſoleil. Mais ſi les cavitez ſont tournées vers le ſoleil, il ſe fait alors deux foyers d'un même côté, dont le plus éloigné & par conſéquent le plus large & le plus foible, vient de la cavité antérieure, ſe faiſant à diſtance du

quart du diamétre de la même cavité. Ce qui donne une facilité à connoître ces ſortes de verres. Mais lorſque nous parlerons ci-après des foyers de refléxion, nous entendrons toûjours parler des foyers qui ſe font par la ſurface poſtérieur, qui ſont faciles à connoître.

Régles generales.

1. Si un verre ne fait foyer de refléxion que d'un ſeul côté, il ſera meniſque. La converſe n'eſt pas veritable.

2. Si un verre fait deux foyers, l'un d'un côté & l'autre de l'autre, & que l'un ſoit juſtement à diſtance triple de l'autre, ce verre ſera plano-convexe, le plat ſera vers le plus court foyer.

Ce plus court foyer ſe fera au tiers de la diſtance du centre de la convexité : la longueur du verre ſera ſextuple de ce petit foyer, ou bien ſera double de l'autre.

3. Si un verre fait deux foyers oppoſez, dont l'un ſoit moindre que triple de l'autre, le verre ſera convexe des deux côtez. Et ſi le quart de la ſomme des foyers eſt ôté de chaque foyer, on aura deux termes qui exprimeront la raiſon des diamétres des deux convexitez.

Mais pour trouver le foyer de réfraction, il faut faire Comme la ſomme des foyers de refléxion eſt à l'un des foyers, ainſi le double de l'autre eſt à $\frac{1}{4}$ du foyer de réfraction requis.

Le petit foyer eſt toûjours vers le côté moins convexe.

Notez que ſi les deux foyers ſont égaux, la longueur du verre eſt quadruple de chacun.

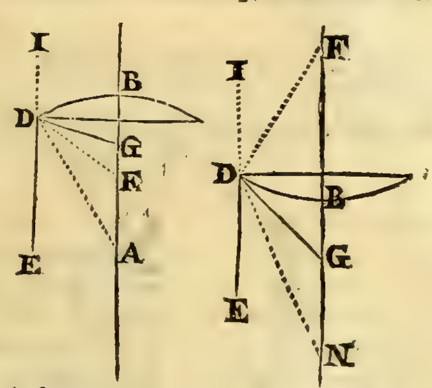
4. Si le grand foyer excede le triple de l'autre, le verre ſera meniſque.

Le petit foyer ſera vers la partie cave.

QUARANTE-CINQUIE'ME PROPOSITION.

Si la surface plate d'un plano-convexe est tournée vers le Soleil, la refléxion du fond portera son foyer à $\frac{1}{3}$ du demi-diamétre.

SOIT A le centre de la convexité, ED rayon incident; F moitié de BA, ED viendra jusques au fond sans refraction, & delà par la réfléxion devroit être porté en F: mais à cause de la surface plate, le concours est approché du tiers de BF en G: donc BG $= \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$ c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ AB. Et alors la refléxion de la premiere surface qui est plate sera égale à ladite surface, ou seulement plus grande de ce que donne la base de 30′ prise à distance de GB.



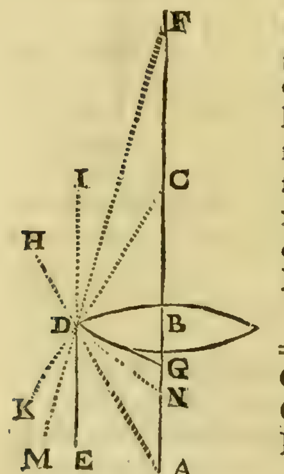
Si la convexité est vers le Soleil, la refléxion du fond aura son foyer à la distance du centre: car la premiere réfraction à l'entrée de la convexité porteroit le rayon au sesqui-diamétre F: donc la refléxion du fond, s'il ne suivoit point de réfraction; le porteroit en N à même distance: donc ayant prolongé ED en I, vous voyez qu'il arrivera le même à DN, que si venant de ID, il avoit passé à travers un verre également convexe des deux côtez, c'est-à-dire qu'il sera porté au centre G. Et alors la réfléxion de la convexité sera élargie comme venant

de derriere le verre à distance du quart du diamétre.

Dans l'un & dans l'autre cas la refléxion du fond se trouvera toûjours au milieu de celle du dessus, si le plus épais est bien au milieu, c'est-à-dire si le centre répond à plomb au milieu : autrement il faudra rogner le verre du côté le plus mince pour faire trouver le centre au milieu ; & on se pourra régler par le moyen d'un cercle de carton appliqué sur le verre, & poussé plus ou moins de côté & d'autre, jusques à ce que la refléxion soit juste.

QUARANTE-SIXIE'ME PROPOSITION.

Le fond d'un verre également convexe porte sa réflexion à $\frac{1}{4}$ du demi-diametre.



SOIENT les centres A, C; le rayon incident ED prolongé en I, & les perpendiculaires prolongées ADH, CDK. Soit la premiere réfraction IDF, à laquelle soit EDM égale : puis soit la refléxion ADN = ADM, & enfin la derniere réfraction NDG = $\frac{1}{2}$ KDN.

MDA = A + $\frac{1}{3}$ C, & MDN = 2 A + $\frac{2}{3}$ C : mais KDM = $\frac{2}{3}$ C : donc KDN = 2 A + C + $\frac{1}{3}$ C. Mais NDG = $\frac{1}{2}$ KDN : donc NDG = A + $\frac{2}{3}$ C, donc KDG = 3 A + 2 C, & ayant ôté KDE ou C, il restera 3 A + C = DGC : donc

Comme 3 A + C | C || DGC | C, ou bien
Comme 3 DC + AD | AD || DC | DG ou GB. Si donc les convexitez sont égales, AB sera quadruple de

BG. Et ainsi generalement, comme le sesqui-diamétre de la convexité antérieure qui fait les réfractions, augmenté du demi-diamétre de la convexité qui fait la refléxion, est à ce demi-diamétre, ainsi le demi-diamétre de la convexité antérieure est au foyer.

TRENTE-SEPTIE'ME PROPOSITION.

Pour les Menisques qui appartiennent aux convexes.

LORSQUE les cavitez sont tournées vers le soleil. *I. Cas.*
Soient les centres A, C, le rayon incident ED, les perpendiculaires ADH, CDK.

$MDC = \frac{2}{3}C$, & $MDA = CDA + \frac{2}{3}C$.

$MDN = 2\,CDA + C + \frac{1}{3}C$.

$CDN = 2\,CDA + \frac{2}{3}C$.

$NDG = CDA + \frac{1}{3}C$: donc

$CDG = 3\,CDA + C$: donc

EDG ou $DGB = 3\,CDA + 2\,C$, & partant

Comme $3\,CDA + 2\,C \mid C \mid\mid DGB \mid C$. Ou bien

Comme $3\,CA + 2\,DA \mid DA \mid\mid DC \mid DG$ ou BG, donc comme la sesqui-difference des demi-diamétres augmentée du demi-diamétre de la convexité qui fait la refléxion, est au demi-diamétre de la même convexité ; ainsi le demi-diamétre de la convexité qui fait les refléxions, est au foyer.

Lorsque les convexitez sont tournées vers le soleil. *II. Cas.*

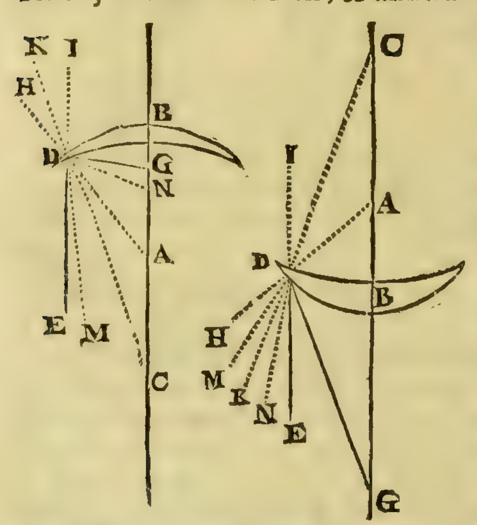
Le rayon ED de premiere incidence étant rompu par la premiere convexité, tombe sur la seconde, comme s'il étoit dans la position de MD ; & si BC est triple de BA, alors MD tombera sur KD & le rayon résortira sur DE comme il étoit venu. Mais si BC est plus grand que triple, alors MD tombera entre KD & DH & se voudra refléchir selon KDN égal à KDM ; mais par la derniere

réfraction, il sera détourné en G, ensorte que NDG sera moitié des angles NDK & KDH ou ADC.

MDH $=\frac{2}{3}$ A, donc KDM $=$ ADC $-\frac{2}{3}$ A : mais
KDM $=$ KDN, donc KDN $=$ ADC $-\frac{2}{3}$ A ; donc
NDH $=$ 2 ADC $-\frac{2}{3}$ A, donc NDG $=$ ADC $-$
$\frac{1}{3}$ A & ajoûtant NDK on aura KDG $=$ 2 ADC $-$ A : mais
G $=$ KDG $-$ C ; donc G $=$ ADC $-$ 2 C. Donc
Comme ADC $-$ 2 C | C || G | C : c'est-à-dire
Comme CA $-$ 2 AD | AD || CD | DG. Donc

Comme la difference des demi-diamétres diminuée du double du petit demi-diamétre est au petit demi-diamétre, ainsi le grand demi-diamétre est au rayon.

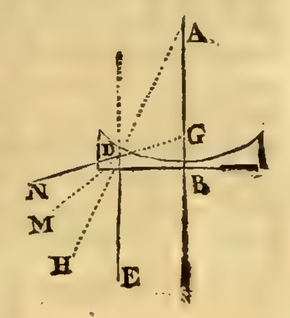
Où il est clair, que si un demi-diamétre est justement triple de l'autre, le double du petit étant ôté de la difference, le reste sera rien ; & ainsi la distance du foyer sera infinie. Mais si le grand demi-diamétre CD étoit moindre que triple du petit AD, alors le rayon ED par la premiere réfraction prendroit la position de ND & se refléchiroit au-dessus de DK, & quelquefois aussi selon DK, ce qui arriveroit quand AD seroit double de CA, c'est-à-dire, quand les demi-diamétres seroient comme 3 à 2, & alors il n'y auroit point de seconde réfraction, car le rayon sortiroit selon



ſelon la divergence de HA. Que ſi CA étoit égal à AD, la refléxion s'étant faite entre HD & DK, le rayon ſortiroit enfin ſelon CD, & ainſi du reſte à proportion, c'eſt-à-dire, qu'en augmentant CA un peu plus que la moitié de CB, le rayon ſortira comme divergeant d'un point de l'axe plus éloigné que C.

QUARANTE-HUITIE'ME PROPOSITION.

LES verres plano-concaves dont la cavité regarde le ſoleil font foyer au quart du diamétre de ladite cavité; mais le fond fait une refléxion divergente, comme de la diſtance du centre de la cavité pris derriere. Si le plat eſt vers le ſoleil, le fond fait refléxion divergente comme du tiers du demi-diamétre. Car le rayon entre ſans réfraction & la refléxion MDH = A & EDM = 2 A, donc à la ſortie la réfraction MDN = A : donc DGB = 3 A, donc ADB = 2 A. Et ainſi AG | GB | | 2 | 1.



Notez que de tous verres qui ramaſſent les rayons, la plus forte refléxion vient toûjours du fond, & au contraire de ceux qui les écartent.

Notez auſſi que l'on peut facilement connoître ſi une refléxion vient du fond en appliquant le verre ſur de l'eau, car dans l'attouchement de l'eau la refléxion du fond s'affoiblit fort ſenſiblement, & cela ſe peut faire à la chandelle ou au ſoleil.

QUARANTE-NEUVIE'ME PROPOSITION.

Les deux foyers de refléxion de part & d'autre étant donnez, trouver les diamétres des convexitez.

CETTE propoſition eſt la converſe de la 46e. Soient les deux foyers réduits à une meſure commune aſſez petite pour avoir des nombres entiers. De leur ſomme ſoit pris le quart, lequel ſoit ſéparement ôté de chaque foyer & les reſtes vous donneront deux termes pour la proportion des diamétres. Maintenant avec ces deux termes, comme ſi c'étoient de veritables diamétres, cherchez un nouveau foyer de refléxion, ſuivant la régle de la 46e propoſition, lequel vous voudrez; & la proportion de ce nouveau foyer de refléxion trouvée, avec celui des donnez qui lui eſt ſemblable, vous donnera les diamétres. Car comme ce nouveau foyer trouvé eſt au donné, ainſi lequel vous voudrez des termes de la proportion des diamétres, donnera le diamétre correſpondant audit terme.

Démonſtration.

Soient les demi-diamétres A, G, & les foyers M, N.

$3A + G \mid G \mid\mid A \mid M$

$3G + A \mid A \mid\mid G \mid N$, donc le rectangle de M ſur $3A + G$ = au rectangle de N ſur $3G + A$.

Donc $M \mid N \mid\mid 3G + A \mid 3A + G$, donc *componendo*

$M + N \mid N \mid\mid 4G + 4A \mid 3A + G$, &

$\frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid N \mid\mid G + A \mid 3A + G$, & *invertendo*

$\left\{ \begin{array}{l} N \mid \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid\mid 3A + G \mid G + A \text{, \& de même} \\ M \mid \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid\mid 3G + A \mid A + G \text{, \& } \textit{dividendo} \end{array} \right.$

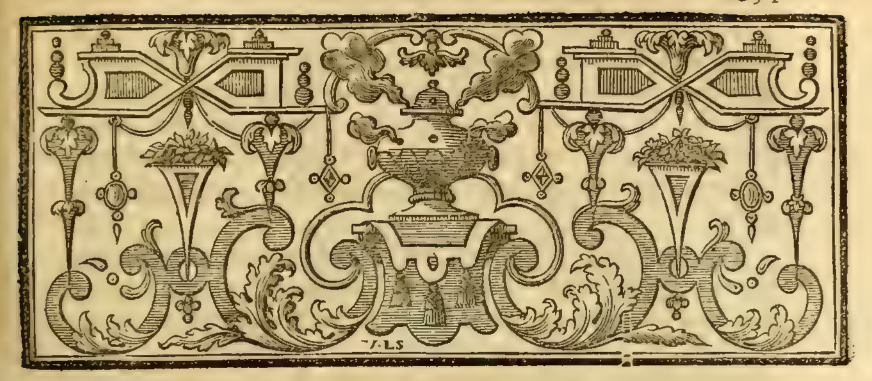
$N - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid\mid 2A \mid G + A$,
& de même
$M - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid\mid 2G \mid A + G$,
& permutando
$N - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid 2A \mid\mid \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid G + A$,
& de même
$M - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid 2G \mid\mid \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}N \mid A + G$,
donc
$N - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid 2A \mid\mid M - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid 2G$,
& permutando
$N - \frac{1}{4}M - \frac{1}{4}N \mid M - \frac{1}{4}M - {}^{11}N \mid\mid 2A \mid 2G$.

Donc ſi l'on ôte de chaque foyer le quart de la ſomme des foyers, vous aurez la proportion des diamétres. Et pour diſcerner à quelle convexité appartient chaque diamétre, il faut ſçavoir que le plus grand diamétre appartient à la convexité qui eſt du côté du petit foyer : car ſi M eſt plus grand que N, $3A + G$ ſeront plus petits que $3G + A$.



TRAITÉ
DU
NIVELLEMENT.

PAR M. PICARD.



TRAITÉ DU NIVELLEMENT.

CHAPITRE PREMIER.

De la Theorie du Nivellement.



ON appelle des Points de Niveau, ceux qui ſont également éloignez du centre de la Terre :

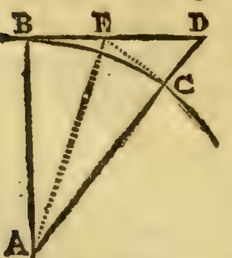
D'où il s'enſuit qu'une ligne, qui dans toute ſa longueur ſeroit parfaitement de niveau, auroit tous ſes points rangez dans une courbure circulaire dont le centre ſeroit celui de la Terre.

Suppoſant donc que tous les points de la ſuperficie des corps liquides, qui ne ſont point agitez, ſont également éloignez du centre de la Terre, nous dirons que tous les points de la ſuperficie de ces corps ſont de niveau, comme celle des Mers, des Lacs, des Etangs, & generalement de toutes les liqueurs qui n'ont point de mouvement.

On pourroit donc par ce moyen déterminer le niveau de deux points en ſe ſervant d'un canal rempli d'eau, qui les toucheroit : mais comme cette méthode ne pourroit être commodément miſe en pratique que dans de petites diſtances, on eſt obligé de ſe ſervir du rayon viſuel, que l'on dirige par le moyen de quelque inſtrument dont toute la juſteſſe tend à bien établir une ligne qui ſoit parallele à une autre ligne que l'on ſuppoſe dans l'horizon du lieu où l'on fait l'obſervation, ou qui faiſant une angle droit avec celle du perpendicule, qui eſt une ligne qui tend au centre de la Terre, s'éleve au-deſſus du vrai niveau autant qu'une touchante s'écarte de la circonférence d'un cercle à meſure qu'elle s'éloigne du point où elle le touche.

Cette ligne droite parallele à l'horizon ſera appellée dans la ſuite *ligne du Niveau apparent.*

Ce qui vient d'être expliqué ſe comprendra plus aiſément dans la figure ſuivante, où le point A repreſente



le centre de la Terre ſur lequel on a décrit l'arc du vrai niveau BC, & la ligne BD qui touche cet arc de cercle au point B où l'on fait l'obſervation pour le Nivellement, repreſente le niveau apparent qui ſera à angles droits avec AB par la 16[e] Propoſit. du 3[e] Livre d'Euclide; BA eſt la ligne du perpendicule; A D eſt une ſecante de l'arc de cercle

cercle BC, laquelle ſurpaſſe le demi-diamétre AC de la quantité de la ligne CD, qui eſt l'excès dont le niveau apparent s'éleve au-deſſus du vrai pour l'arc BC, ou pour l'angle BAC.

On doit remarquer que juſqu'à la diſtance de 100 toiſes, le niveau apparent s'éleve ſi peu au-deſſus du vrai, que la correction que l'on y doit faire n'eſt pas conſiderable, & que l'on peut ſans faire une erreur ſenſible, prendre le niveau apparent pour le vrai : mais ſi l'on negligeoit cette correction dans des diſtances plus longues que 100 toiſes, on feroit des erreurs très-conſiderables, comme l'on pourra voir dans la Table ſuivante, qui ſervira à trouver le vrai niveau par le moyen de l'apparent, ce qui ſuppoſe que l'inſtrument dont on ſe ſert ſoit juſte, & que d'ailleurs le rayon viſuel ſoit droit, ce qui n'eſt pas toûjours, principalement dans les diſtances un peu conſiderables, où quelquefois les réfractions le font aller en ligne courbe, dont on parlera dans la ſuite.

Dans la Table ſuivante, la premiere colonne marque en toiſes, les diſtances entre la ſtation où l'on fait le Nivellement ; & le lieu qui eſt nivelé, c'eſt-à-dire où l'on pointe le Niveau.

L'autre colonne contient les pieds, pouces, & lignes dont le niveau apparent eſt plus élevé que le vrai pour les diſtances qui ſont miſes à côté ; enſorte que l'on doit abaiſſer le niveau apparent de la quantité des pieds, pouces & lignes de la ſeconde colonne, ſuivant les diſtances qui leur ſont correſpondantes, pour avoir le vrai niveau.

TABLE DES HAUSSEMENS du Niveu apparent pardessus le vrai, jusqu'à la distance de 4000 toises.

Distances.	Haussemens.		
Toises.	*Pieds.*	*Pouces.*	*Lignes.*
50	0	0	0 1/3
100	0	0	1 1/3
150	0	0	3
200	0	0	5 1/3
250	0	0	8 1/3
300	0	1	0
350	0	1	4 1/3
400	0	1	9 1/3
450	0	2	3
500	0	2	9
550	0	3	6
600	0	4	0
650	0	4	8
700	0	5	4
750	0	6	3
800	0	7	1
850	0	7	11 1/2
900	0	8	11
950	0	10	0
1000	0	11	0
1250	1	5	2 1/2
1500	2	0	9
1750	2	9	8 1/2
2000	3	8	0
2500	5	8	9
3000	8	3	0
3500	11	2	9
4000	14	8	0

La Régle qui sert à trouver les haussemens du niveau apparent pardessus le vrai, est de diviser le quarré de la distance par le diamétre de la Terre, qui selon notre mesure est de 6538594 * toises, & c'est pour cette raison que les haussemens du niveau apparent sont entr'eux comme les quarrez des distances, ce que l'on peut voir dans la Table.

Le fondement du calcul proposé pour trouver les haussemens du niveau apparent, n'est pas Geometrique; mais il en approche si fort, que dans la pratique il ne peut s'ensuivre aucune erreur sensible.

Car il est vrai de dire, que comme le demi-diamétre AB est à la touchante BD, ainsi CE ou BE touchante de la moitié de l'angle BAD est à CD, à cause des triangles semblables ABD, ECD, qui sont rectangles en B & en C, à cause des touchantes BC CE par la 18[e] Proposition du 3[e] Livre d'Euclide, & qui ont l'angle commun au point D; mais si l'on double le premier & le troisiéme terme de cette proportion, on aura comme le diamétre entier de la touchante BD, ainsi le double de BE, que l'on suppose égal à BD, sera à CD qui est la correction requise; c'est pourquoi le produit des termes moyens de cette derniere proportion, qui est le quarré de BD étant divisé par le premier terme, qui est le diamétre de la Terre, produira la correction CD: Or on peut supposer aux petits angles, tels que sont ceux dont il s'agit dans la pratique du Nivellement, que le double de BE est égal à BD,

* Quoique dans cette question, l'extrême précision dans la connoissance du diamétre de la Terre, ne soit pas requise, il est bon d'avertir, que cette grandeur qu'on lui donne ici, a été confirmée depuis, par les Observations de la fameuse Meridenne de Paris.

& par conséquent le diamétre de la Terre est à la distance BD des points que l'on veut mettre de niveau, comme cette même distance BD au haussement CD du niveau apparent pardessus le vrai.

Les haussemens du niveau apparent ne sont pas tels qu'ils devroient être en effet, à cause de la réfraction qui fait paroître l'objet au-dessus du lieu où il est effectivement : mais outre que la réfraction n'est pas sensible lorsque la distance n'excede pas 1000 toises; voici encore deux moyens pour déterminer le vrai niveau indépendamment non seulement de la réfraction, mais encore des haussemens du niveau apparent, & de ce qui pourroit arriver de la part de l'instrument, sans qu'il importe qu'il soit juste, ou non, pourvû qu'il demeure toûjours dans le même état, & qu'on s'en serve aussi de la même maniere.

METHODE PREMIERE.

Pour niveler sans faire la vérification de l'instrument, & sans avoir égard aux haussemens du niveau apparent pardessus le vrai, ni à la réfraction.

Il faut placer l'instrument à égale distance des termes où l'on veut marquer des points de niveau; car il est évident que si d'une même station, & avec un instrument qui demeure toûjours à même hauteur, & dont on se serve aussi toûjours de la même maniere, on détermine plusieurs points de visée, qui soient également éloignez de l'œil de l'Observateur; tous ces points seront également éloignez du centre de la Terre, étant également abaissez ou élevez à l'égard du vrai niveau, c'est pourquoi ils seront tous de niveau entr'eux; mais ils ne seront pas pour cela de niveau avec la station où l'on fait le nivellement, c'est-à-dire avec l'œil de l'Observateur dans cette station;

il faut encore ſuppoſer que s'il y a de la réfraction, elle ſoit égale dans toutes ſes diſtances égales.

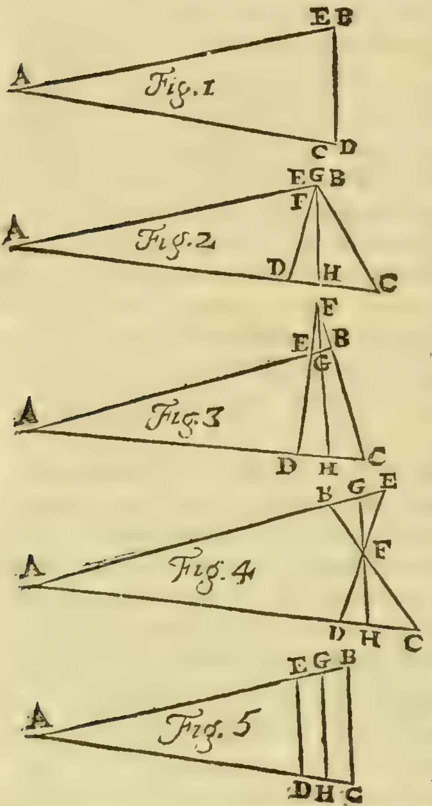
METHODE II.

Le ſecond moyen demande un double nivelſement, & réciproquement fait d'une premiere ſtation à une ſeconde, puis de cette ſeconde à la premiere : ou bien, pour plus grande ſûreté, à cauſe des réfractions qui pourroient cauſer quelque erreur dans ce nivellement réciproque, en changeant dans l'eſpace du temps, qu'il y auroit entre les deux obſervations, il faudroit qu'il y eût deux Obſervateurs, qui étant placez aux deux extrémitez de la diſtance propoſée, nivellaſſent à même tems, & avec des inſtrumens qui fuſſent parfaitement d'accord ; mais lorſque l'on veut ſe ſervir de cette maniere, il n'eſt pas neceſſaire de prendre cette précaution à l'égard de la réfraction, qui ne peut pas être conſidérable, pourvû que la diſtance n'excede pas 1000 toiſes, comme nous avons dit ci-devant.

Ce qui étant ſuppoſé, il faut ſçavoir, que ſi dans chaque ſtation le lieu de l'œil, & le point de viſée réciproque ſe trouvent joints enſemble, enſorte que les deux lignes viſuelles qui ſervent au nivellement, & que pour ce ſujet nous appellons *lignes du Nivellement*, conviennent, & n'en faſſent qu'une, comme dans la premiere figure ſuivante, les extrémitez de cette ligne ſeront de niveau: mais ſi dans une des ſtations, comme dans la ſeconde figure, ou dans les deux ſtations, comme dans la troiſiéme & quatriéme figure, le lieu de l'œil ſe trouve ſéparé du point de viſée réciproque : les points pris au milieu entre ceux-là ſeront de niveau entr'eux, ou avec ceux qui ſont joints enſemble dans la ſeconde figure.

Démonstration.

A represente le centre de la Terre; BC, DE sont deux lignes du nivellement réciproque, ayant chacune respectivement l'œil à un bout aux points marquez B & D, & le point de visée à l'autre bout aux points marquez C & E.



De la supposition que nous avons faite que l'instrument demeurât toûjours dans un même état sans qu'il lui arrivât aucun changement, ou que s'il y avoit deux instrumens ils fussent bien d'accord, il s'ensuit que les angles ABC, ADE, ou bien ACB, AED sont égaux entr'eux, & que les lignes BC, DE, supposé qu'elles soient séparées, sont ou paralleles entr'elles, ou dans une position souscontraire, que nous appellons autrement anti-paralleles; & dans ce cas si nous nous imaginons que la ligne GH passant par le point F, qui est la rencontre des anti-paralleles, divise

en deux également l'angle BFE, ou DFC fait par ces mêmes anti-paralleles; la ligne GFH rencontrera les lignes AB, AD aux points G & H qui seront également éloignez du centre de la Terre A, & qui par conséquent seront de niveau, suivant la définition des points de niveau.

Car premierement, si les points BE & CD sont joints ensemble, comme dans la premiere figure, il est évident que les lignes AB, AD seront égales entr'elles par la sixiéme Proposition du premier Livre d'Euclide; car les angles ADB, ABD sont égaux entr'eux par la position; c'est pourquoi les points B & D seront de niveau.

Secondement, si les lignes BC & DE sont paralleles entr'elles comme dans la cinquiéme figure: à cause des paralleles CB, DE les angles ADE, ACB seront égaux entr'eux par la vingt-neuviéme Proposition du premier Livre des Elemens d'Euclide; mais aussi par la position les angles ADE, ABC sont égaux entr'eux; donc aussi les angles ACB, ABC sont égaux entr'eux; d'où il s'ensuivra comme ci-devant que les lignes AB, AC seront égales, & par conséquent les points B & C seront de niveau. On démontrera aussi par la même raison que les points D & E sont de niveau; car les lignes AD & AE seront aussi égales entr'elles: c'est pourquoi si l'on divise BE en deux également en G, & CD en H; les points G & H seront aussi de niveau, comme il est proposé: car AC & AB étant égales, & AD & AE l'étant aussi, les lignes CD & BE le seront semblablement & leurs moitiez aussi DH, EG; donc AH sera égale à AG, & les points G & H de niveau.

Troisiémement, si les points B & E sont joints ensemble, & les deux autres de l'autre côté D & C seront séparez, comme dans la seconde figure, l'angle CBD étant coupé en deux également par la ligne BH, qui rencontre

AC en H; le point H sera de niveau avec le point B : car les angles ADB, ABC étant égaux par la position, & l'angle au point A étant commun pour les deux triangles ADB, ABC, il s'ensuit que les autres angles restans dans ces deux triangles, à sçavoir ABD, ACB seront égaux; car par la trente-deuxiéme Proposition du premier Livre d'Euclide les trois angles de tout triangle sont égaux à deux droits : Si l'on ajoûte donc à l'angle ABD l'angle DBH, la somme, qui est l'angle ABH, sera égale à la somme de l'angle ACB & de l'angle CBH qui sont égaux aux deux premiers; mais dans le triangle HCB, par la même trente-deuxiéme Proposition ci-dessus rapportée, l'angle extérieur AHB est égal aux deux intérieurs HCB ou bien ACB & CBH; c'est pourquoi l'angle AHB sera égal à l'angle ABH, & par la sixiéme Proposition du premier Livre d'Euclide, les lignes AB & AH seront égales, & par conséquent les points B & H seront de niveau.

Enfin, si les anti-paralleles BC, DE concourent en F au-dedans, ou au-dehors de l'angle BAC comme dans les troisiéme & quatriéme figures, la ligne GFH menée par le point F, ensorte qu'elle divise en deux également les angle égaux EFB, DFC, rencontrera les côtez AB, AD en G & en H qui seront des points de niveau : car aux deux triangles FBG, FDH les angles au point F sont égaux; & par la trente-deuxiéme Proposition du premier Livre d'Euclide l'angle extérieur ABC du triangle FBG est égal aux deux intérieurs FGB, & BFG; & semblablement l'angle extérieur ADE du triangle FDH est égal aux deux intérieurs DFH, FHD; mais les deux angles ABC, ADE étant égaux par la supposition, aussi les deux angles FGB, BFG pris ensemble seront égaux aux deux angles DFH, FHD pris aussi ensemble : desquelles si l'on ôte les égaux BFG, DFH, les restans FGB ou AGH, & FHD ou AHG seront égaux, & par la

la sixiéme Proposition ci-dessus rapportée les côtez AG, AH du triangle AGH seront égaux; donc les points G & H seront de niveau.

Mais dans la pratique du nivellement il y a toûjours si peu de difference entre les lignes FB, FE, & FC, FD, que l'on peut les supposer égales entr'elles sans tomber dans une erreur sensible : d'où il s'ensuivra que la ligne GFH, qui divise en deux également les angles au point F, coupe les lignes EB, DC en deux également au point G & H, qui seront de niveau, comme il a été démontré ci-devant, & c'est ce qu'il falloit prouver.

On dira que cette démonstration suppose que les lignes du nivellement BC, DE soient droites; ce qui n'est pas toûjours vrai, principalement aux grandes distances à cause des réfractions : Mais comme nous supposons, que s'il y a de la réfraction, elle soit égale de part & d'autre, il est évident qu'elle ne changera rien à la détermination du vrai niveau.

Voilà donc deux manieres de trouver avec exactitude le vrai niveau : mais lorsque l'on n'a pas la commodité de prendre toutes les précautions necessaires, & que l'on est obligé de faire la chose d'un seul coup de nivellement, & d'une seule station, il est necessaire de connoître l'erreur de l'instrument s'il y en a : j'entens qu'il est necessaire de sçavoir de combien l'instrument hausse ou baisse la mire à l'égard du niveau apparent pour une certaine distance donnée, c'est ce que l'on appelle *Verification* de l'instrument dont nous parlerons dans le Chapitre suivant: mais pour avoir le vrai niveau d'un seul coup & d'une seule station, ce n'est pas assez de connoître la correction de l'instrument, il faut encore y employer celle du haussement du niveau apparent pardessus le vrai, comme elle est posée dans la Table que nous avons donnée ci-dessus.

EXEMPLE.

On propose une distance de 300 toises, pour laquelle on sçait que l'instrument baisse de trois pouces à l'égard du niveau apparent, ce qui demanderoit que le point de visée fût haussé de trois pouces : mais parce que dans la Table nous trouvons que le niveau apparent à la distance de 300 toises s'éleve d'un pouce pardessus le vrai, il faut donc rabattre un pouce de trois pouces, qu'il falloit ajoûter pour la correction de l'instrument ; & l'on conclura que le vrai niveau doit être deux pouces plus haut que le point de visée.

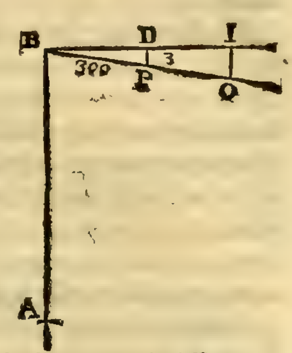
Mais si au contraire l'instrument avoit haussé de trois pouces pour la même distance de 300 toises, le vrai niveau seroit à quatre pouces au-dessous du point de visée ; car il faudroit encore baisser d'un pouce pour le haussement du niveau apparent pardessus le vrai.

Nous n'exposons pas ici tous les cas qui peuvent arriver ; parce qu'il sera toûjours facile de sçavoir ce qu'il y aura à faire, en considerant la chose de la maniere que nous avons fait, & comme si l'on devoit premierement rétablir le niveau apparent, & ensuite en rabattre le haussement de l'apparent pardessus le vrai.

Nous avons expliqué ci-devant que les haussemens du niveau apparent pardessus le vrai, sont en raison des quarrez des distances : mais la correction qu'il faut faire pour l'erreur de l'instrument croît ou décroît seulement dans la raison des mêmes distances, ce qui est facile à connoître par cette figure suivante.

B est la station où l'on fait l'observation ; BA la ligne qui tend au centre de la Terre ; BO la ligne de visée ; & BDI la ligne du niveau apparent, qui est perpendiculaire à BA. Posons maintenant, que pour une distance de

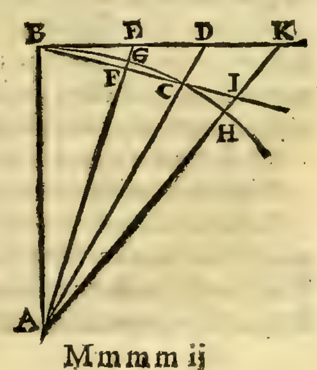
300 toises, qui est B P, nous sçachions, que PD, qui est l'erreur de l'instrument, qui ne marque pas le niveau apparent, soit de trois pouces; il est évident, par exemple, que pour la distance PO supposée de 600 toises, la correction OI sera de six pouces; car OI étant menée parallele à PD, les triangles BPD, BOI sont semblables; c'est pourquoi, par la quatriéme Proposition du sixiéme Livre d'Euclide, BP sera à PD, comme BO à OI; ce qu'il falloit démontrer.



Il ne faut pas s'imaginer qu'un instrument baissant la mire & demeurant dans un même état, puisse récompenser justement le haussement du niveau apparent à toutes sortes de distances; comme par exemple:

Le haussement du niveau apparent étant d'un pouce 300 toises de distance, un instrument qui bassera d'un pouce pour 300 toises, donnera le vrai niveau à cette distance: car le haussement de l'un, récompensera le baissement de l'autre; mais plus près il baissera trop, & plus loin il ne baissera pas assez, comme on verra en se donnant la peine d'en faire le calcul, ce que l'on peut aussi connoître par la figure suivante.

A est le centre de la Terre; BGCH le vrai niveau, qui est sur sa circonférence; BK le niveau apparent; B I une ligne droite inclinée, qui represente la ligne de visée, & qui coupe necessairement la circonférence du cercle de la Terre en quel-



que point, comme C, qui eſt le ſeul de niveau avec B ; & tous les autres, comme F, I, ſeront plus bas ou plus hauts.

Il eſt même facile de déterminer à quelle diſtance préciſe, un inſtrument qui baiſſe la mire donnera le vrai niveau, pourvû qu'on en connoiſſe l'erreur pour quelque diſtance donnée, c'eſt-à-dire, de combien il s'écarte du niveau apparent pour une diſtance donnée : car ayant pris dans la Table ci-deſſus le hauſſement dû à la diſtance donnée, pour laquelle vous ſçavez l'erreur de l'inſtrument, il faut faire une régle de proportion, ou de trois, comme on l'appelle ordinairement, en poſant

I. Terme. Comme le hauſſement trouvé dans la Table pour la diſtance donnée eſt à

II. Terme. L'erreur de l'inſtrument pour cette même diſtance ; ainſi

III. Terme. La diſtance donnée eſt à

IV. Terme requis. Celle à laquelle l'inſtrument déterminera le vrai niveau.

EXEMPLE.

Je ſçai qu'un inſtrument baiſſe la mire à raiſon de de deux pouces ſur 300 toiſes de diſtance pour laquelle le hauſſement du niveau apparent eſt d'un pouce ſeulement, comme on voit dans la Table ; & je veux ſçavoir à quelle diſtance cet inſtrument tel qu'il eſt donnera le vrai niveau. Pour cet effet je dis :

Comme un pouce de hauſſement
Eſt à deux pouces d'erreur,
Ainſi 300 toiſes de diſtance
Sont à 600 toiſes de diſtance requiſes,

qui eſt la diſtance où le défaut de l'inſtrument récompenſe le hauſſement du niveau apparent, l'un & l'autre étans de quatre pouces dans cet exemple.

La régle ci-dessus est fondée sur ce que nous avons déja dit, que l'erreur d'un instrument croît ou décroît en raison des distances : mais les haussemens du niveau apparent suivent la raison doublée des mêmes distances, qui est aussi celle de leurs quarrez.

Nous avons démontré ci-dessus que cette derniere supposition touchant les haussemens du niveau apparent n'étoit pas vraie dans la rigueur de la Geometrie; mais que dans la pratique cela ne devoit être d'aucune consideration : On en doit autant dire à l'égard de l'autre supposition, qui est touchant les erreurs de l'instrument : car les lignes EF, CD, IK n'étant pas paralleles entr'elles, si on suppose qu'elles tendent au centre de la Terre, A, ne sont pas non plus en raison des distances BE, BD, BK : mais à cause de la petitesse des angles qu'elles font au centre de la Terre, il s'en faut si peu, que cela ne merite pas d'être consideré dans la pratique.

Démonstration de la Régle précedente.

Supposant donc dans la figure précedente que les lignes FE, CD soient paralleles entr'elles, & que la distance BF étant proposée avec la ligne FE, qui est l'erreur dont l'instrument, ou bien la ligne de visée, baisse au-dessous du niveau apparent BK pour cette distance, il faille trouver la distance BC où la ligne de visée BI coupe la circonférence de la Terre, c'est-à-dire trouver la distance BC ensorte que le point C soit de niveau avec le point B.

Pour la distance BF ou BG, que nous supposons égale, la ligne GE, qui est la difference entre le vrai niveau & l'apparent, sera connuë par la Table précedente : mais les haussemens du niveau apparent pardessus le vrai, sont entr'eux comme les quarrez des distances, suivant la

démonstration qui en a été faite ci-devant; c'est pourquoi GE sera à CD, qui sont ces mêmes haussemens, comme les quarrez des distances BG ou BF à BC: mais comme BF à BC, ainsi FE à CD, à cause que FE & CD étant paralleles, font les triangles semblables BFE, BCD; donc aussi en raison inverse CD sera à GE, comme le quarré de CD au quarré de FE, & par les Corollaires de la dix-neuviéme Proposition du sixiéme Livre, les lignes CD, FE, GE seront en proportion continuë; donc FE sera à GE, comme CD à FE, ou comme BC à BF; & par inversion de raison GE sera à FE, comme BF à BC, ce qu'il falloit démontrer; car GE est le haussement du niveau apparent pardessus le vrai pour la distance BG ou BF proposée, FE est l'erreur de l'instrument pour cette même distance, BF est la distance proposée, & enfin BC est la distance que l'on cherche.

Enfin, si l'on suppose que l'on ait établi une ligne droite comme CD, qui est celle du niveau apparent; & si l'on imagine que par ses deux extrémitez il y ait deux lignes qui lui soient perpendiculaires dans chacune desquelles on ait pris un point à volonté, il est évident par ce qui a été démontré ci-dessus, que pour connoître si ces deux points sont également éloignez du centre de la Terre, ou de combien l'un est plus éloigné que l'autre, il suffira de les rapporter au vrai niveau; & c'est dans cette comparaison que consiste toute la science du nivelement.



CHAPITRE II.

De l'instrument appellé Niveau, & des moyens de le rectifier.

NOUS avons déja dit dans le commencement du Chapitre précedent, que toute la justesse de l'instrument dont on se sert pour niveller, tend à déterminer deux points, de telle sorte que la ligne droite menée de l'un à l'autre, soit perpendiculaire par l'une de ses extrémitez à celle qui tend au centre de la Terre & qui est menée par ce même point, ou bien qui est dans l'horison apparent que l'on conçoit passer par cette même extrémité.

On a inventé jusques à present plusieurs de ces instrumens, que l'on appelle Niveaux, dont toute la justesse dcpend d'un plomb qui tient au bout d'un fil, & dont on suppose que le centre de gravité le tend vers le centre de la Terre; ou de quelque corps pesant suspendu d'une autre maniere, & qui fait le même effet du plomb, lequel dirige le Niveau; ou bien de quelques liqueurs dont la superficie represente une partie de l'horizon apparent ou sensible : mais enfin l'on est demeuré d'accord que celui dont nous allons parler le premier, est le plus juste de tous, puisque l'on ne laisse pas de s'en servir fort bien dans des rencontres où les autres sont presque inutiles : nous en avons déja donné une description dans le Traité de la mesure de la Terre; & nous la repéterons encore ici en expliquant la figure qui le represente, où l'on remarquera seulement, que celle que nous lui avions donnée d'abord, representoit la lettre T : mais nous l'avons changée, & elle est à present en forme de Croix,

ce qui a été fait afin de donner plus de longueur au cheveu qui sert de perpendicule, & qui est attaché au haut de la Croix : ensorte que l'on peut voir plus commodément le point qui est au-bas de la Croix sur lequel doit battre le cheveu pour déterminer le niveau apparent.

Mais avant que de faire la description des Niveaux que nous proposons dans ce Traité, nous avons crû qu'il étoit à propos d'expliquer en particulier la construction de la lunette d'approche, qui y sert de pinule, & qui en fait la principale partie.

Cette lunette est composée de trois pieces, à sçavoir du verre objectif, des filets qui sont posez à son foyer, & du verre oculaire convexe dont le foyer est aussi à peu près à l'endroit où sont les filets.

L'on appelle le foyer d'un verre convexe l'endroit où tous les rayons qui viennent d'un point lumineux, ou coloré, qui est dans une distance fort éloignée, vont se rassembler après avoir passé au-delà du verre, c'est pourquoi la peinture des objets qui sont opposez au verre se represente très-distinctement dans cet endroit : c'est aussi ce que l'on peut voir par experience dans une chambre qui est bien fermée, & où il n'entre point de lumiere que par une petite ouverture, à laquelle on applique un verre convexe : car en mettant un papier blanc à l'opposite de ce verre au-dedans de la chambre, & à la distance de son foyer, on verra sur le papier une peinture très-nette, & très-distincte des objets qui sont opposez au verre par dehors ; on pourra trouver le foyer du verre, en approchant & reculant le papier tant que l'on voye la peinture bien nette & bien déterminée : on suppose que ce verre soit bon & bien fait, & qu'il ne soit pas trop découvert à proportion de la distance de son foyer.

Le papier blanc sur lequel se fait la peinture ne sert à autre chose, que pour arrêter les rayons colorez à la di-

stance

ſtance du foyer, dans le point ils ſe raſſemblent, & en les renvoyant de tous côtez dans la chambre, on les apperçoit ſur le papier comme ſi l'objet y étoit peint, & qu'il n'y fût point apporté d'ailleurs.

Si l'on n'oppoſoit point de papier à ces rayons, la peinture ne laiſſeroit pas toûjours de ſe faire à l'endroit du foyer, quoique ceux qui ſeroient dans la chambre ne la pûſſent pas appercevoir : mais ſi l'on met un verre convexe au-delà du foyer de l'objectif, enſorte que le foyer de ce ſecond verre, que nous appellons l'Oculaire, ſoit commun avec le foyer du premier, les rayons colorez, qui, après s'être rompus en tombant ſur la ſuperficie du verre objectif, ſe ſont réunis à ſon foyer, continuent leur chemin en s'écartant, & rencontrant le verre oculaire ſe rompent derechef en paſſant au travers, & ſe dirigent de telle ſorte, qu'en mettant l'œil derriere ce verre on apperçoit les objets dont la peinture ſe fait au foyer, de la même maniere que s'ils étoient effectivement peints en cet endroit, & on les verra plus grands qu'avec la vûë ſimple, ſi le verre oculaire a plus de convexité que l'objectif, ce que l'on peut augmenter de beaucoup, ſuivant la poſition des convexitez de ces verres : mais en changeant la poſition de ce verre oculaire, ſi l'on demeure à peu près dans la même diſtance de l'objectif, on pourra voir differens objets, ſelon que differens rayons rencontreront l'oculaire. Enfin, ſi l'on tend un filet qui demeure immobile à l'endroit du foyer commun de l'objectif & de l'oculaire, ce filet paſſera ſur la peinture de quelqu'objet, où on le verra toûjours, quoique l'on change la poſition du verre oculaire & de l'œil : mais ſi l'on remuë le verre objectif, la peinture changera de place à ſon foyer, de même que ſi l'on touche au filet il ne rencontrera plus les mêmes endroits de la peinture : l'aſſemblage de ces deux verres compoſe la lunette d'approche, qui repre-

ſente les objets dans une poſition renverſée. Il eſt facile de voir par ce que nous venons d'expliquer, que ſi le verre objectif demeure toûjours dans une même ſituation à l'égard du filet, comme on le peut faire dans le tuyau d'une lunette, pour peu que l'on remuë ce tuyau, la peinture qui ſe fait au foyer changera de place ſur le filet, à moins que l'on ne remuë la lunette de telle ſorte, que la ligne droite que l'on imagine aller d'un point du filet juſques à l'objet ſur lequel il paſſe, & que l'on appelle le principal rayon de ce point de l'objet, ne demeure toûjours dirigée vers le même endroit, ce qui eſt la même choſe que ſi l'on concevoit que cette lunette fût prolongée juſques à l'objet, auquel point elle demeurât immobile, & qu'elle ſe remuât ſeulement par l'autre extrémité où eſt le filet; ou bien encore ſi le point où le principal rayon rencontre le verre objectif dans la premiere poſition, demeure toûjours directement entre le même point de l'objet, & le filet qui paſſe par ſa peinture dans toutes les autres poſitions.

Ce ſont de ces ſortes de lunettes que nous avons miſes en pratique, & dont nous nous ſervons au lieu de pinules pour faire des obſervations, comme on peut voir plus au long dans le Traité de la meſure de la Terre.

L'on peut ajoûter à cette lunette deux autres verres convexes au-delà de l'oculaire, afin qu'elle repreſente les objets dans leur ſituation naturelle; car celle qui n'a que deux verres convexes, les repreſente renverſez, comme nous venons de dire; mais auſſi l'on voit les objets bien plus clairement dans une lunette à deux verres, que dans une qui en a quatre. *

* Et il ſeroit à propos que ceux qui ont des Nivellemens à faire, & qui ſe ſervent de Lunettes au lieu de Pinules, n'y miſſent que deux verres convexes; car la viſion plus clair qui en réſulte, eſt très-neceſſaire dans le Nivellement, où les rayons, ſuivant leſquels on voit les objets, étant fort près de terre dans toute leur longueur, ils ſouffre déja aſſez d'affoibliſſement par cette raiſon. D'ailleurs il n'eſt pas difficile de s'accoutumer à voir les objets renverſez.

Ce que nous venons d'expliquer touchant la construction des lunettes d'approche, n'est que par rapport à l'usage que l'on en fait dans les instrumens qui servent à observer, où l'on s'en sert au lieu de pinules; & nous ne prétendons pas y traiter à fonds cette matiere, qui demanderoit un Ouvrage entier de Dioptrique.

Description du Niveau.

La representation de cet instrument est de telle maniere, que l'on peut voir le dedans, comme si la partie qui se presente à la vûë étoit ôtée, ou bien comme si elle étoit de verre, & que l'on pût voir au travers.

EFGH est un tuyau quarré qui sert pour la lunette, lequel on fait de quelque matiere solide & ferme, comme fer ou leton assez fort, ensorte qu'elle ne puisse pas être facilement corrompuë.

EF est un petit chassis qui porte le verre avec objectif.

GH est un autre chassis qui porte deux filets de ver à soye très-déliez, & tels qu'ils sont sur la coque même du ver à soye, qui s'entrecoupent au foyer de l'objectif.

Le verre objectif & ces filets ainsi attachez ensemble dans ce tuyau, servent de pinules pour le Niveau.

Le petit tuyau D est celui qui contient le verre oculaire que l'on peut enfoncer ou retirer, suivant la disposition de la vûë de celui qui observe, sans que pour cela il arrive aucun changement à la disposition du verre objectif & des filets, comme on a remarqué ci-devant dans l'explication de la construction des lunettes.

La lunette est fortement attachée à angles droits avec le tuyau IK, ensorte que l'on ne peut pas remuer l'un sans l'autre.

L & M sont deux arcboutans courbez, qui servent à entretenir la lunette avec le tuyau IK, & pour incliner

le niveau d'un côté ou d'autre lorsqu'il est sur son pied.

AC est un cheveu qui est suspendu du point A par une boucle que l'on fait à son extrémité, & cette boucle est passée sur une aiguille qui est appuyée par sa pointe contre une piece de léton, qui s'éleve du fond de la boëte ou tuyau, afin que le cheveu soit en liberté de se mouvoir : cette piece avec l'aiguille est representée en particulier dans la figure 2e.

Au bout du cheveu pend un plomb C, que l'on fait d'une grosseur suffisante pour tenir le cheveu bien tendu sans qu'il puisse se rompre.

B est une petite platine d'argent enchassée à fleur sur une piece de léton, qui est autant élevée sur le fond de la boëte, que celle qui porte le centre au point A : au milieu de cette platine il y un point, qui sert pour déterminer le niveau apparent, comme nous dirons dans la suite pour la vérification du niveau. Du point A pour centre d'où le cheveu est suspendu, on décrit un arc de cercle qui passe par le centre de la platine B, & l'on y marque d'un côté & d'autre de petites divisions égales qui y déterminent les minutes de dégré, s'il est possible; ce qui peut servir à montrer de combien de minutes un objet est plus ou moins élevé que le niveau apparent : cela se doit seulement entendre jusqu'au nombre des minutes qui sont marquées sur la piece de léton.

Le verre objectif doit être arrêté sur le chassis EF, & ce chassis doit être immobile dans la boëte ou tuyau de la lunette.

Le chassis GH qui porte les filets doit être aussi bien attaché au corps de la même boëte : quelquefois pourtant on fait un double chassis qui porte les filets, & qui glisse fort justement dans une coulisse qui est au premier chassis, & l'on attache un ressort dans la partie inférieure de ce premier chassis, qui pousse en haut le second.

chaſſis qui porte les filets, lequel on repouſſe autant que l'on veut vers le bas par le moyen d'une vis, qui perce la boëte de la lunette dans la partie ſupérieure où eſt l'écrou, & qui force le reſſort qui le ſoutient pardeſſous, comme la figure 3[e] le fait voir.

La queuë N eſt une verge de fer rigide & aſſez forte pour ne pas plier ; elle eſt attachée au long de la boëte du perpendicule, enſorte qu'elle peut ſeulement monter & deſcendre, & en tombant juſqu'à terre, elle ſert pour arrêter le niveau dans l'inclination où l'on veut le mettre.

Le pied ſur lequel on poſe cet inſtrument, eſt un chevalet comme les Peintres s'en ſervent pour ſoutenir leurs tableaux ; on appuye ſeulement le niveau par les arcboutans ſur les chevilles du chevalet, enſorte qu'il peut ſe mouvoir ſur ces chevilles, & s'incliner d'un côté ou d'autre.

On peut ajoûter à chaque pied du chevalet, un faux pi d de fer en forme de verroüil qui coule dans ſes crampons au long du pied de bois, & que l'on peut arrêter à la longueur que l'on veut par le moyen d'une vis, comme la figure le montre aſſez clairement ; ce qui eſt d'une grande utilité pour alonger les pieds du chevalet dans les lieux raboteux & inégaux.

On ne détermine point la grandeur de cet inſtrument : mais on doit ſeulement remarquer que plus il ſera grand, plus on obſervera avec juſteſſe : ceux dont nous nous ſervons ordinairement, ont la lunette de trois pieds de longueur, & le perpendicule de quatre pieds.

Quoique le tuyau du perpendicule ait communication avec le tuyau de la lunette, & que ſon filet ou cheveu paſſe au travers, cela n'y apporte pourtant aucun changement, étant imperceptible, à cauſe qu'il eſt trop délié.

De la rectification, ou vérification du Niveau.

La maniere la plus indépendante pour rectifier le Niveau dont nous venons de faire la démonſtration, eſt de ſe ſervir du renverſement, comme nous avons expliqué pour les quarts de cercle dans le Traité de la meſure de la Terre* : mais celle qui ſuit, paroît aſſez expeditive & commode pour être préferée à toute autre.

Aux deux extrémitez d'une diſtance connuë on fait deux marques à terre, qui pour la commodité de l'opération, ne doivent pas être beaucoup éloignées du vrai niveau, & dont la diſtance doit être au moins de 300, ou 400 toiſes. Ce qui étant ſuppoſé, on met l'inſtrument à l'une des marques, & l'on pointe la lunette vers l'autre, en faiſant marquer exactement à quelle hauteur viſe la croix des filets qui ſont au foyer, le filet du perpendicule donnant ſur le centre de la petite platine d'argent, qui eſt au bas de l'inſtrument; on en fait de même & réciproquement à l'autre ſtation, en remarquant auſſi exactement à chaque ſtation la hauteur de la croix des filets pardeſſus la marque où l'on obſerve, ce que nous appellons la hauteur de l'œil.

Premier Cas.

Si les deux hauteurs des points de viſée jointes enſemble ſurpaſſent les deux hauteurs de la croiſée des filets, jointes enſemble du double du hauſſement du niveau apparent qui convient à la diſtance des ſtations,

* La meilleure maniere de rectifier ce Niveau étant le renverſement, nous avons crû devoir en ajoûter ici la pratique, d'autant plus que le Livre de la meſure de la Terre de M. Picard, auquel il ſemble renvoyer ſon Lecteur, ne ſe trouve plus. Cette pratique eſt inſerée à la fin de ce Chapitre II. ce qu'on a fait pour ne point troubler l'ordre de ce Livre.

conformément à la Table que nous avons donnée ci-devant dans le premier Chapitre, l'inſtrument ſera juſte, & marquera le niveau apparent; c'eſt-à-dire, que le filet du perpendicule, qui bat ſur le centre de la petite platine d'argent, fait un angle droit avec le principal rayon de l'objet qui eſt caché ou marqué par la croix, ou interſection des filets de ver à ſoye poſez au foyer de la lunette.

EXEMPLE.

La diſtance entre les lieux de l'obſervation ayant été poſée de 300 toiſes, on trouve dans la Table que le hauſſement du niveau apparent pardeſſus le vrai, eſt d'un pouce pour cette diſtance; & ſi la ſomme des hauteurs des points de viſée ſurpaſſe de deux pouces celle des hauteurs de l'œil, ou de la croiſée des filets qui ſont proches de l'oculaire, ce ſera une preuve de la juſteſſe de l'inſtrument.

Deuxième Cas.

Mais ſi la ſomme des hauteurs des points de viſée, ſurpaſſe la ſomme des hauteurs de l'œil ou de la croix des filets de plus du double du hauſſement du niveau apparent pardeſſus le vrai, l'inſtrument hauſſera la mire au-deſſus du niveau apparent de la moitié de ce qu'il y a de trop, c'eſt-à-dire, que l'angle fait du filet du perpendicule avec le principal rayon qui appartient à la croiſée des filets du foyer, ſera obtus. *

Comme dans le même exemple précedent, ſi la ſomme des hauteurs des points de viſée, eſt de trois pouces au lieu de deux pouces, qui eſt le double de ce que le ni-

* Ou plûtôt, que les angles formez par le filet du perpendicule & par le principal rayon qui appartient à la croiſée des filets du foyer, ſont obliques, aigus & obtus.

veau apparent doit être élevé pardessus le vrai à la distance de 300 toises, il y aura un pouce de trop d'élevation; c'est pourquoi, nous concluons que l'instrument hausse la mire, ou vise trop haut de la moitié de cet excès, qui est un demi-pouce à la distance de 300 toises.

Troisiéme Cas.

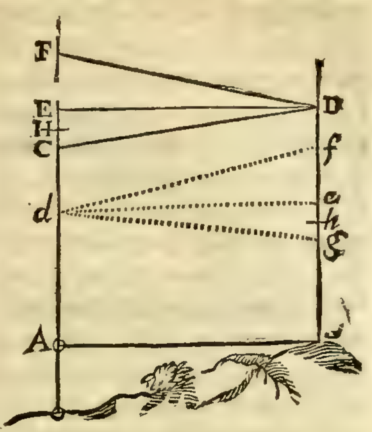
Enfin, si la somme des hauteurs des points de visée, est moindre que celle des hauteurs de l'œil, ou de la croix des filets, à laquelle on a ajoûté le double du haussement du niveau apparent pardessus le vrai, la moitié de ce qu'elle sera moindre que l'autre, sera l'erreur de l'instrument pour la distance proposée qui baissera la mire audessus du niveau apparent.

Comme dans le même exemple que nous avons apporté ci-devant, si la somme des hauteurs des points de visée, est moindre d'un pouce que la somme des hauteurs de l'œil augmentée de deux pouces, qui est le double du haussement du niveau apparent pardessus le vrai à la distance de 300 toises, l'instrument donnera trop bas de la moitié de cette différence qui sera un demi-pouce; de même que si la somme des hauteurs des points de visée, étoit moindre de deux pouces, que celle des hauteurs de l'œil, augmentée de deux pouces pour le double du haussement du niveau apparent pardessus le vrai, ce qui est la même chose, que si la premiere somme étoit égale à la seconde sans être augmentée, l'instrument donneroit trop bas d'un pouce; & ainsi du reste.

Démonstration des Régles précedentes.

La démonstration de ces régles est facile à comprendre, si nous supposons d'abord que les deux points A
&

& B que l'on a marqué à terre, ſoient dans le vrai niveau, c'eſt-à-dire, également éloignez du centre de la Terre: car premierement, l'inſtrument étant à la marque B, & le filet du perpendicule battant ſur le centre de la petite platine d'argent, ſi le point de viſée E de la ligne du nivellement ED, qui eſt auſſi le principal rayon qui vient de l'objet E à la croiſée des filets du foyer de la lunette en D, eſt élevé au-deſſus de l'autre marque A de la hauteur AE plus grande que BD, qui eſt la hauteur de l'œil ou de la croiſée des filets, de la quantité de la ligne HE, & que cette grandeur HE ſoit le hauſſement du niveau apparent pardeſſus le vrai, qui convient à la diſtance AB; il eſt évident par ce qui a été démontré au premier Chapitre, que la ligne du nivellement ED fera avec le filet du perpendicule poſé au point D, un angle droit EDB.



Et de même dans l'opération réciproque, l'inſtrument étant en A, la ligne du nivellement *d e* donnera le point de viſée *e*, enſorte que B *e* ſera plus grande que A *d*, de la quantité de la ligne *e h*, égale à EH, & l'angle *e d* A ſera auſſi droit.

D'où l'on voit que dans ce premier cas la ſomme des deux hauteurs des points de viſée AE, B *e* eſt plus grande que la ſomme des deux hauteurs de l'œil BD, A *d*, de la valeur des deux hauteurs EH, *e h*, égales entr'elles, & chacune égale au hauſſement du niveau apparent pardeſſus le vrai pour la diſtance AB.

Secondement, si l'œil étant en D, la ligne du nivellement DF donne AF plus grande que BD, ou que AH posée égale à BD, de la grandeur HF plus grande que HE, qui est le haussement du niveau apparent pardessus le vrai pour la distance AB, il est évident que ce rayon FD fera avec le perpendicule DB un angle obtus FDB, puisque EDB doit être droit, comme nous avons dit ci-devant dans le premier cas, & que l'instrument étant en B & l'œil au point D, haussera la mire ou donnera le point de visée F, qui sera élevé pardessus le point de visée E du niveau apparent, de la grandeur EF. Ce sera aussi la même chose dans l'opération réciproque, l'instrument étant en A & l'œil en *d*; car le point de visée sera au point *f*, & l'angle *fd* A sera obtus, & égal à l'angle FDB, & la ligne *fe*, qui est le haussement du point de visée *f* pardessus le point de visée du niveau apparent en *e* sera égale à FE dans l'autre opération; d'où s'ensuit, que AF & B*f* jointes ensemble, qui sont les hauteurs des points de visée F & *f*, seront plus grandes que les hauteurs de l'œil, ou de la croisée des filets, qui sont BD, & A *d* jointes ensemble, ou bien de leurs égales AH & B *h*, augmentée de EH & *eh*, qui sont chacune le haussement du niveau apparent pardessus le vrai pour la distance AB, des grandeurs EF & *ef* jointes ensemble, ce qui est le double de ce que l'instrument éleve la mire, ou donne trop haut au-dessus du niveau apparent à la distance de AB; car les points *d* & *h* seront dans le vrai niveau aussi-bien que les points D & H.

Troisiémement, si la ligne du nivellement donne le point de visée en G, l'œil ou la croisée des filets étant en D, & que AG soit plus petite que AH ou BD son égale à laquelle on a ajoûté HE, qui est le haussement du niveau apparent pardessus le vrai à la distance de AB; il est évident parce qui a été démontré dans le premier Chapitre,

& par ce que nous avons dit ci-devant que l'angle GDB sera aigu, & que l'instrument baissera la mire, ou donnera trop bas de la grandeur de GE, & de même dans le nivellement réciproque: d'où l'on connoît, que dans ce troisiéme cas, les hauteurs des points de visée AG, B *g* jointes ensemble sont plus petites, que les hauteurs de l'œil BD, A *d*, ou leurs égales AH, B *h* prises ensemble & chacune augmentée des grandeurs HE, *h e*, qui sont les haussemens du niveau apparent pardessus le vrai pour la distance de AB, lesquelles ensemble font les hauteurs du niveau apparent AE, B *e*, & elles sont plus petites des grandeurs GE, *g e* égales entr'elles & prises ensemble.

Voilà donc ce qu'il falloit démontrer à l'égard des points A & B pris à terre & que l'on a supposez dans le vrai niveau, c'est-à-dire, également éloignez du centre de la terre; mais si les points B & *a* marquez à terre, ne sont pas dans le vrai niveau, & que *a* soit plus bas que B de la quantité *a* A; la même démonstration ne laissera pas de subsister, car dans chaque somme des hauteurs des points de visée, & des hauteurs de l'œil dans les nivellemens réciproques, la grandeur *a* A y sera employée, laquelle se détruira mutuellement de chaque côté, & il ne restera que les mêmes grandeurs que nous avons posées pour les trois cas de cette démonstration, ce qui est si facile à entendre que cela ne merite pas une plus grande explication.

Pour corriger le Niveau & lui faire marquer le Niveau apparent.

Il s'ensuit de ce que nous venons de démontrer, que le niveau étant posé à l'une des deux stations marquées contre terre, s'il ne donne pas le point de visée dans le Niveau apparent, il sera facile de le corriger; car on

connoîtra par ces nivellement réciproques de combien il hausse, ou baisse la mire, & l'on déterminera le point où il devroit donner pour être dans le niveau apparent : alors ayant haussé ou baissé l'instrument tant qu'il faudra pour voir cette marque dans la croisée des filets, on observera avec grand soin, sur laquelle des divisions qui sont sur la petite platine ou à côté, le cheveu ou filet du perpendicule donnera, afin de l'y pouvoir remettre toutes les fois que l'on observera pour déterminer le niveau apparent. *

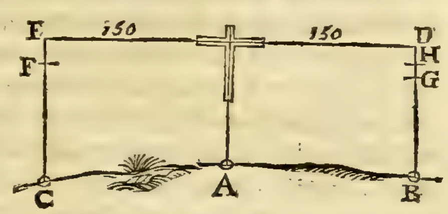
Mais si l'on veut que le centre de la petite platine d'argent détermine le niveau apparent, il faudra hausser ou baisser, le faux chassis, qui porte les filets, par le moyen de la vis qui est au-dessus de la boëte & qui repousse le ressort en bas, comme nous avons dit dans la description, ensorte que la croisée des filets de foyer de la lunette donne sur l'objet que l'on a déterminé pour être le niveau apparent, en observant toûjours que le filet du perpendicule donne très-exactement sur le centre de la platine d'argent qui est au bas du niveau ; où l'on doit encore remarquer, que si l'on élevoit, ou baissoit considerablement les filets du foyer, il faudroit aussi élever ou hausser autant la marque à laquelle on vise, car la hauteur de cette marque n'auroit pas été faite pour la hauteur des filets que l'on a changez de place, mais comme ils étoient auparavant. Ce sera toûjours le plus commode d'ajuster ainsi les niveaux, afin que l'on ait un

* Si l'on ne veut pas corriger l'erreur de l'Instrument par la Méthode enseignée dans l'Article suivant, il vaut mieux, dans les Nivellemens que l'on fera, tenir compte de l'erreur, en laissant le filet du perpendicule, battre toûjours sur le centre de la platine ; ce que l'on juge bien mieux que s'il battoit sur quelque division à droite ou à gauche, ou même entre quelqu'unes de ces divisions. Il est encore souvent plus commode & plus sûr de laisser l'instrument dans le même état & tenir compte de son erreur, que de lui faire marquer le Niveau apparent en haussant ou en baissant les filets du foyer de la lunette. Il faut en ce cas, faire attention que l'erreur de l'Instrument que l'on connoît pour une certaine distance, augmente & diminuë à proportion des distances mêmes.

point remarquable où doit paſſer le filet, comme le centre de cette petite platine ou clou, lorſque les filets marquent le niveau apparent; car ſans cela l'on eſt ſouvent obligé de remarquer que pour le niveau apparent il faut que le filet du perpendicule donne au tiers, ou au quart, par exemple entre deux diviſions, dont il faut exactement remarquer le nombre depuis le centre de la platine.

Autre maniere pour la vérification du Niveau.

Ayant choiſi un lieu uni, & de 300 toiſes de longueur ou environ, comme CB; on poſera le niveau au milieu A de cette diſtance, enſorte que AC & CB ſeront égales entr'elles, & de 150 toiſes chacune, ſi la diſtance CB eſt de 300 toiſes : enſuite on pointera le niveau vers chacun des deux points C, & B, que l'on conſiderera comme deux ſtations ſur leſquelles on marquera la hauteur des points de viſée D & E, le niveau demeurant à même hauteur dans chaque opération. Par ce qui a été démontré dans le premier Chapitre, les points D & E ſont dans le vrai niveau, quelqu'angle que la ligne de viſée faſſe avec celle du perpendicule.



Maintenant ſi l'on tranſporte le niveau à l'une des extrémitez, comme au point C, on connoît de combien la croiſée des filets de la lunette eſt plus haute ou plus baſſe, que le point de viſée E, & marquant l'extrémité B, un point, qui ſoit autant élevé, ou abaiſſé au-deſſus, ou au-deſſous du point de viſée D, que la croiſée des filets l'eſt au-deſſus, ou au-deſſous du point de viſée E, on au-

ra le vrai niveau correſpondant à la croiſée des filets, l'inſtrument étant poſé en C, mais le niveau apparent doit être plus élevé que le vrai, & pour 300 toiſes on trouve dans la Table un pouce de hauſſement; on fera donc une marque à un pouce au-deſſus de celle que l'on a marquée la derniere, qui détermineroit le vrai niveau, & l'on aura le point auquel doit être pointé le niveau, pour être corrigé & rectifié.

EXEMPLE.

Si CE eſt de quatre pieds dix pouces, & BD de cinq pieds un pouce & la croiſée des filets de lunette du niveau étant poſé en C ſoit de quatre pieds ſix pouces, comme au point F, qui par conſéquent ſera au-deſſous de E de quatre pouces. Si l'on prend donc le point G au-deſſous de D de quatre pouces, il eſt evident que les points F & G ſeront dans le vrai niveau; mais pour 300 toiſes le niveau apparent eſt élevé pardeſſus le vrai d'un pouce, c'eſt pourquoi l'on marquera le point H un pouce plus haut que G : ce point H ſera donc le point de viſée où le niveau doit pointer lorſqu'il eſt poſé en C, & que la hauteur de l'œil, ou de la croiſée des filets de la lunette eſt poſée au point F, pour marquer le niveau apparent, & pour être rectifié.

On changera donc les filets de la lunette tant qu'elle pointe à cette marque déſignée, le perpendicule demeurant toûjours au centre de la platine ou clou d'argent; ou bien on remarquera exactement l'endroit de ſa diviſion où le cheveu du perpendicule eſt arrêté, lorſque l'inſtrument marque le niveau apparent par le point de viſée H, afin de le pouvoir remettre dans la même poſition toutes les fois que l'on obſervera.

Si les diſtances AC & AB étoient chacun plus gran-

des, ou moindres que 150 toises, il faudroit avoir égard au haussement du niveau apparent pardessus le vrai, lequel conviendroit au double de cette distance, qui est CB, pour marquer le point H où doit pointer la ligne de visée.

Cette maniere de rectifier le niveau, est à ce qu'il me semble, la plus simple, & la plus commode de toutes pour la pratique.

Avertissement.

Il est d'une très-grande importance, non seulement dans les opérations que l'on fait pour la correction du niveau, mais aussi dans tous les nivellemens, que le cheveu du perpendicule ne se tienne pas trop collé sur la lame de léton, qui soutient la platine ou le clou d'argent, & qu'il n'en soit pas aussi trop éloigné; mais que l'affleurant librement, il batte légérement sur ce point, ce qui étant bien executé, & la longueur du perpendicule étant d'environ quatre pieds, on pourra répondre de deux pouces sur une distance de 1000 toises, laquelle demande 11 pouces de correction pour le haussement du niveau apparent pardessus le vrai; d'où l'on peut juger de quelle utilité sont les pinules à lunette dans ces sortes d'instrumens. *

Enfin, pour ne rien omettre de ce qui peut être utile à l'Observateur, on l'avertit encore ici, que le jalon ou bâton dont on se sert pour tenir la marque ou carton à la hauteur du point de visée, est composé de trois ou quatre bâtons chacun de six pieds de longs, qui peuvent

* Il faut encore avoir un très-grand soin, dans les Nivellemens que l'on fait, de prendre les Stations dans des endroits où le Terrain est ferme : le contraire n'arrive que trop souvent, ce qui fait qu'on a toutes les peines du monde à caller exactement le Niveau, & que l'on n'est jamais sûr de la position du filet du perpendicule, qui sur un Terrain peu ferme, change suivant les différentes situations de celui qui opére; ce qui peut causer de très-grandes erreurs.

s'assembler l'un au bout de l'autre suivant les hauteurs des nivellemens qu'on veut faire; mais il y en a qui est divisé par pouces dans toute sa longueur, & dont chaque pied a une marque particuliere pour le distinguer des pouces: celui qui est ainsi divisé, pose toûjours à terre, & on ne l'assemble point avec les autres qui portent le carton à leur extrémité; ensorte que l'on peut les élever au long de celui qui est divisé, & connoître facilement de combien ils sont élevez au-dessus de la marque qui est à terre.

Pour la marque ou carton qui sert de point de visée, & que l'on met au bout de l'un des bâtons, il suffit de prendre deux cartes à joüer que l'on coud l'une sur l'autre, ensorte que l'on peut les enfiler dans le bout des bâtons; on en fait une noire, & on laisse l'autre blanche, ce qui est d'une grande commodité pour l'appercevoir de loin, suivant les différens objets contre lesquels elle paroît: par exemple, la carte blanche ne paroîtra pas bien clairement lorsqu'elle sera opposée au Ciel, à moins qu'elle ne soit éclairée du Soleil; au contraire la noire se verra fort bien; mais aussi la noire ne paroîtra pas si on la voit à l'opposite des arbres où la blanche paroîtra fort distinctement.

On doit avoir un soin particulier que les bâtons soient tenus bien droits & à plomb; & pour en être assûré, il faudra que celui qui les tient après les avoir mis à la hauteur qu'on lui aura marquée, ne les abaisse point qu'après les avoir ébranlez plusieurs fois en divers sens, pendant que celui qui est à l'instrument prendra garde si dans ce mouvement le bord d'en-haut de la carte, dont on se sert de point de visée *, ne paroîtra point plus haut que la croisée des filets de la lunette.

* Si l'on prend le bord de la carte pour point de visée, il ne sera pas visible à une distance même médiocre. J'aimerois mieux pour marque, une circonférence large d'un pouce & noire, & qui laisseroit autour de son centre, un cercle blanc, d'un pouce au moins de diamétre: Le tout sur un fond blanc.

Il

Il arrive ſouvent que la diſtance entre les ſtations que l'on nivelle, eſt ſi grande, que l'on ne peut pas s'entendre aiſément; c'eſt pourquoi il faudra convenir de quelques ſignes que l'on pourra faire avec le chapeau, ſoit pour faire hauſſer ou baiſſer la carte, ſoit pour la faire tourner du blanc au noir, ou au contraire, ſoit enfin pour faire ſçavoir que tout eſt bien, & que l'opération eſt achevée.

DESCRIPTION D'UN AUTRE NIVEAU, de l'invention de M. Huguens de l'Academie Royale des Sciences.

LA principale partie de cet inſtrument eſt une lunette d'approche A B, d'un ou de deux pieds ou davantage, ſelon qu'on veut qu'elle faſſe plus d'effet. Elle eſt de deux ou de quatre verres convexes, à la maniere ordinaire & aſſez connuë, les deux faiſant voir les objets renverſez, & les quatre les remettant droits. Son tuyau eſt de léton ou autre métal, de forme cylindrique, & paſſe dans une virole C, qui l'enferme par le milieu où elle eſt ſoudée.

Cette virole a deux branches plates pareilles D & E, l'une en-haut & l'autre en-bas, chacune d'environ le quart de la longueur de la lunette; de ſorte que le tout fait une maniere de croix. Au bout de ces branches ſont attachez des filets doubles, paſſez dans de petits anneaux, & puis ſerrez entre des pinces. L'une des dents de ces pinces eſt attachée au bout de ſa branche fixement, & l'autre l'eſt de maniere qu'elle ſe puiſſe ouvrir. Par l'un de ces anneaux on ſuſpend la croix au crochet F, & par en-bas on attache à l'autre anneau, ſuivant ce qui ſera dit, un poids qui égale environ la peſanteur de la croix, & qui eſt enfermé dans la boëte G, dont il ne ſort

que ſon crochet. Ce qui reſte d'eſpace dans cette boëte eſt rempli de quelque huile, comme de Noix ou de Lin, ou autre qui ne ſe fige point, par où les balancemens du poids & de la lunette, s'arrêtent promptement. Au dedans de la lunette il y a un fil de ſoye tendu horizontalement au foyer du verre objectif, ſoit qu'il y ait un ou trois oculaires. Ce fil ſe peut hauſſer & baiſſer par le moyen d'une vis, que l'on tourne à travers le trou H, percé dans le tuyau de la lunette. La maniere d'ajuſter ce fil ſera expliquée ci-après. I eſt une virole fort légere, ne peſant que $\frac{1}{80}$ ou $\frac{1}{100}$ de la croix, qui s'arrête à tel endroit du tuyau de la lunette que l'on veut, & outre celle-ci, ſi la croix n'eſt pas bien près en équilibre, l'on met quelqu'autre virole en dedans de la lunette, d'un poids ſuffiſant pour faire cet équilibre, c'eſt-à-dire, que le tuyau de la lunette ſoit parallele à l'horizon, en quoi pourtant il n'eſt pas requis une fort grande juſteſſe. Une croix de bois plate ſert à ſuſpendre la machine, ayant pour cela en haut le crochet F, & à l'un de ſes bras la fourchette K, qui empêche le trop de mouvement lateral de la lunette, ne lui laiſſant qu'une demi-ligne de jeu. La boëte qui contient le plomb & l'huile, tient à la même croix, étant enfermée par les côtez & par le fonds. Et pour couvrir le niveau contre le vent, l'on applique contre la croix plate de bois, une croix creuſe L, qu'on y attache avec deux ou trois crochets, de ſorte que le tout fait alors une boëte entiere.

Pour ajuſter ou rectifier ce niveau, on le ſuſpend par l'une des deux branches, ſans y attacher le plomb par en bas, & l'on viſe à quelque objet éloigné; remarquant l'endroit où donne le fil horizontal, que l'on voit diſtinctement auſſi-bien que l'objet. Puis on ajoûte le plomb, l'accrochant dans l'anneau d'en-bas; & ſi alors le fil horizontal répond à la même marque de l'objet, l'on eſt

assûré que le centre de gravité de la croix est précisément dans la ligne droite qui joint les deux points de suspension ; sçavoir où les deux filets sont attachez aux branches, qui est la premiere préparation necessaire. Mais si cela ne se trouve point, on en vient à bout facilement par le moyen de la virole I, en observant que si la lunette baisse lorsque le poids est attaché, il faut avancer la virole vers le verre objectif, & la retirer au contraire si la lunette hausse après avoir attaché le poids. Cela est vrai, soit que la lunette soit à quatre ou seulement à deux verres convexes ; c'est-à-dire, soit qu'elle fasse voir les objets droits ou renversez.

L'ayant ainsi réduite à viser au même point sans plomb & avec le plomb, on la retourne sens-dessus-dessous, la suspendant par la branche qui étoit en-bas, & attachant le plomb par l'autre, parce qu'il fait arrêter plus vîte le mouvement, & que d'ailleurs cela est avantageux pour ce qui reste à faire.

Que si alors le fil, qui est dans la lunette, donne au même point de l'objet que devant, l'on est asfûré que ce point est précisément dans le plan horizontal du centre du tuyau de la lunette, comme l'on verra par la démonstration. Mais si le fil ne vise pas au même point on l'y réduira en le haussant ou baissant par le moyen de la vis qui est pour cela, en observant de le hausser s'il hausse, & de le baisser s'il baisse, & en renversant la lunette à chaque correction.

Après cela l'instrument sera parfaitement rectifié, sans qu'il importe (ce qui est fort considerable) que le verre objectif ni les oculaires soient bien centrez ni rangez exactement en ligne droite : & l'on s'en servira ensuite avec sûreté, pourvû qu'il n'y arrive point de changement ; car le fil horizontal marquera par-tout où l'on visera, l'endroit de l'objet qui est dans le plan horizontal

du centre de la lunette. Mais quand il ſeroit arrivé quelque changement, on peut le ſçavoir à chaque obſervation que l'on fait, en viſant premierement avec le plomb attaché, puis ſans le plomb, & puis en renverſant la lunette. Et c'eſt en quoi conſiſte le principal avantage que ce niveau a pardeſſus les autres, parce qu'il empêche qu'on ne puiſſe être trompé en s'en ſervant.

Le pied pour ſupporter la machine eſt une plaque ronde de fer ou de léton, un peu concave, à laquelle ſont attachez, en charniere, trois bâtons d'environ trois pieds & demi. La boëte poſant ſur cette plaque en trois points, ſe peut tourner du côté que l'on veut, & la concavité ſphérique donne moyen de la dreſſer avec facilité juſqu'à ce que le plomb ait ſon mouvement libre dans ſa boëte, ce que l'on voit à travers l'ouverture M, faite au couvercle de bois. La penſanteur de ce plomb ſert à tenir la boëte ferme ſur le pied. Mais on peut aiſément l'aſſurer encore davantage, ſi l'on veut, en faiſant un trou au milieu de la plaque creuſe.

Au lieu d'enfermer dans la boëte G tout le poids, on peut y en mettre un tiers ou un quart ſeulement, & attacher le reſte à la même queuë de fer, mais hors de la boëte. L'on obſervera alors, premierement avec le ſeul poids léger qui pend dans la boëte : puis avec l'autre ajoûté pardeſſus, & en ajuſtant le fil horizontal, on les y laiſſera tous deux. Par ce moyen les balancemens de la lunette s'arrêteront promptement à toutes les obſervation qu'on fait pour la rectification ; au lieu que n'attachant point de poids du tout dans quelques-unes, ce mouvement ceſſe plus difficilement.

Le crochet F, auquel le niveau eſt ſuſpendu, peut être ſimplement attaché à la croix plate de bois ; mais ici il eſt repreſenté attaché à une virole qui ſe hauſſe & baiſſe par le moyen d'une vis qui tient à l'anneau par lequel on

porte la machine. L'avantage qui se trouve en cela, est qu'en la transportant, on peut relâcher les filets de la croix, en la faisant descendre jusques sur la fourchette K & sur le petit bras courbé R, & cela sans ouvrir l'étui de bois.

Pour empêcher que l'huile de la boëte G ne puisse se répandre lorsqu'on porte le niveau en voyage, l'on peut boucher le trou de cette boëte par le poids même qu'elle enferme. On fera pour cela que ce poids soit bien plat pardessus, & on l'attirera contre le couvercle de la boëte par le moyen d'une virole à écroüe S.

Le tuyau N represente en grand celui qui au-dedans de la lunette, porte le fil horizontal. Il contient un ressort OP, qui est attaché à la fourchette Q, à laquelle le fil de soye tient avec de la cire. Ce ressort tire la fourchette contre le morceau de léton T, dans lequel entre la vis qui répond au trou H de la lunette. Par lequel trou l'on peut aussi tourner un peu le tuyau N pour faire que le fil devienne exactement horizontal, dont on juge en regardant par la lunette.

DESCRIPTION D'UN AUTRE NIVEAU, de l'invention de M. Romer de l'Academie Royale des Sciences.

LA figure de la boëte est en forme d'équerre, comme elle est representée par les lettres ABC.

La partie AB sert de tuyau de lunette, elle est ouverte vers l'extrémité B pour mettre le verre objectif, & à l'extrémité A est soudé & attaché un faux canon, qui porte celui de l'oculaire. La partie C de la boëte est plus grosse que le reste pour pouvoir contenir le plomb qui gouverne le niveau, & qui doit avoir un peu de jeu pour pouvoir faire quelques vibrations.

Au dedans du tuyau, à l'endroit marqué P, il y a un chaſſis qui porte un filet de ver à ſoye poſé horizontalement.

Aux endroits marquez D aux deux côtez de la boëte par dedans, ſont attachées deux pieces, comme la figure N en repreſente une, leſquelles ſervent à porter les pivots du plomb.

La ſeconde figure repreſente la maniere dont le plomb, avec ſes pivots, ſont attachez à la fourchette qui porte le ſecond filet horizontal.

HH ſont les pivots du plomb fait en forme de priſme, & tranchans pardeſſous pour avoir moins de frotement.

IK eſt la branche de fer à laquelle le plomb eſt fermement attaché par le bas.

IL eſt une verge de fer, qui eſt attachée à la verge IK, au point I, enſorte qu'elles ne peuvent ſe remuer l'une ſans l'autre.

GG eſt la fourchette qui eſt attachée à l'extrémité de la verge IL.

M eſt un filet de ver à ſoye appliqué ſur la fourchette, aux endroits GG, & placé horizontalement.

Il faut que la verge IL, ſoit de telle longueur, que le filet M ſoit poſé le plus proche qu'il ſera poſſible, du filet qui eſt dans le chaſſis P, enſorte qu'on puiſſe les voir tous deux enſemble très-diſtinctement, comme s'il n'y en avoit qu'un ſeul.

Aux endroits marquez R, la boëte a deux trous taraudez, qui répondent à deux autres trous, qui ſont faits dans la partie d'en-bas de la branche de fer à laquelle le plomb eſt attaché, mais ces trous ſont un peu plus bas que ceux de la boëte; enſorte que lorſqu'on fait entrer par les trous de la boëte deux vis pointuës, elles puiſſent élever les pivots de deſſus leurs appuis, afin que dans le tranſ-

port de l'inſtrument ils ne puiſſent pas s'uſer & s'émouſſer. On peut faire ces trous aux deux autres côtez de la boëte ſi l'on veut.

Maniere de ſe ſervir de ce Niveau, & de le rectifier.

On ne ſe ſert point ordinairement de pied pour ſoutenir ce niveau, on l'appuye ſeulement contre le coin d'une muraille, ou contre un arbre en le tenant ferme avec les deux mains, enſorte que le plomb ſoit en liberté de balancer ſur ſes pivots, & on éleve doucement le tuyau de la lunette, tant que l'on voye le filet M de la fourchette G, joint avec le filet du chaſſis P, & l'objet repreſenté ſur les filets, donne le point de viſée.

On le peu rectifier comme on a fait le premier niveau, par le moyen de deux nivellemens réciproques, ou bien par le moyen de deux nivellemens faits d'une même ſtation à deux points également éloignez d'un côté, & d'autre; car par ces opérations ayant déterminé un point de niveau apparent, à l'égard d'un autre point, on courbera doucement la verge IL, tant que les filets joints enſemble viſent au point que l'on a déterminé, le niveau étant poſé à l'autre point: mais lorſque la différence eſt trop grande, & qu'il faudroit par trop ployer la verge qui ſoutient la fourchette, il ſera plus à propos de changer le filet de place.

Toute la juſteſſe de ce niveau dépend de la ſuſpenſion des pivots: mais comme il n'eſt pas poſſible de la faire auſſi délicate qu'il ſeroit neceſſaire pour avoir une grande juſteſſe, on ne fait ſeulement la lunette à deux verres que d'un pied, ou 15 pouces de long, & la longueur du plomb de 8 ou 9 pouces. Ce niveau eſt fort bon pour niveller des points qui ne ſont pas fort éloignez, & lorſqu'il eſt une fois rectifié, il n'eſt pas ſujet à changer en le portant en voyage.

On a inventé plusieurs autres niveaux dont on auroit souhaité de donner ici les descriptions ; mais comme ils sont assez connus par celles que les Inventeurs même en ont publiées, & que d'ailleurs la plûpart ne pourroient pas servir à des nivellemens un peu éloignez, qui est le principal dessein de cet Ouvrage, on a crû qu'il n'étoit pas à propos d'en parler.

DESCRIPTION D'UN AUTRE NIVEAU, mis en pratique par M. de la Hire de l'Academie Royale des Sciences.

Ce niveau tire toute sa justesse de la superficie de l'eau, que nous supposons également éloigné du centre de la Terre, & il ne consiste que dans la maniere de faire nager sur l'eau une lunette d'approche qui lui sert de pinules comme aux autres niveaux.

Dans la premiere figure ARC, BDT, sont deux vases quarrez de bois ou de fer blanc, larges de 4 pouces ½ environ, & hauts de huit pouces.

Le tuyau CD sert de communication à ces deux vases, afin que l'eau puisse passer aisément de l'un dans l'autre ; il doit avoir au moins un demi-pouce de diamétre, & de longueur environ deux pieds & demi.

Le tuyau AB est attaché au haut des deux vases quarrez & sert de tuyau de lunette.

Le vase ARC est percé en R, vis-à-vis le tuyau AB, pour attacher en cet endroit un faux canon qui porte celui du verre oculaire, que l'on peut éloigner ou approcher suivant la necessité.

L'autre vase TBD est aussi percé dans sa partie T, vis-à-vis le tuyau AB, pour faire l'ouverture de la lunette.

On attache un petit plomb au milieu du tuyau AB, qui

qui en battant ſur une marque faite au tuyau CD, fait voir quand les deux vaſes ſont à peu près de niveau, pour y pouvoir mettre l'eau à même hauteur.

On doit mettre ſur les deux vaſes une légere couverture, que l'on puiſſe ôter facilement; elle ſert pour empêcher la lumiere de donner ſur le verre objectif, & ſur les filets, afin que la lunette faſſe plus d'effet.

Il y a encore aux deux côtez de chaque vaſe deux petites lames de léton ou de fer blanc, dont nous ferons la deſcription en parlant de leur l'uſage.

La deuxiéme figure repreſente une des deux boëtes qui portent les pinules pour les faire nager ſur l'eau; elles doivent être faites de léton fort mince, pour pouvoir nager plus facilement, & ne s'enfoncer qu'autant qu'il ſera neceſſaire, par le moyen du poids que l'on enferme au dedans.

Le corps de ces boëtes eſt cylindrique, de deux pouces & demi de hauteur environ, qui doit être auſſi la grandeur du diamétre de ſon cylindre; il doit être bien fermé d'un couvercle pardeſſus, & au-deſſous il y a un chapiteau d'un pouce de hauteur vers ſa pointe E.

Le tuyau FG eſt ſoudé au-deſſus de la boëte, il a de hauteur deux pouces, & de largeur un pouce; la partie ſupérieure de ce tuyau eſt ouverte des deux côtez juſques à la hauteur d'un pouce, & dans chaque partie qui reſte au-dedans de l'ouverture, on y attache une petite couliſſe qui ſert à porter le chaſſis de la pinule, qui ne doit y entrer que juſques à une certaine profondeur où il doit être arrêté.

LM eſt un fil de léton preſqu'auſſi long que la largeur du vaſe, & qui paſſe dans le milieu de ce tuyau un peu au-deſſous de la pinule. Ce fil ſert à entretenir la boëte & la pinule lorſqu'elle nage ſur l'eau, enſorte qu'elle preſente toûjours ſon ouverture à celle du tuyau de la lunette

AB, il gliſſe entre deux petites aîles ou lames de fer blanc ou léton qui ſont attachées aux deux côtez de chaque boëte, & qui ſont auſſi longues, & auſſi proches l'une de l'autre qu'il eſt neceſſaire pour empêcher que le fil de léton qui tient au tuyau FG, ne vacille par trop d'un côte & d'autre.

Il y a une ouverture au couvercle des boëtes au-dedans du tuyau FG pour y pouvoir mettre dedans une bale de plomb, ou un peu de mercure, ce qui empêche que les boëtes en flottant ſur l'eau ne puiſſent pancher d'un côté ou d'autre, & la quantité du mercure, ou la bale de plomb doit être aſſez peſante pour faire enfoncer la boëte dans l'eau juſques à l'endroit du tuyau marqué IK, qui eſt demi-pouce environ au-deſſus du couvercle de la boëte; on doit refermer enſuite la boëte avec une petite platine de léton fort mince que l'on attache bien tout autour avec de la cire molle.

Ces deux boëtes doivent être d'une figure fort égale dans toutes leurs parties, & lorſqu'elles ſont chargées des pinules, & du plomb ou du mercure, elles doivent auſſi peſer également.

La troiſiément figure repreſente la pinule qui porte la croiſée des filets.

La quatriéme figure eſt celle qui porte le verre objectif.

Chacune de ces pinules eſt un petit chaſſis qui entre dans les couliſſes qui ſont aux deux côtez de la partie ſupérieure du tuyau FG.

On met dans les vaſes ARC, BDT, autant d'eau qu'il eſt neceſſaire pour faire élever les boëtes qui portent les pinules, enſorte qu'elles répondent à l'ouverture du canon AB.

Maniere de rectifier ce Niveau.

On pourra rectifier ce niveau par l'une des deux manieres qui ſont propoſées ci-devant; par exemple, en ſe ſervant de la ſeconde maniere, on marquera aux deux extrémitez de la ligne que l'on a meſurée de 300 toiſes, les hauteurs des points de viſée, l'inſtrument étant au milieu, & par ce moyen l'on déterminera l'endroit où l'inſtrument doit viſer, lorſqu'il ſera poſé à l'une des deux extrémitez de cette ligne; & l'on pourra élever ou abaiſſer au long des couliſſes l'un des deux chaſſis qui ſervent de pinules, ou bien en lever l'un, & baiſſer l'autre tant qu'il ſera neceſſaire pour viſer au point déterminé; & lorſqu'ils ſeront bien poſez, on les pourra arrêter en cette ſituation, en mettant pardeſſus & pardeſſous de la cire blanche ou jaune un peu amollie.

Si la correction qu'il faut faire n'eſt pas conſiderable, il n'y aura qu'à abaiſſer ou un peu élever le filet horizontal qui eſt ſur la pinule, & les laiſſer dans l'endroit où elles doivent être poſées.

Autre maniere de rectifier ce Niveau ſans changer de ſtation.

Cette maniere de rectification demande que les pinules ſoient égales, tant dans leur hauteur & leur largeur, que dans leur peſanteur, afin de les pouvoir mettre dans les couliſſes de haut en bas, & de les pouvoir changer d'une boëte à l'autre, ſans que dans ce changement les boëtes ſur leſquelles on les met enfoncent plus ou moins dans l'eau.

En donnant d'abord un coup de niveau, on remarquera exactement l'objet où viſe la croiſée des filets, & ayant

renversé le chassis qui porte le verre objectif dans sa coulisse, l'on observera si elle vise encore au même endroit où elle visoit auparavant le renversement : car si elle donne dans le même point, c'est une marque assurée que le centre de la double convexité du verre est dans le milieu de la hauteur de son chassis; s'il n'y est pas, il faudra tourner le verre dans son chassis, ou bien l'y élever ou abaisser, tant qu'il s'y rencontre, en réiterant l'opération. Il faudra faire la même chose pour l'autre chassis ou pinule qui porte les filets; car si l'objet représenté sur leur croisée s'y trouve dans la premiere & dans la seconde position renversé, il est évident que cette croisée sera au milieu de son chassis; & si elle n'y est pas, on élevera ou abaissera le filet horizontal tant qu'elle y soit placée.

Par ces deux opérations, on est assuré que la lunette est centrée de telle sorte, que la ligne qui va de la croisée des filets au milieu de la hauteur de la pinule du verre objectif, demeure toûjours dans le même plan qui passe par le filet horizontal de la lunette, dans chaque position; mais il faut connoître encore si ce plan est parallele à la superficie de l'eau que nous posons être de niveau.

Ayant observé le point de visée où donne la lunette, on changera les chassis qui portent les pinules d'une boëte à l'autre, & par conséquent les boëtes seront aussi changées d'un vase dans l'autre : alors si la lunette donne encore le même point de visée qu'elle marquoit auparavant, le niveau sera entierement rectifié; mais si elle donne trop haut ou trop bas, il faudra élever ou abaisser l'endroit sur lequel les chassis portent, tant que la lunette vise au point, qui est au milieu des deux points de visée que l'on aura trouvez, ce que l'on pourra encore vérifier en répetant le changement des pinules, & des boëtes dans les vases par plusieurs fois.

On pourroit se servir d'un petit fil d'argent, dont on

prendroit la partie ſupérieure ou inférieure, pour déterminer les points de viſée au lieu du filet de ver à ſoye, qui ſe pourroit relacher à cauſe de l'eau des vaſes qui en eſt fort proche.

Les boëtes qui portent les pinules ont été faites égales en figure & en peſanteur, afin qu'elles puiſſent s'élever ou s'abaiſſer également lorſque l'eau ſe condenſe ou ſe rarefie.

On doit remarquer que ce niveau détermine le niveau apparent à l'égard du point qui eſt au milieu des deux pinules, mais la croiſée des filets en eſt ſi proche, que l'on peut prendre les meſures à ce point, comme s'il étoit entre les deux pinules, ſans que cela puiſſe apporter aucune erreur ſenſible dans les hauteurs des nivellemens.

Ce niveau ſe peut tranſporter aiſément, en conſervant les boëtes & les pinules dans un étuy, ſans qu'il ſoit beſoin de le rectifier toutes les fois que l'on s'en ſervira, & même en le portant d'un lieu à un autre en nivellant; il ne faudra jamais laiſſer les pinules dans les vaſes où eſt l'eau, de crainte que dans l'ébranlement du chemin il n'entre quelque goutte d'eau dans les tuyaux qui portent les pinules, ce qui feroit que les boëtes entreroient davantage dans l'eau, étant alors plus peſantes.

On pourra donner à cet inſtrument quel pied on jugera le plus à propos, ou en le poſant ſur un petit banc pour l'élever un peu de terre, ou en l'attachant contre une planche & la poſant ſur le bas du chevalet, ou enfin en ajoûtant trois ou quatre bouts de tuyaux à charnieres aux deux boëtes pour y ficher des bâtons de quelle grandeur on voudra, qui lui ſerviront de pied, comme on fait ordinairement aux demi-cercles dont on ſe ſert en campagne pour lever des plans.

Méthode de rectifier le Niveau de M. Picard ; par le renversement.

J'appelle simplement *centre*, le point en A d'où pend le cheveu du perpendicule, dans l'usage ordinaire du niveau ; & *centre de la platine*, le point vers C qui doit être à plomb avec le premier, & sur lequel doit battre le cheveu lorsque la lunette appliquée au Niveau, est dans une situation horizontale.

Ayant posé & bien callé le Niveau, tel que la figure le represente, faites ensorte que le cheveu batte exactement sur le centre de la platine, & qu'il y ait en même tems un objet remarquable & assez éloigné, dans l'intersection des filets de la lunette. Cette position du niveau & du rayon visuel étant bien assuré, ôtez le plomb & le cheveu du perpendicule, & renversez le niveau sur son chevalet, ensorte que le centre se trouve vers le bas, & le centre de la platine vers le haut ; ce qui se pourra faire fort aisément : il faut avoir attention seulement que la hauteur de la lunette au-dessus de terre soit la même après le renversement qu'auparavant. Attachez alors le cheveu avec un peu de cire ou autrement au-dessus du centre de la platine, & ayant ajoûté le plomb, laissez pendre le cheveu de telle sorte qu'il passe exactement par le centre de la platine, & qu'il soit censé pendre de ce centre même. Dirigez ensuite la lunette au même objet que vous aviez remarqué, & placez l'intersection des filets sur le même point de l'objet qu'auparavant. Si dans cette situation du cheveu & de l'objet, le cheveu bat exactement sur le centre qui est en en-bas, le niveau est exact & parfaitement vérifié ; c'est-à-dire, que l'axe de la lunette, que je prends ici pour celui qui passe par l'intersection des filets, est exactement perpendiculaire à la

ligne tirée du centre au centre de la platine. Mais ſi le cheveu ne bat pas exactement ſur le centre, il faut, en changeant ſon point de ſuſpenſion, faire enſorte qu'il y batte, & en étant bien aſſuré, ſans que l'objet ait changé de place dans la lunette, marquez ſur l'arc de cercle, ou la ligne droite tracée ſur la platine & qui paſſe par ſon centre, le point précis où cet arc eſt coupé par le cheveu tendu librement ; le milieu entre ce point & le centre de la platine ſera le nouveau centre exact de la platine, d'où la ligne tirée au centre fera exactement un angle droit avec l'axe de la lunette. On peut, ſi l'on veut, marquer ce nouveau point, & s'en ſervir de centre de la platine ; mais il eſt plus à propos & plus commode de ſe ſervir du point ordinaire, & de corriger l'erreur du niveau en hauſſant ou en baiſſant les filets de la lunette, c'eſt-à-dire, en tournant d'un côté ou d'autre, la vis qui preſſe le chaſſis des filets contre le reſſort qui eſt en-deſſous. La figure 3ᵉ le repreſente fort diſtinctement. La méthode de corriger cette erreur eſt telle.

Le nouveau centre de la platine étant légerement marqué, remettez le niveau dans ſa ſituation ordinaire ; & le cheveu tombant librement du centre, faites-le battre exactement ſur le nouveau centre de la platine ; alors l'objet dont vous vous êtes ſervi ſe trouvera dans la lunette au-deſſus ou au-deſſous de l'interſection des filets, mais par le moyen de la vis, élevez ou abaiſſez le chaſſis qui les porte, juſqu'à ce que cette interſection couvre l'objet ; dans cet état le niveau ſera exact & parfaitement vérifié : car ſi on le renverſe une ſeconde fois, & qu'on ait bien opéré, on trouvera que l'objet étant dans l'interſection des filets, la ligne du perpendicule ſera la même dans l'un & l'autre cas.

Si l'erreur étoit ſi grande que la vis ou le reſſort n'euſſent pas aſſez de jeu pour la corriger toute entie-

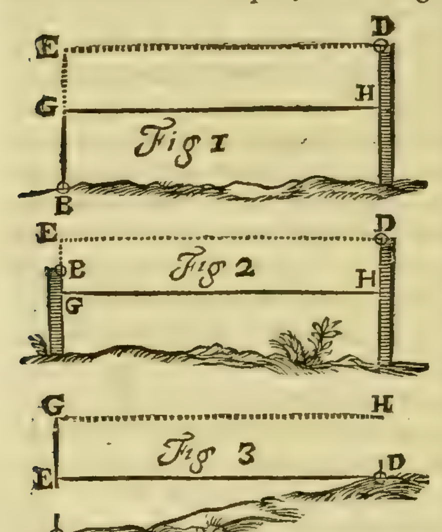
re, il faudroit changer ou le centre, ou le centre de la platine.

CHAPITRE III.

De la Pratique du Nivellement.

IL reste maintenant à parler de la Pratique du Nivellement, lequel est ou simple & immédiat d'un point à un autre; ou bien composé de plusieurs nivellemens simples & liez ensemble, comme nous expliquerons dans la suite.

Après ce qui a été dit à la fin du premier Chapitre, on ne croit pas qu'il reste beaucoup de difficulté touchant le nivellement simple, où il s'agit d'établir par quelque moyen que ce soit la ligne du vrai niveau, dont les deux extrémitez servent à trouver la différence du vrai niveau entre les deux points proposez à niveller, que nous appellerons *les Termes du Nivellement.*



Les points BD sont les termes du nivellement.

Les extrémitez GH de la ligne G H sont deux points dans le vrai niveau aux stations BD, c'est-à-dire, au-dessus ou au-dessous des termes du nivellement.

Par

Par l'un des termes D soit mené DE parallele à GH jusqu'au point E à la station de l'autre terme : Il est évident que les points D & E seront aussi dans le vrai niveau.

Maintenant si la ligne GH que l'on a établie dans le vrai niveau passe entre les termes, comme dans la premiere figure, où GH est au-dessus de B, & au-dessous de D, la somme des lignes BG, DH, qui sont les distances entre les termes du nivellement & les extrémitez de la ligne GH, sera la différence du niveau des termes proposez, ce qui est évident; car la ligne BE, qui est cette même différence du niveau est égale à BG, & à DH ensemble; car GE & DH sont égales, à cause des paralleles GH, ED.

Mais si les termes BD sont tous deux au-dessus, ou au-dessous de la ligne GH, comme dans les 2e & 3e figures, la différence des distances BG, DH entre les termes, & la ligne GH, sera la différence des termes proposez à niveller; car la ligne BE, qui est cette différence, est égale à la différence des lignes BG, DH; où l'on doit remarquer que si la ligne du niveau GH est au-dessous des termes, si DH est plus grande que BG, le terme D sera plus élevé que le terme B, comme dans la deuxiéme figure; mais au contraire, si la ligne du niveau GH est au-dessus des termes, & que BG soit plus grande que DH, le terme B sera plus bas que le terme D, comme dans la 3e figure.

Il arrive quelquefois que la ligne du niveau passe par l'un des termes, & donne tout d'un coup leur différence de niveau, sans qu'il soit besoin d'addition ou de soustraction.

Nous avons déja expliqué dans le premier Chapitre, que le nivellement simple n'a pas besoin de preuve, ni de correction, lorsque l'instrument a été placé au milieu,

ou à égale diſtance des termes à niveller : mais lorſqu'il eſt placé dans un des termes, & que l'on n'eſt pas aſſuré de ſa juſteſſe, ou bien quand on en ſeroit aſſuré, ſi l'on veut éviter la peine de meſurer la diſtance entre les termes, ſans laquelle on ne peut pas ſçavoir au juſte qu'elle doit être la correction pour le hauſſement du niveau apparent pardeſſus le vrai, ou enfin lorſque l'on craint la réfraction, il faut ſe ſervir du nivellement réciproque pour trouver immédiatement la véritable différence de niveau entre les deux termes propoſez ; dont voici les régles.

Premiere Régle.

Au nivellement réciproque, ſi de l'une des ſtations le terme nivellé paroît autant au-deſſous, que dans l'autre nivellement, l'autre terme nivellé paroît au-deſſus, c'eſt une marque aſſurée que chacun des deux nivellemens réciproques ſera juſte : mais ſi l'un des deux termes paroît plus, ou moins bas par le ſecond nivellement, que l'autre terme n'avoit été trouvé haut par le premier, la moitié de la ſomme de ce que l'on aura conclu, tant d'élevation, que d'abaiſſement, ſera la juſte différence requiſe du niveau des deux termes propoſez, dont l'un ſera plus bas, ou plus élevé que l'autre.

Exemple.

Si par le premier nivellement l'un des termes à paru haut de ſix pieds, & que par le ſecond nivellement l'autre terme paroiſſe bas de 8 pieds, 8 & 6 font 14, dont la moitié 7 eſt la véritable différence requiſe entre les termes propoſez à niveller.

Deuxiéme Régle.

Si par les deux nivellemens les termes paroiſſent tous deux également hauts, ou également bas, ils ſont effectivement de niveau entr'eux : mais ſi l'un des deux eſt plus élevé, ou plus bas que l'autre, & qu'ils paroiſſent pourtant tous deux plus hauts, ou plus bas, il faudra prendre la différence des deux hauteurs, ou des deux abaiſſemens, dont la moitié ſera la veritable hauteur, dont celui, qui a paru le plus haut des deux, ſoit qu'ils paruſſent tous deux hauts, ou tous deux bas, eſt effectivement plus haut que l'autre.

EXEMPLE.

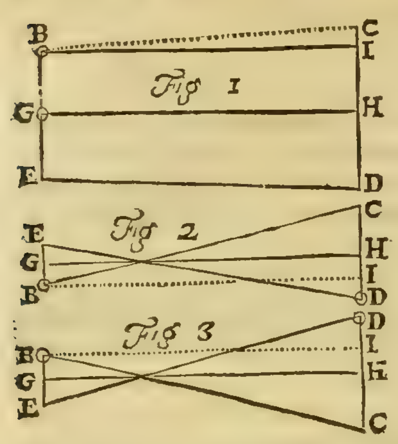
Si par le premier nivellement un des termes a paru haut de 6 pieds, & que par le ſecond nivellement réciproque l'autre terme paroiſſe auſſi haut, mais de 8 pieds, la différence de ces deux hauteurs eſt 2 pieds, dont la moitié, qui eſt un pied, eſt la veritable hauteur de celui qui avoit paru haut de 8 pieds, dont il ſurpaſſe l'autre.

Démonſtration des deux Régles précedentes.

Les points B & D ſont les termes du nivellement, que l'on a propoſez ; leurs différences de niveau réciproques, mais apparentes ſeulement, ſont DC & BE ; car les lignes de viſée ſont BC, & DE : ſi l'on coupe en deux également DC en H, & BE en G, les points GH ſeront de niveau entr'eux, par ce qui a été démontré au premier Chapitre ; ayant donc mené BI parallele à GH, on aura DI pour la veritable différence du niveau des termes B, D.

Il eſt évident que lorſqu'un des termes ſera au-deſſus

de GH, & l'autre au-dessous (comme dans la premiere figure, qui est pour la premiere Régle) DI sera composé de DH moitié de DC, & de HI, ou GB moitié de BE, & par conséquent DI sera égale à la moitié de la somme de DC & BE.



Mais si les termes BD sont tous deux au-dessous, ou bien tous deux au-dessus de GH; (comme dans les 2[e] & 3[e] figures) alors DI sera égale à la moitié de DC moins la moitié de BE, ce qui revient à la même chose que de prendre la moitié de la différence des entieres CD, BE, comme l'on a fait dans la seconde Régle ci-dessus.

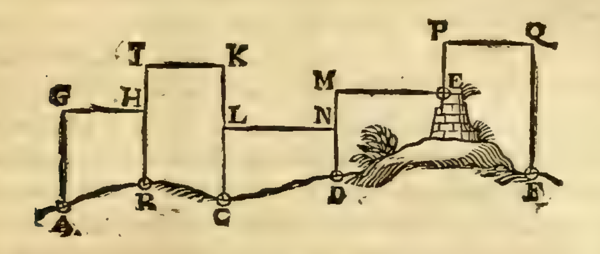
L'on ne parle point de la réfraction, car on la suppose égale de part & d'autre dans chacun des nivellemens réciproques, comme l'on a dit au premier Chapitre.

Pour ce qui est du nivellement composé de plusieurs nivellemens simples, il faut que la liaison en soit telle, que deux nivellemens simples consécutifs ayent toûjours un même terme du nivellement, qui leur soit commun.

Exemple.

A & F sont deux termes extrêmes qui sont proposez à niveller : mais on est obligé par quelques empêchemens de faire ce nivellement en plusieurs opérations, par le moyen des autres termes B, C, D, E pris entre deux à volonté suivant la commodité des lieux, chacun desquels

eſt commun à deux nivellemens, comme par exemple B



eſt commun à BH hauteur de GH, & à BI hauteur de IK, & ainſi des autres.

Or la maniere la plus ſûre dans la ſuite des nivellemens, eſt de garder toûjours, autant qu'il eſt poſſible, une marche alternative entre l'inſtrument, & les bâtons où eſt attaché la carte qui ſert de point de viſée; j'entens que ſi au premier coup de niveau le bâton eſt demeuré derriere, & que l'inſtrument ait été porté devant, l'inſtrument demeurera à la même place, & le bâton prendra le devant pour le ſecond nivellement; & ainſi toûjours de ſuite par ſtations, qui ſoient de deux en deux à diſtances à peu près égales; je dis à peu près, ce qui ſera aſſez juſte, ſoit par la ſimple eſtimation, ſoit par le moyen de la lunette dans laquelle un même objet occupe certaine partie de l'ouverture, plus ou moins grande, à proportion qu'il eſt plus ou moins éloigné.

Mais parce que l'on ne pourra toûjours garder la marche alternative entre l'inſtrument & les bâtons, on aura ſoin de récompenſer en arriere les coups qui auront été faits en avant: j'entens que ſi, par exemple, les bâtons ont marché devant deux fois de ſuite, ils demeureront auſſi derriere autant de fois; & il faudra ſe ſouvenir que pour récompenſer un grand coup de niveau, il en faut quatre moindres, dont chacun ſoit égal à la moitié

du grand, d'autant que pour demi-diſtance il n'y a que le quart du hauſſement du niveau apparent, ſuivant la raiſon des quarrez. L'on ſuppoſe toûjours que l'inſtrument ſoit juſte, parce qu'autrement il en faudroit conſiderer l'erreur, laquelle ſeroit en raiſon des diſtances.

Il arrive ſouvent qu'il faut niveller deux points qui ſont au pied d'une montagne, l'un d'un côté, & l'autre de l'autre, enſorte que la montagne eſt entre deux; en ce cas on eſt obligé de faire pluſieurs coups de niveau, toûjours en montant d'un côté, & en deſcendant de l'autre; & ſouvent la commodité des lieux ne permet pas, que les coups de niveau que l'on donne en deſcendant ſoient égaux aux premiers que l'on a faits en montant, parce que le terrain en détermine ordinairement la longueur; & comme il eſt toûjours bon, de les faire les plus longs qu'il ſera poſſible *, afin que la ſomme des nivellemens ſoit moins ſujette à erreur, il ſera plus à propos de meſurer la diſtance entre les nivellemens, pour leur donner à chacun la correction qui leur convient: il n'eſt pas neceſſaire que cette meſure ſoit ſi exacte, car elle ne ſert que pour avoir la correction du niveau apparent pardeſſus le vrai, laquelle ne change pas ſenſiblement pour un peu de différence. On ſuppoſe toûjours dans toutes ces opérations que l'inſtrument eſt bien rectifié.

Les choſes étant ainſi ſoigneuſement executées, il n'y aura rien à craindre pour la juſteſſe du nivellement, pour-

* Il eſt à propos de remarquer, contre ce qui eſt dit ici, que plus les coups de Niveau ſont longs, plus ils ſont ſujets à erreur. Dans ces cas les réfractions plient beaucoup plus les rayons viſue's, & ces réfractions changent ſenſiblement d'une ſtation à l'autre. Mais il y a plus; les marques ne ſe voyent pas aſſez diſtinctement, & ne permettent pas, par le peu de champ qu'elles occupent dans la Lunette, de déterminer exactement le point auquel répond l'interſection des filets: cette cauſe peut produire une erreur conſiderable. Le nivellemenr demande une extrême préciſion, & l'on y doit tellement avoir égard aux moindres minuties, que cela même a paſſé en proverbe, & ſe dit de ceux qui s'occupent de riens.

vû que d'ailleurs l'inſtrument étant bien gouverné, on tienne un compte fort exact des hauteurs des lignes du nivellement, comme AG, BH, BI, & le reſte.

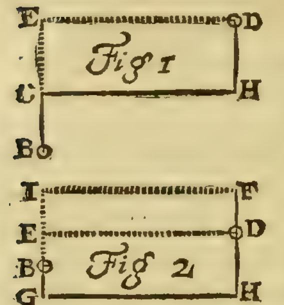
La pratique ordinaire pour tenir regiſtre des obſervations, eſt d'écrire après chaque coup de niveau particulier, ce qui en réſulte; & de faire deux colonnes, l'une que l'on appelle des montans, & l'autre des deſcendans: mais ſans s'embaraſſer en chemin d'aucun calcul, on peut écrire entierement les obſervations, en telle maniere qu'il eſt facile d'en faire enſuite le calcul tout à loiſir.

Pour cet effet, ſans faire aucune diſtinction entre les bâtons, & l'inſtrument, conſiderant chaque ligne du nivellement comme ſoutenuë par les deux bouts, on tient compte de deux hauteurs, l'une premiere que l'on écrit à la gauche, & l'autre ſeconde que l'on écrit à la droite vis-à-vis la premiere; il y aura donc une colonne de toutes les hauteurs, que l'on appelle premieres, & une autre de toutes celles que l'on appelle ſecondes, ſelon l'ordre de la marche du nivellement.

EXEMPLE.

Suppoſé que l'on ait commencé par A. On écrit dans la premiere colonne la hauteur AG, & à côté dans la ſeconde la hauteur BH; & enſuite on écrit encore dans la premiere la hauteur BI, & dans la ſeconde la hauteur CK; & de même dans la premiere la hauteur CL, & dans la ſeconde la hauteur DN; & ainſi de ſuite; ce qui repreſentera diſtinctement tous les nivellemens: & s'il arrive que la ligne du nivellement manque de hauteur par un bout, comme ME dans la même figure, on marque un zero dans la colonne à la place de la hauteur de la ligne M E par ſon extrémité E, afin de conſerver la diſtinction de tous les nivellemens.

Enfin s'il arrive que la ligne du nivellement manque non seulement de hauteur par un bout, mais encore qu'elle soit plus basse qu'un des termes, ou même que tous les deux, comme dans les figures suivantes, où B, D sont les termes, & GH la ligne du nivellement.



Dans le premier cas representé par la premiere figure, lorsque la ligne du nivellement passe au-dessous du plus haut terme D, comme en H, & au-dessus du plus bas terme B, comme en G, on écrit zero pour la hauteur de la ligne du niveau GH au terme D, & pour la hauteur de la même ligne du niveau au terme B, on ajoûte DH avec BG, qui fera toute la hauteur BE, que l'on écrit pour la hauteur de la ligne du niveau au terme B, comme si effectivement la ligne de niveau avoit été ED.

Mais au second cas representé dans la 2[e] figure, lorsque les deux termes B, D sont au-dessus de la ligne du nivellement, on transpose les deux hauteurs BG, DH, écrivant dans la premiere colonne celle qui suivant l'ordre du nivellement doit être dans la seconde; & reciproquement en mettant dans la seconde celle qui devoit être effectivement dans la premiere. La démonstration de cette pratique se connoîtra facilement, si l'on suppose que la ligne HD soit prolongée en F, ensorte que DF soit égale à BG, & ayant mené FI parallele à GH, cette ligne FI sera aussi de niveau, & on la pourra considerer comme une ligne du nivellement; mais à cause des lignes paralleles, la figure HI est un parallelogramme dont les côtez opposez sont égaux; c'est pourquoi, puisque DF est égale à BG, BI sera égale à DH, car GI & HF sont égales; par le moyen de cette transposition l'opération

l'opération ſe trouve redite, comme ſi effectivement la ligne FI étoit celle du nivellement; de ſorte que dans ce dernier cas on fait monter la ligne du nivellement au-deſſus des deux termes, au lieu que dans le premier elle eſt ſeulement élevée autant qu'il eſt neceſſaire pour la faire paſſer par le plus haut.

Avec toutes ces précautions on réduit les opérations comme ſi la ligne du nivellement n'étoit jamais au-deſſous des termes du nivellement, ce qui eſt neceſſaire pour obſerver une même maniere d'écrire dans les Memoires.

Les nivellemens étant achevez, on fait deux ſommes, l'une de toutes les hauteurs de la premiere colonne à gauche, & l'autre de celles de la ſeconde à droite; & ſi la premiere ſomme eſt plus grande que la ſeconde, le dernier terme ſera plus haut que le premier de la différence des ſommes: mais ſi au contraire la ſeconde ſomme ſe trouve plus grande que la premiere, le dernier terme ſera plus bas que le premier, de la différence des ſommes.

Démonſtration.

Puiſque la ligne du nivellement, qui par les précautions que l'on a apportées, doit être ici confonduë avec la ligne du vrai niveau, n'eſt jamais plus baſſe que le plus haut des deux termes de chaque nivellement particulier, ou que s'il arrive autrement, on en fait la réduction: il s'enſuit que le plus bas des deux termes de chaque nivellement, eſt toûjours du côté où la ligne du nivellement a le plus de hauteur, & qu'ainſi on peut dire qu'à chaque nivellement particulier on eſt allé en montant, lorſque la plus grande hauteur de la ligne du nivellement a été écrite dans la premiere colonne; & qu'au contraire on eſt allé en deſcendant, lorſqu'elle a été

mise dans la seconde : de sorte que si à chaque nivellement, au lieu d'écrire les deux nombres tous entiers chacun dans sa colonne, on avoit seulement retenu leur différence pour l'écrire à la place du plus grand nombre, & que voulant conserver l'ordre des nivellemens, on eut rempli d'un zero la place de l'autre nombre ; on auroit deux colonnes, qui representeroient la suite de tous les nivellemens, & dont la premiere feroit voir de combien on seroit monté, & la seconde de combien on seroit descendu : de maniere que l'on étoit plus monté que descendu, ou bien, ce qui est la même chose, & si la somme des hauteurs de la premiere colonne étoit plus grande, que celle de la seconde, la différence des sommes seroit la hauteur du dernier terme pardessus le premier ; & au contraire si l'on étoit plus descendu que monté, le premier terme seroit plus haut que le dernier.

Si l'on écrivoit seulement les différences des hauteurs des lignes du nivellement, on ne feroit autre chose que de retrancher certains nombres, qui se trouvent également dans chaque colonne, lorsque l'on écrit tout au long, comme nous avons dit ci-devant, ce qui ne change rien à leur différence ; & l'on épargne seulement la peine de faire plusieurs soustractions où l'on pourroit se tromper aisément, dans un tems principalement où l'on est d'ailleurs assez embarrassé, & occupé à faire les observations avec exactitude.

Il faut observer soigneusement dans cette méthode, de prendre bien garde de ne pas écrire dans la premiere colonne ce qui doit être mis dans la seconde : ni au contraire de placer dans la seconde ce qui doit être dans la premiere : c'est pourquoi il est très-à-propos, que plusieurs personnes écrivent séparément les observations, & que de tems en tems ils confrontent leurs Memoires ; il sera bon aussi de laisser en chemin certaines marques

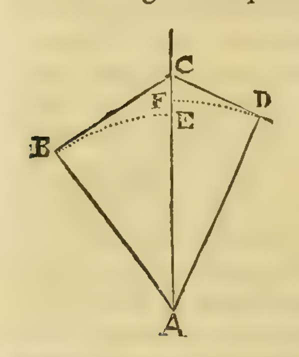
ou repaires, pour y avoir recours en cas de doute, ou de mécompte, & pour n'être pas obligé à refaire entiérement le travail.

S'il arrive en chemin que la ligne du nivellement donne dans le ſommet de quelque toit, ou dans quelqu'endroit, qui ſoit facile à reconnoître de pluſieurs lieux; en ce cas ayant écrit dans la premiere colonne, la hauteur de l'inſtrument, on ira au-delà de ce point auſſi loin que l'on en avoit été éloigné en-deçà; & ſi par hazard on trouve un endroit d'où ce même objet ſoit vû dans le niveau apparent, comme dans la premiere ſtation, on écrira dans la ſeconde colonne la hauteur de l'inſtrument pour cette ſeconde ſtation; ou même, ſi elle eſt égale à la premiere, on les pourra ſupprimer toutes deux, & l'on continuera le nivellement comme auparavant: car on doit tenir pour maxime, qu'on peut ſupprimer les nombres qui ſe trouveroient également dans chaque colonne: mais ſi au cas propoſé, la ſeconde ſtation, d'où l'on voit le même objet, en eſt moins éloignée que la premiere; il faudra diminuer la ſeconde hauteur de l'inſtrument de la différence des hauſſemens du niveau apparent pour la diſtance de chaque ſtation; & au contraire il faudra l'augmenter, ſi l'on ſe trouve plus éloigné.

Démonſtration.

A ſoit le centre de la Terre, C ſoit un point au-deſſus de la circonférence, lequel ſe trouve dans le niveau apparent des deux autres points B, D qui ſont inégalement éloignez du centre A; E eſt dans le vrai niveau du point B; & F dans celui de D; & parce que les angles ABC, ADC ſont ſuppoſez droits, il eſt évident par la 47[e] Propoſition du premier Livre des Elemens d'Euclide, que la ſomme des quarrez de AB & de BC ſera

égale à la ſomme des quarrez de AD & de DC, qui ſont chacune égale au quarré de AC ; d'où il s'enſuit, que ſi la

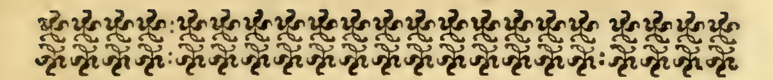


ligne droite eſt plus petite que BC, AD ſera plus grande neceſſairement que AB ; de ſorte que le point D, qui eſt le moins éloigné de C, ſera plus éloigné du centre de la Terre A, que le point B, & par conſéquent il ſera plus haut : & ſi du centre A l'on décrit les arcs de cercle BE, DF, il eſt évident que EC eſt le hauſſement du niveau apparent pardeſſus le vrai à l'égard du point B, & ſemblablement FC eſt celui qui convient au point D ; c'eſt pourquoi EF eſt la difference des hauſſemens du niveau apparent pour les deux points B, D.

On remarquera que les hauſſemens CE, CF répondent à des rayons de différentes longueurs, comme ſont AB, AD, au lieu que les hauſſemens du niveau apparent, que l'on a donnez dans le premier Chapitre, ſont calculez ſur un ſeul rayon, ou demi-diamétre : mais cette différence dans la pratique étant comparée au demi-diamétre de la Terre, ne peut être d'aucune conſideration.

On ſeroit trop long ſi l'on vouloit rapporter tous les cas en particulier qui peuvent arriver dans la ſuite du nivellement compoſé, mais un Obſervateur un peu intelligent ne rencontrera aucune difficulté qui puiſſe l'arrêter, s'il a bien entendu ce qui a été expliqué ci-deſſus.

On ne dit rien de la preuve du nivellement compoſé, parce qu'il la porte avec ſoi, ſuppoſé que tout ſoit executé de la maniere que nous avons dit, & que d'ailleurs l'on ait tenu un regiſtre exact de toutes les hauteurs des lignes du nivellement.



RELATION

DE PLUSIEURS NIVELLEMENS faits par ordre de ſa Majeſté.

Par M. Picard.

SA MAJESTE' ayant réſolu de faire conduire à Verſailles la meilleure Eau pour boire, que l'on pourroit trouver dans les lieux circonvoiſins, on propoſa celle de la Montagne de Roquencourt comme une des plus proches, & des plus ſaines de tout le païs : mais quoique cette propoſition parut d'abord impoſſible, à cauſe que cette eau étoit à plus de 19 toiſes de profondeur ſous le terrain de la Montagne, comme il étoit facile à connoître par le Puits des Eſſarts, qui eſt entre Roquencourt, Bailly & Marly, on ordonna pourtant à M. Picard de la niveller pour ſçavoir à quelle hauteur elle pouvoit être à l'égard de Verſailles ; & après pluſieurs nivellemens qu'il fit à diverſes fois, tant en gros, qu'en détail, il trouva que la ſuperficie de l'eau de ce Puits, qui eſt éloigné de Verſailles d'environ 3000 toiſes, étoit à peu près de niveau avec le rez-de-chauſſée du Château.

On donna ordre enſuite au Sieur Jongleur de ramaſſer toutes les eaux de cette Montagne, & de les faire conduire à Verſailles. Il fit pour cet effet ſous terre un long Aqueduc, dont la ſortie eſt proche de Roquencourt,

environ trois pieds plus bas que la ſuperficie de l'eau des Eſſarts, ſuivant les nivellemens que l'on en avoit faits; & après que l'Aqueduc a été entierement achevé, les choſe ſe ſont trouvées par l'experience tellement conformes aux nivellemens, qu'il ne ſe pouvoit rien de plus juſte.

La même choſe eſt arrivée à l'égard des eaux que le Sieur Jongleur a encore recueillies entre Roquencourt & Bailly pour Triannon, & du côté de Saint-Cyr pour la Ménagerie; ce que l'on a crû devoir rapporter, comme autant de preuves de la juſteſſe des manieres de niveller que l'on a enſeignées ci-devant : mais en voici d'autres qui ſont bien plus conſiderables.

La propoſition la plus hardie, que l'on ait faite pour donner des Eaux à Verſailles, a été celle de M. Riquet, qui eſt aſſez connu par l'entrepriſe de la Jonction des Mers. Il avoit vû que la Riviere de Loire avoit beaucoup plus de pente que la Seine, d'où il avoit conclu que le lit de la Seine, étoit beaucoup plus bas que celui de la Loire; & ſur ce fondement il s'étoit perſuadé que l'on pourroit conduire un Canal depuis la Riviere de Loire juſques au Château de Verſailles. Il n'avoit pas même fait difficulté d'avancer, qu'il pourroit conduire cette eau ſur le haut de la Montagne de Sataury, qui eſt plus haut de 20 toiſes que le rez-de-chauſſée du Château; ce qui auroit pû fournir un ample Reſervoir pour l'embelliſſement de ce lieu. Une propoſition ſi avantageuſe ne manqua pas d'être écoutée favorablement; mais comme l'entrepriſe étoit d'une grande conſéquence, il s'agiſſoit de l'examiner avec tous les ſoins poſſibles, ce que l'on remit entre les mains de M. Picard, qui fut accompagné de M. Niquet dans cet ouvrage.

C'étoit vers la fin du mois de Septembre de l'année 1674; & parce qu'il reſtoit peu de tems commode pour

faire des nivellemens, il crut qu'il étoit à propos d'abord d'examiner la chose en gros; afin que s'il y avoit quelqu'apparence de possibilité, on la pût refaire dans la suite avec toutes sortes de précautions.

Il avoit sçû que M. Riquet avoit dessein de prendre la Loire au-dessus de Briare, & par conséquent qu'il falloit traverser le Canal : c'est pourquoi il s'appliqua à bien connoître la différence du niveau entre Versailles, & le plus haut point du Canal de Briare : & pour cet effet il jugea, qu'il n'y avoit rien de plus expedient que de bien déterminer la hauteur de Versailles au-dessus de la Seine, puis suivre en remontant les Rivieres de Seine, & de Loin jusques à Montargis où commence le Canal de ce côté-là.

La Seine entre Séve & les Moulineaux, où elle approche le plus de Versailles, étoit alors basse de 3 toises au-dessous du pied du mur des Moulineaux, & en cet état elle fut trouvée plus basse que le rez-de-chaussée du Château de Versailles de soixante toises $\frac{1}{2}$, ce qui fut vérifié en allant & venant. Puis on examina la pente de la Seine depuis Valvint jusques à Séve de la maniere suivante.

Le 27 Septembre étant proche le Clos des Capucins, entre Séve & Meudon, à la hauteur de 366 pieds $\frac{1}{2}$ au-dessus de la Seine, on trouva en plein midy, que le sommet de la Tour meridionale de Notre-Dame de Paris étoit bas de 16 minutes 40 secondes sous le niveau apparent. L'observation fut faite avec le niveau où l'on avoit fait marquer des minutes sur la lame où est attachée la petite platine d'argent dont le centre détermine le point du perpendicule, comme il a été dit dans la Description du Niveau.

La distance en ligne droite entre la station proche le mur des Capucins, & la Tour de N. D. de Paris étoit de

5040 toises, ce que l'on sçavoit assez exactement par la Carte des Environs de Paris, que le Sieur Vivier avoit faite: d'où il s'ensuivoit, que l'abaissement apparent de ladite Tour à l'égard du niveau apparent étoit de 147 pieds.

Le lendemain à pareille heure, le niveau ayant été porté au haut de la Tour de N. D. l'endroit de la station des Capucins parut au-dessus du niveau apparent de 11 minutes 20 secondes, ce qui donnoit une hauteur apparente de 102 pieds, laquelle étant ajoûtée à la dépression de la Tour de N. D. observée de 147 pieds à la premiere station, faisoit ensemble la somme de 249 pieds, dont la moitié, sçavoir 124 pieds $\frac{1}{2}$, étoit la veritable différence du niveau de ces deux stations, & dont celle des Capucins de Meudon étoit plus haute.

La Tour Septentrionale est plus haute que l'autre de 8 pouces.

La hauteur de ladite Tour ayant été exactement mesurée depuis le pavé de l'Eglise jusques au haut du parapet, ou appuy, elle fut trouvée de 34 toises, ou de 204 pieds: mais la Riviere de Seine étoit alors plus basse que le pavé de l'Eglise de 27 pieds; & par conséquent depuis l'eau de la Seine jusques au haut de ladite Tour il y avoit 231 pieds, à quoi si l'on ajoûte l'excès du vrai niveau dont la station des Capucins étoit plus haute que celle de la Tour, qui est de 124 pieds $\frac{1}{2}$, on aura 355 pieds $\frac{1}{2}$ dont la Seine vers N. D. à Paris est plus basse que la station des Capucins de Meudon: Mais on avoit trouvé que cette même station étoit plus haute que la Seine, prise entre les Molineaux & Séve, de 366 pieds $\frac{1}{2}$; donc la Seine étoit plus basse vers Séve qu'à Paris de 11 pieds, ce qui devoit être la pente de cette Riviere entre ces deux lieux: mais ayant fait ensuite le nivellement en détail, & par stations médiocres, on trouva qu'il n'y avoit que 8 pieds; ce qui commença de rendre suspecte la premiere maniere dont on s'étoit servi.

Du haut de la même Tour de N. D. on avoit observé

la Butte du Griffon, qui est entre Ville-neuve-Saint-George & Yerre, & elle avoit paru basse de 25 secondes; & parce que la distance est de 9070 toises, il devoit y avoir 7 pieds de dépression apparente: mais la Tour de N. D. étant ensuite observée de dessus la Butte du Griffon, parut basse de 9 minutes ou de 142 pieds, dont ayant ôté les 7 pieds ci-dessus, & prenant la moitié du reste, on trouva que la veritable différence du niveau étoit de 67 pieds $\frac{1}{2}$, laquelle étant ajoûtée aux 231 pieds de hauteur de la Tour de N. D. à l'égard de la Seine on conclut que la Seine à Paris étoit à 298 pieds $\frac{1}{2}$ sous le vrai niveau du Griffon.

Du même lieu du Griffon, le haut du mur de la clôture de la Maladrie, appellée S. Lazare près Corbeil, avoit paru bas de 9 minut. 30 sec. étant éloigné de 7200 toises, & par conséquent la dépression apparente étoit de 119 pieds. La Butte du Griffon observée ensuite du même lieu de Saint Lazare, fut trouvée haute de 1 min. 35 sec. ou de 21 pieds, qu'il faut ajoûter aux 119 trouvez ci-dessus, & prendre la moitié de la somme, qui sera 70 pieds pour la vraye hauteur du Griffon pardessus le mur de S. Lazare: mais le mur de S. Lazare étoit à 202 pieds au-dessus de la Seine près Corbeil; & par conséquent la Seine à Corbeil étoit plus basse que la Butte du Griffon de 272 pieds: mais on avoit trouvé que la Seine à Paris étoit plus basse que le même Griffon de 298 pieds $\frac{1}{2}$; donc la pente de la Seine depuis Corbeil jusques à Paris devoit être de 26 pieds $\frac{1}{2}$; au lieu que par les nivellemens faits en détail le plus exactement qu'il fut possible, on ne trouva que 18 pieds, à quoi on crût qu'il falloit s'en tenir, d'autant que pour se mettre entierement à couvert des réfractions aux grands coups de nivellemens réciproques, il auroit fallu qu'ils eussent été faits en même tems; joint que d'ailleurs la moindre erreur que l'on auroit pû

commettre dans l'obſervation, auroit produit une très-grande variation : c'eſt pourquoi, bien que l'on eut toûjours été de la même maniere juſques à Melun, on ne tint aucun compte des grands coups de niveau, continuant de ſuivre le bord de la Riviere juſqu'à Valvint, où étant arrivez, on trouva que l'on étoit monté depuis Corbeil de 25 pieds.

Pente de la Seine depuis Valvint juſques à Séve.

De Valvint à Corbeil	25 pieds.
De Corbeil à Paris	18
De Paris à Séve	8

Somme 51 pieds, ou 8 toiſes $\frac{1}{2}$.

Depuis Valvint juſques à Séve la pente de la Seine eſt d'environ 1 pied pour 1000 toiſes de chemin, tantôt un peu plus, & tantôt un peu moins.

De Valvint on traverſa droit en nivellant juſques à Moret, & de Moret le long des bords de la Riviere de Loin juſques à Montargis, & l'on trouva que l'on étoit monté de 16 toiſes, en quoi on ne pouvoit pas ſe tromper conſiderablement, quand on n'auroit fait que compter les Moulins qui ſont ſur ladite Riviere, eſtimant outre cela ce qu'il peut y avoir de pente d'une Chauſſée à l'autre.

On ne fit enſuite que meſurer les ſauts des Ecluſes du Canal de Briare, qui depuis Montargis juſques au Point de partage ſont au nombre de 28, faiſant 42 toiſes de hauteur.

Du haut du Canal juſques à Montargis	42 toiſes.
De Montargis à Valvint	16
De Valvint à Séve	8 $\frac{1}{2}$
Donc du haut du Canal juſques à Séve	66 $\frac{1}{2}$
Mais de Verſailles à Séve	60 $\frac{1}{2}$

Donc le plus haut point, autrement le Point de par-

tage du Canal de Briare, eſt plus haut que le rez-de-chauſſée du Château de Verſailles de 6 toiſes.

Ce qui revient à peu près au niveau de la ſuperficie du Reſervoir du deſſus de la Grotte.

On deſcendit enſuite vers la Loire, qui étoit pour lors fort baſſe, & en meſurant les ſauts des Ecluſes du Canal, qui ſont de ce côté-là au nombre de 14 ſeulement, on trouva que depuis le Point de partage juſques à la Loire, il y avoit 17 toiſes de pente : de ſorte que pour retrouver le niveau du haut du Canal, il auroit fallu prendre la Loire en remontant à 17 toiſes plus haut qu'elle n'eſt aux environs de Briare : mais avant que d'examiner juſqu'où il auroit fallu remonter pour prendre la Loire, & avant que de reconnoître les terrains, tant au-delà, qu'au-deçà du Canal, pour conduire un Aqueduc, voyant qu'outre la pente neceſſaire pour un ſi long chemin, il s'en falloit 14 toiſes, que l'endroit du Canal par où il auroit fallu faire paſſer l'Aqueduc pour conduire l'eau de la Loire, ne fût auſſi haut que Sataury; & ne ſçachant pas d'ailleurs ſi l'on ſe contenteroit de la choſe telle qu'elle ſe trouvoit, on penſa qu'il falloit verifier en retournant les endroits où il pouvoit y avoir quelque doute dans les opérations.

Le lit de la Loire près Briare eſt plus haut de 41 toiſes que celui de la Seine à Valvint.

M. Picard fit ſon Rapport de ce qu'il avoit trouvé, ſans ſçavoir que M. Riquet eût envoyé en particulier des Nivelleurs après lui, & quoiqu'il vît ce qu'on avoit trouvé contre ce qu'il avoit avancé, il ne laiſſa pas de perſiſter dans ſa premiere propoſition juſqu'au retour de ſes Gens : car alors il demeura d'accord de tout ce que M. Picard avoit rapporté, dont il fut entierement convaincu, après que l'on eût refait en ſa preſence les nivellemens depuis Verſailles juſqu'à Séve, & depuis Séve juſqu'à la Porte de la Conférence : On en demeura-là pour lors, & l'on ne parla plus de cette affaire que quatre ans après, à l'occaſion de ce qui ſuit.

Sur les bords de la Forêt d'Orleans du côté de Pluviers, il y a plusieurs Etangs, & Sources vives qui forment des Ruisseaux, lesquels s'étant joints ensemble font la Riviere de Juine, dont la pente est si grande, que depuis son commencement jusques au-dessous de la Ferté-Alais où elle se joint à celle d'Etampes, elle fait aller environ soixante Moulins en peu d'espace de chemin. M. Franchine avoit eu la pensée de faire venir cette Riviere à Versailles : mais quelque tems après, en l'année 1678, sur le rapport du Sieur Vivier, qui faisoit alors la Carte de l'Orleanois, on y pensa tout de bon. M. Picard eut ordre d'examiner si la chose étoit possible, & il fut accompagné dans ce voyage par le Sieur Vivier, qui avoit renouvellé la proposition, & par le Sieur Villiard son Aide ordinaire.

Il reprit les nivellemens qu'il avoit déja faits jusqu'à Corbeil, & il les continua jusqu'à Orleans.

Pentes depuis la Forêt d'Orleans jusqu'à Corbeil.

De l'Etang appellé le Grand-Vau, qui est dans la Forêt au-dessus de Chemerolles, pente jusqu'à l'Etang du Bois près Courcy	18 pieds.
De l'Etang du Bois à celui de Laas	18
De l'Etang de Laas au Moulin de Pluviers	55
De Pluviers au Pont d'Angerville-la-Riviere	71 ½
D'Angerville-la-Riviere à Males-herbes	17 ½
De Males-herbes à Maisse	27
De Maisse à la Ferté-Alais	19
De la Ferté à Ormoy	31
D'Ormoy jusqu'au Moulin d'Essone	21
D'Essone à la Riviere	22

Somme 300 pieds, ou 50 toises.

La Seine n'étoit pas plus haute que dans l'année 1674,

lorſqu'on fit les Nivellemens, de ſorte qu'ajoûtant les 4 toiſes ½ de pente, qui furent trouvées alors depuis Corbeil juſqu'à Séve, on trouve que les eaux de la Forêt d'Orleans ont 54 toiſes ½ de hauteur au-deſſus de la Seine vers Séve: Et parce que la hauteur du rez-de-chauſſée de Verſailles au-deſſus du même endroit de la Seine à Séve, eſt de 60 toiſes ½; il s'enſuit que le rez-de-chauſſée du Château de Verſailles eſt plus haut de 6 toiſes que l'Etang du Grand-Vau de la Forêt d'Orleans.

Les choſes ayant été trouvées en cet état on ordonna à M. Picard de continuer les nivellemens pour revoir s'il étoit poſſible de conduire un Canal, de la Loire juſqu'au Château de Verſailles.

On avoit déja trouvé, qu'il falloit traverſer le Canal de Briare, & par les derniers nivellemens on avoit auſſi reconnu qu'il falloit neceſſairement paſſer entre l'Etang du Grand-Vau, qui s'écoule dans la Seine, & ceux de la Courdieu dont les eaux tombent dans la Loire; & parce qu'il étoit impoſſible de niveller dans la Forêt d'Orleans autrement que par les grandes Routes, on ſuivit celle de Gergeau; & traverſant depuis l'Etang du Bois en montant vers la Courdieu, on trouva que le plus haut terrain pris dans ladite Route de Gergeau à 150 toiſes environ au-delà de l'endroit où elle eſt coupée par celle du Hallier, étoit plus haut de treize toiſes que l'Etang du Bois & par conſéquent plus haut de 10 toiſes que le Grand-Vau; & qu'ainſi on étoit plus haut de 4 toiſes que le rez-de-chauſſée du Château de Verſailles.

On trouva auſſi par occaſion que le pied de la grille de l'Etang le plus haut de la Courdieu, qui étoit pour lors à ſec, étoit plus haut d'environ 9 pieds, que la ſuperficie de l'Etang du Grand-Vau, ou 5 pieds que la Chauſſée de ce même Etang. Ce que l'on met ici en faveur de ceux qui voudront joindre la Loire avec la Seine par ce côté-là.

Il eût été impossible, à cause des Bois, de continuer l'examen du Terrain jusqu'au Canal de Briare, à moins que de faire des Routes exprès au travers de la Forêt; & parce que d'ailleurs on étoit dans l'impatience de sçavoir comment ces derniers nivellemens s'accorderoient avec ceux qui avoient été faits quatre ans auparavant, on descendit en nivellant jusqu'à la Loire, qui étoit fort basse, & qui étant prise au-dessous de la Porte de Bourgogne au pied d'une vieille muraille appellée le Crau, fut trouvée plus basse que le haut terrain de la Forêt, de vingt-huit toises $\frac{1}{2}$; au lieu que depuis le même haut terrain jusqu'à la Seine prise à Corbeil, il y avoit 60 toises de pente: de maniere que la Seine à Corbeil étoit plus basse que la Loire à Orleans de 31 toises $\frac{1}{2}$; les deux Rivieres étoient alors fort basses.

Pente de la Loire depuis l'entrée du Canal de Briare jusqu'au Crau d'Orleans.

Du Canal à Gien	10 pieds.
De Gien à Rocole	10
De Rocole jusqu'au Port la Ronce	42
Du Port la Ronce à Gergeau	10
De Gergeau à Orleans	19

Somme 91 pieds, ou environ 15 toises; & parce que le Point de partage est plus haut que la Loire de 17 toises, il s'ensuit que ledit Point de partage étoit à 32 toises de hauteur au-dessus de la Loire prise à Orleans; & si l'on ajoûte encore les 31 toises $\frac{1}{2}$ qu'il y a d'Orleans à Corbeil, & les 4 toises $\frac{1}{2}$ de Corbeil à la Seine proche de Séve, la somme totale se montera à 68 toises pour la hauteur du Canal de Briare au-dessus de la Seine à Séve: puis ayant ôté les 60 toises $\frac{1}{2}$ qu'il y a de Versailles à Séve, on trouvera que le Point de partage du Canal est

plus haut que le rez-de-chaussée du Château de Versailles de 7 toises $\frac{1}{2}$, au lieu que par les premiers nivellemens faits par la Riviere de Loire on n'avoit trouvé que 6 toises de hauteur : mais il vaut mieux s'en tenir à ces derniers, d'autant qu'ils furent faits dans un tems beaucoup plus favorable que les premiers, & avec un instrument dont le perpendicule avoit quatre pieds de hauteur, au lieu que celui qui avoit servi aux premiers n'avoit que 3 pieds; ou enfin si l'on veut on pourroit partager le différent par la moitié.

Pente de la Riviere de Loire depuis Pouilly jusqu'à l'entrée du Canal de Briare.

De Pouilly à Cosne	26 pieds.
De Cosne à Nevay	25
De Nevay à Bony	7
De Bony à l'entrée du Canal de Briare	20

Somme 96 pieds ou 16 toises.

On conclut de ces nivellemens, que pour trouver le niveau du plus haut point du Canal de Briare, qui étoit environ celui du Reservoir du dessus de la Grotte de Versailles, il falloit remonter la Loire environ une lieuë au-dessus de Pouilly ; & pour avoir une pente convenable pour conduire l'eau dans un Acqueduc, il falloit aller du moins jusqu'à la Charité.

La saison étoit déja fort avancée ; & parce que les nivellemens des environs de la Forêt d'Orleans avoient donné lieu de craindre que le terrain de la Beauce ne fût trop bas pour pouvoir porter l'eau de la Loire à Versailles, on revint à Orleans, sans s'arrêter à d'autres recherches, pour achever d'executer les ordres de sa Majesté, qui étoient de revenir expressément de la Forêt d'Orleans par la Beauce en nivellant jusqu'à l'Etang de Tra-

pe, qui, comme nous dirons ci-après, étoit un terme connu, que l'on sçavoit être plus haut d'environ deux toises, que la superficie du Reservoir du dessus de la Grotte.

Pour reprendre les premiers vestiges & tenir le dehors de la Forêt, on crut qu'il étoit à propos de recommencer par l'Etang de Laas, que l'on sçavoit être plus bas de 16 toises, que le haut terrain de la Forêt, ou de 12 toises que le rez-de-chaussée du Château de Versailles.

On monta de Laas à Saint-Lié 5 toises.

De S. Lié au pavé de la Mont-joye on monta encore 2

De sorte que le pavé de la Mont-joye est plus haut que l'Etang de Laas de 7

Et suivant ce que l'on vient de conclure, il falloit monter de 12 toises pour être de niveau avec Versailles.

Mais parce que l'Etang de Trape est plus haut d'environ 7 toises que le rez-de-chaussée du Château de Versailles, il s'ensuit que nonobstant les 7 toises dont on étoit monté, on étoit encore plus bas que l'Etang de Trape, d'environ 12 toises. On étoit cependant très-assuré, que l'on avoit coupé tout le terrain par où l'on auroit pû faire passer l'Aqueduc pour porter l'eau de la Loire à la sortie de la Forêt d'Orleans, & que ledit lieu de la Mont-joye, qui est sur le grand chemin de Paris en sortant d'Orleans, étoit l'endroit le plus haut, qui soit depuis l'Etang de Laas jusqu'à la Loire, en suivant les bords de la Forêt d'Orleans du côté de Paris.

Ce qui vient d'être conclu à l'égard des 12 toises dont le pavé de la Mont-joye est plus bas que l'Etang de Trape, suppose les nivellemens de Versailles à Séve, de Séve à Corbeil, & de Corbeil à Orleans : mais voici ce que l'on trouva par le droit chemin.

Nivellemens faits depuis Orleans jusqu'à l'Etang de Trape.

De la Mont-joye à la Croix de Toury en montant 10 pieds.

De la Croix de Toury à celle qui est sur le grand chemin près d'Angerville, vis-à-vis d'Arbouville, en montant encore 10

De ladite Croix au Moulin d'Ovitreville en montant 16

Du Moulin d'Ovitreville à l'Orme de Sainville en montant 19

Dudit Orme au Moulin des Essarts aux environs de Haute-Briere en montant 68

Somme totale 123 pieds dont on étoit monté depuis la Mont-joye.

Mais du Moulin des Essarts à Trape on ne descendit que de 58 pieds ; par conséquent il restoit encore 65 pieds, ou environ 11 toises dont l'Etang de Trape est plus haut que le pavé de la Mont-joye; c'étoit moins d'une toise que par les premiers nivellemens : mais pour dire la verité, bien que ces derniers nivellemens eussent été faits par un chemin beaucoup plus court que les premiers, on eut un si mauvais tems en traversant la Beauce, qu'il pourroit bien s'être glissé quelque petite erreur, nonobstant tous les soins qu'on y apportoit; &, comme on a déja dit, on peut bien partager un si petit différent par la moitié; joint que si la chose dont il s'agissoit avoit eu quelqu'apparence d'être possible, il eût fallut en venir plus à loisir à un dernier éclaircissement: mais d'autant que les nivellemens faits par divers chemins, montroient évidemment que la Beauce, à la sortie de la Forêt d'Orleans, étoit plus basse non seulement que l'E-

tang de Trape, mais encore que le rez-de-chaussée du Château de Versailles; il n'en falloit pas davantage pour juger, qu'il étoit impossible de conduire l'eau de la Loire à fleur de terre jusqu'au Château de Versailles, & qu'on auroit été obligé d'élever un Aqueduc depuis le milieu de la Forêt d'Orleans jusqu'à Angerville.

On peut ajoûter à cette Relation quelques autres Nivellemens que M. Picard fit aux environs de Versailles, pour faire voir jusqu'à qu'elle justesse on peut parvenir en nivellant de la maniere que l'on a expliquée ci-dessus.

A la tête de la Riviere de Biévre, que l'on appelle autrement des Gobelins, il a deux grandes pleines, l'une au-dessous de Trape, & l'autre au-dessus de Boisdarcy, dont les eaux s'écoulent par deux gorges assez étroites, que l'on pouvoit fermer pour faire deux Etangs considerables; mais il s'agissoit de sçavoir si les eaux de ces Etangs auroient assez de hauteur pour être conduites au Château de Versailles; ce qu'il importoit d'autant plus de bien connoître, qu'il falloit percer la montagne de Sataury pour les faire passer.

Les endroits des Bondes ayant été marquées, il trouva que le fond de l'Etang de Trape auroit environ 15 pieds de hauteur pardessus la superficie du Reservoir du dessus de la Grotte de Versailles, & que l'Etang de Boisdarcy seroit plus haut que celui de Trape de 9 pieds.

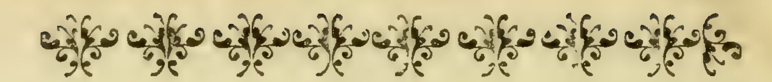
Après avoir fait ces nivellemens par plusieurs fois & en diverses manieres, on lui ordonna de marquer avec des piquets la conduite des eaux de Trape, qui se devoit faire à découvert jusqu'à l'endroit où il falloit percer la Montagne de Sataury, & pour toute la longueur du chemin, qui devoit être d'environ 4000 toises, à cause des vallons qu'il falloit côtoyer, on voulut qu'il ne prît que 3 pieds de pente, afin de conserver l'eau dans la plus grande hauteur qu'il seroit possible. Il avoit aussi

marqué ſéparément la conduite des eaux de l'Etang de Boiſdarcy, qui étoit plus courte que l'autre de près de la moitié : mais on trouva à propos de les joindre toutes deux enſemble.

On éleva les chauſſées des Etangs, on travailla à la conduite & l'on fit en même tems un Aqueduc long de 750 toiſes au travers de la Montagne de Sataury, à 14 toiſes au-deſſous du plus haut terrain, le tout ſur la bonne-foi des nivellemens, qui ſe ſont enfin trouvez ſi juſtes, qu'après avoir mis de l'eau dans l'Etang de Trape, & qu'elle a été lâchée dans la conduite ou rigole, il eſt arrivé que cette eau étant en repos, s'eſt trouvée à l'entrée de la Montagne de Sataury, haute de 3 pieds, lorſqu'elle étoit à fleur du ſeuil de l'étang de Trape, comme on avoit déterminé par les Nivellemens.

Il ne ſera pas hors de propos de remarquer ici, que l'eau de l'étang de Trape étant lâchée avec une charge de trois pieds, employe quatre heures de tems à faire 4000 toiſes de chemin avec trois pieds de pente. Mais ce qui eſt encore de plus conſiderable, c'eſt qu'après que les tuyaux de conduite eurent été placez depuis l'entrée de la Montagne de Sataury juſques deſſus la Grotte de Verſailles, ſa Majeſté faiſant faire le premier eſſay de ces eaux, eut le plaiſir de voir qu'elles ſortoient avec tant de force, qu'il n'y avoit pas lieu de douter qu'elles n'euſſent pû monter beaucoup plus haut, conformément aux nivellemens qui en avoient été faits, & en deſcendant de deſſus la Grotte elle témoigna à M. Picard qu'elle étoit fort contente.

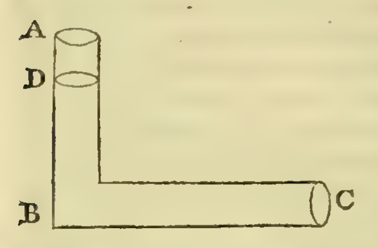
On ne doit pas oublier d'avertir que M. Roëmer a eu beaucoup de part aux Nivellemens, qui ont été faits aux environs de Verſailles, ayant aſſez ſouvent tenu la place de M. Picard lorſqu'il étoit malade, ou qu'il étoit obligé de s'abſenter pour quelqu'autre empêchement.



DE CRASSITIE ET VIRIBUS Tuborum in Aquæductibus secundum diversas Fontium altitudines diversasque tuborum diametros.

A D. ROMER anno 1680.

COGNITISSIMUM est altiores fontes, & ampliores ductuum diametros multo fortiora requirere tuborum latera, quàm aqua quæ ex depressiori loco per canalem angustum exoneratur; à nemine vero quod sciam hactenus sufficienter explicatum est qua proportione immutare convenit crassitiem metalli ad retinendam eandem tuborum firmitatem in quibuscumque altitudinibus & diametris propositis. Regulis in illum usum condendis inservient sequentes propositiones, in quibus suppono tubum continuum ABC ad angulum rectum inflexum in B. In parte AB perpendiculari indefinitæ amplitudinis, considero altitudinem incumbentis quæ; in parte vero horisontali BC indefinitæ longitudinis, considero amplitudinem tuborum.



PROPOSITIO PRIMA.

Idem tubus clausus in C ab aquis diversarum altitudinum AB, DB distenditur in ratione altitudinum AD ad DB, patet.

PROPOSITIO SECUNDA.

Aqua ejusdem altitudinis in distendendis tubis diversarum diametrorum valet ut diametri tuborum.

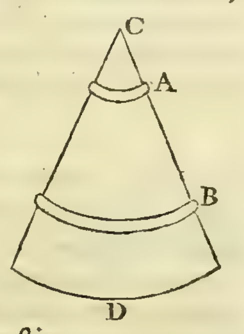
Nam vires aquæ sunt ut superficies in quas ponderant ex eadem altitudine, sed superficies cylindricæ sunt ut diametri.

PROPOSITIO TERTIA.

(Inutilis, nisi contraritum ejus quod hic astruitur assumptum fuisset ab aliis ad concludendum falsum in hac ipsa materia.)

Cylindrus amplus eodem modo resistit disruptioni secundum suam longitudinem ac parvus, si utrobique iisdem viribus sit resistendum. Si exempli gratia, vel altitudines sint in ratione reciproca superficierum, vel supponatur in tubis contineri liquores diversæ gravitatis absolutæ in ratione ipsarum superficierum directa.

Ad hoc intelligendum imaginemur duos annulos A, B, ejusdem crassitiei, sed diversarum diametrorum, æqualibus viribus trudi deorsum, circa conum CD. Neutrum autem facilius rumpetur, si materia utriusque eadem sit & uniformis, non aliter quam suspensum pondus eadem facilitate rumpit filum longum ac breve, modo ejusdem sint crassitudinis: sed res eodem modo se habet in disruptione plurium annulorum qui cylindrum constituunt.



PROPOSITIO QUARTA.

Vires tuborum ad resistendum disruptioni sunt in duplicata ratione crassitierum metalli.

Nam vires ſingulorum annulorum in quos tubus reſolvitur ſunt ut quadrata craſſitierum ſuarum vel ut ſuperficies in diſruptione ſeparandæ.

Hinc tres ſequentes regulæ extruuntur.

Regula prima.

Si manente altitudine aquæ libeat mutare diametrum tubi, oportet ad retinendam eandem firmitatem mutare craſſitiem metalli in ſubduplicata ratione diametrorum, ſeu ut eorum radices, per 2 & 4 propoſitionem.

Regula ſecunda.

Si immutetur altitudo, manente diametro, debet eodem modo craſſities augeri ut radices altitudinum, per 1 & 4 propoſitionem.

Regula tertia.

Invenitur craſſities metalli poſt immutatam & altitudinem & diametrum, ſi fiat : Ut productum altitudinis in diametrum unius, ad productum altitudinis in diametrum alterius; ſic quadratum craſſitiei unius, ad quadratum craſſitiei alterius.

Exemplum.

Tubus plumbeus diametri 16 pollicum ab incumbente aqua 50 pedum habens craſſitiem $6\frac{1}{3}$ linearum, inventus eſt ſufficientis firmitatis in experimento Verſalliano, quæritur quænam aſſignari craſſities tubo plumbeo debet, cujus diameter 10 pollicum, & altitudo aquæ 40 pedum.

Productum . . . . . 16 in 50 eſt 800.
& . . . . 10 in 40 eſt 400.
Quadratum craſſitiei datæ 40.
Ergo ut 800 ad 400, ſic 40 ad 20, cujus radix $4\frac{1}{2}$ fere:

ergo tubus hujus craſſitiei in propoſita altitudine & diametro, æque fortis erit ac ille quem expertus ſum.

EXPERIMENTA CIRCA altitudines & amplitudines projectionis corporum gravium, inſtituta cum argento vivo à D. Romer.

JACTUS verticalis fuit 270 linearum, cujus obſervatio cum ſit difficilior, confirmata eſt ab altitudinibus jactuum parum à vertice declinantium, veluti in gradu 5° 268 lin. in gradu 10° 262 linearum.

Hinc ex ſuppoſito impetu 270 lin. computantur altitudines & amplitudines projectionum, & conferuntur cum obſervatis in ſequenti tabella.

Elevatio directionis.	Amplitudo computata.		Amplitudo obſervata.		Correſpond. ſuprà 45°.		Altitudo computata.	Altitudo obſervata.
Grad.	*Poll.*	*Lin.*	*Poll.*	*Lin.*	*Poll.*	*Lin.*	*Lin.*	*Lin.*
5	7	10	8	9	7	8	2	4
10	15	5	16	6	15	2	8	9
15	22	6	23	9	22	4	18	21
25	34	6	35	6	35	0	48	51
35	42	3	43	0	42	0	89	94
45	45	0	44	9			135	140
55	42	3	42	0			181	187
65	34	6	35	0			222	226
75	22	6	22	4			252	254
80	15	5	15	2			262	262
85	7	10	7	8			268	269
90	0	0	0	0			270	270

Notæ ex observationibus depromptæ.

I. Filum seu cylindrus erumpens, multo major est quam foramen, etiam quando directio ad horizontem est inclinata.

II. In jactibus obliquioribus ut 45, 50, 35 gradum, &c. filum fluxus in descensu extenditur, & separatur non quidem in penicillum; sed in latum secundum planum verticale.

III. Jactus verticalis argenti vivi vix propius accedit ad altitudinem sui fontis, quam ipsius aquæ.

Hinc in altitudine duorum pedum defecit plus quam 18 lineis; cum tamen tubus respectu foraminis fuerit amplissimus.

In collatione calculi cum observatis apparet.

I. Directiones infrà 45° faciunt amplitudines majores quam correspondentes suprà; cùm juxta theoriam æquali angulo distantes à 45° deberent esse ejusdem amplitudinis.

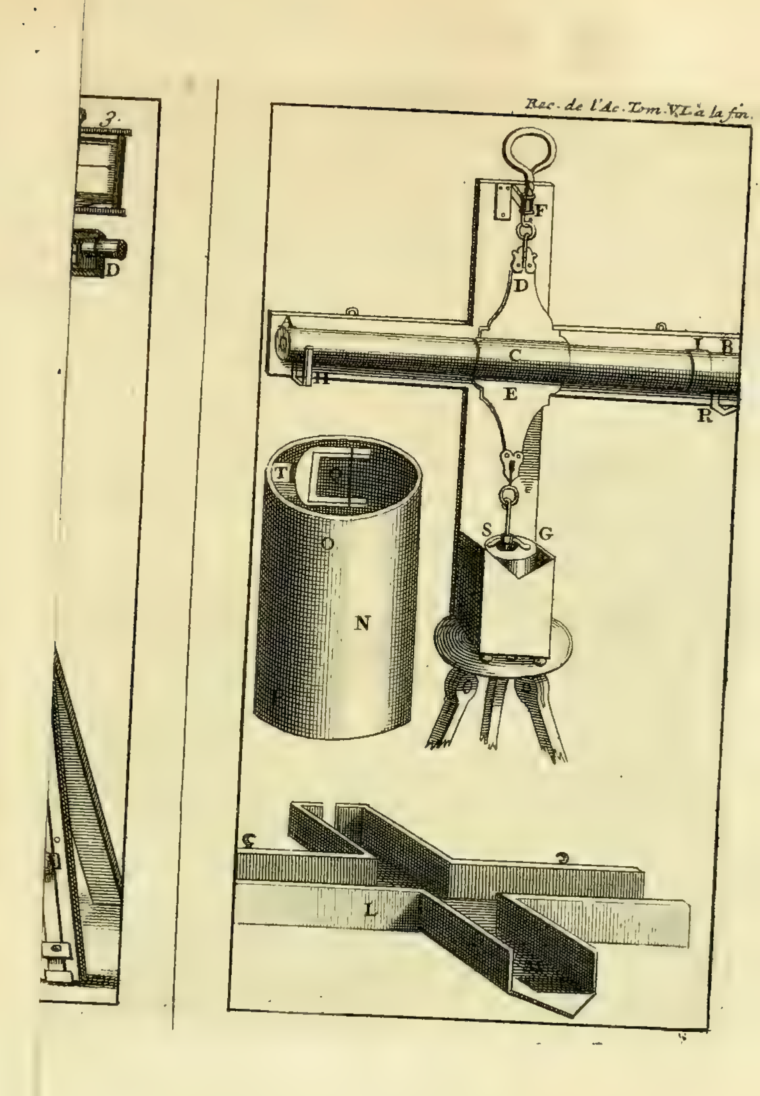
II. Directiones suprà 45° magis respondent calculo.

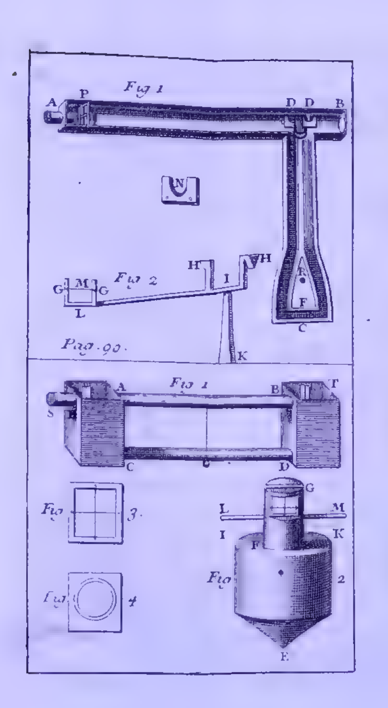
III. Melius conveniunt amplitudines & secum & cum calculo, si sumantur guttæ quæ omnium longissimè projiciuntur. Ego quidem annotavi omnium medias in determinatione amplitudinum.

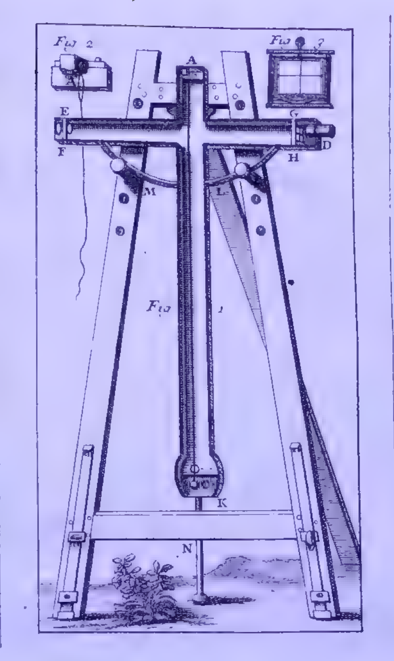
IV. Altitudines ferè ubique sunt majores calculatis, quamvis hypothesis altitudinis maximæ sit bona.

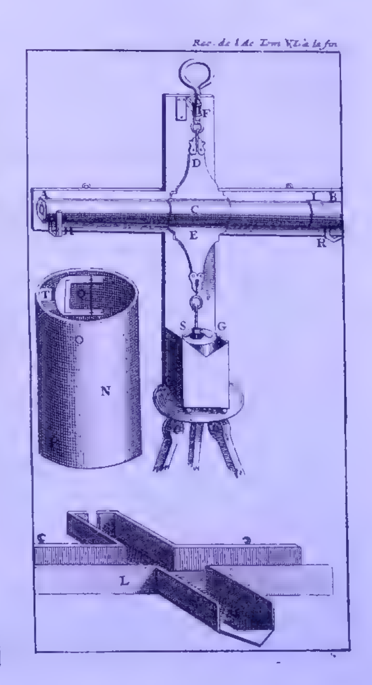
F I N.




F
D
A
C
I
B
H
E
R
T
S
G
N
L


Fig 1
A
P
D D
B
N
H
H
Fig 2
G
M
G
L
I
F
C
K
Pag. 90.
Fig 1
A
B
T
S
C
D
Fig 3.
G
L
M
I
K
F
Fig 2
Fig 4
E


Fig 2
Fig 3
A
E
G
F
D
H
M
L
Fig 1
K
N


Rec. de l Ac. Tom. VI. à la fin
F
D
A
B
C
E
R
T
S
G
N
L